



第2章 线性时不变系统的 时域分析

主要内容

- ❖ 连续时间系统的时域分析：卷积积分
- ❖ 离散时间系统的时域分析：卷积和
- ❖ LTI系统的性质

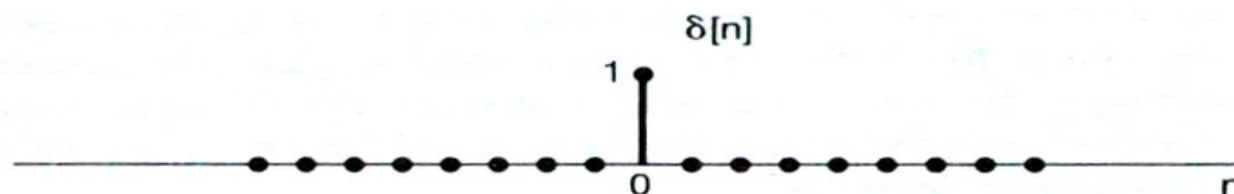
学习目标

- ❖ 掌握卷积积分与卷积和两种计算；
- ❖ 了解常系数微分方程和差分方程的经典算法；
- ❖ 理解LTI系统的冲激响应 $h(t)$ ；
- ❖ 理解系统的零输入响应、零状态响应。

2.0 引言

- ❖ LTI系统（线性时不变系统）的输入用一组基本信号的线性组合来表示，就可以根据该系统对这些基本信号的响应，再利用1.6.6节我们所介绍过的叠加性质来求得整个系统的输出。
- ❖ 新概念——卷积和/卷积积分

2.1 离散时间LTI系统——卷积和



❖ 单位脉冲的采样性质

$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n]$$

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0]$$

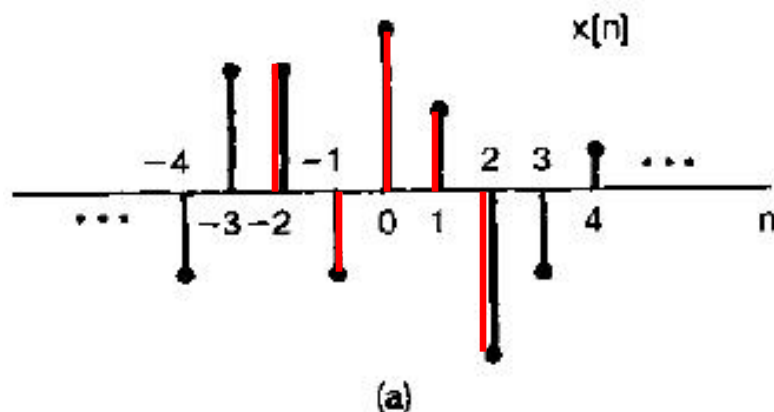
$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

任意一个序列都可以表示成一串移位的单位脉冲序列 $\delta[n-k]$ 的线性组合

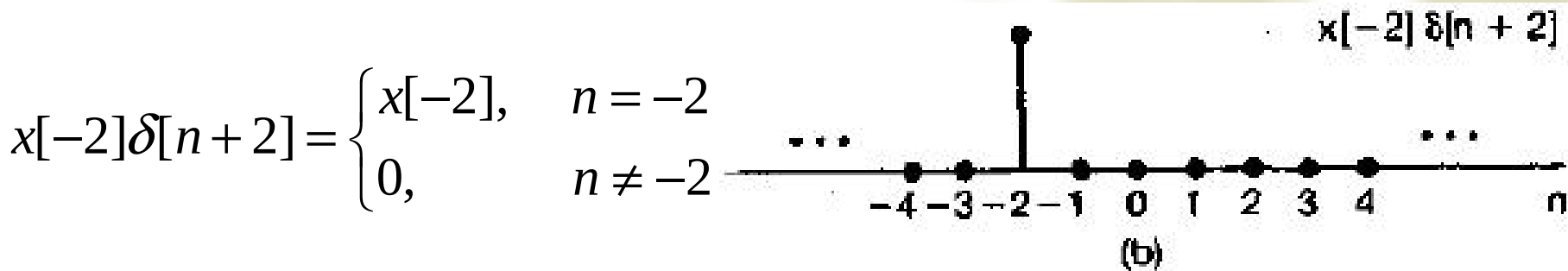
2.1 离散时间LTI系统：卷积和

2.1.1 用脉冲表示离散时间信号

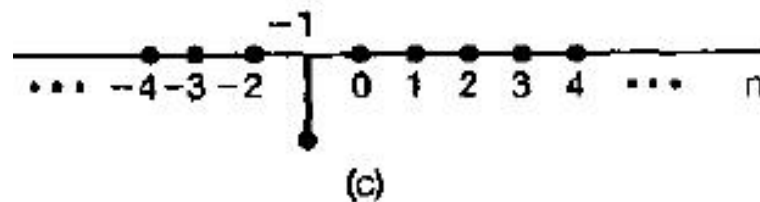
例：原始信号 $x[n]$ ，我们取出 $[-2, 2]$ 区间样本的 $x[n]$



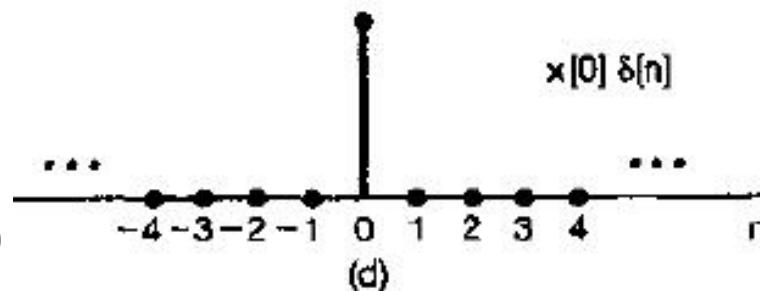
我们画出5个时移并加权的单位脉冲序列



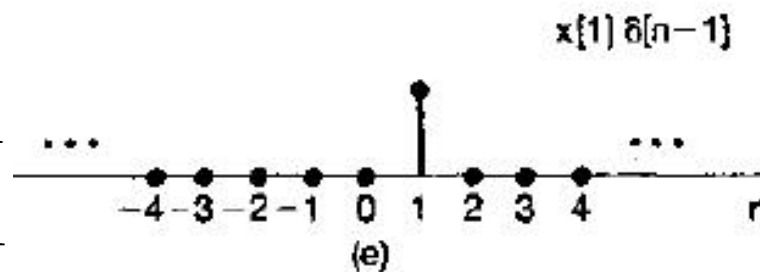
$$x[-1]\delta[n+1] = \begin{cases} x[-1], & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases}$$



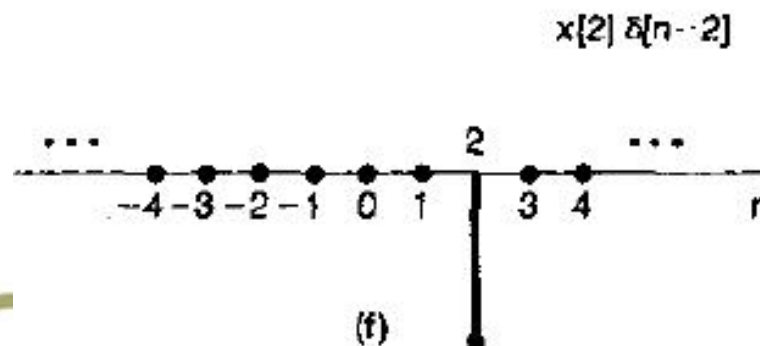
$$x[0]\delta[n] = \begin{cases} x[0], & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



$$x[1]\delta[n-1] = \begin{cases} x[1], & n = 1 \\ 0, & n \neq 1 \end{cases}$$



$$x[2]\delta[n-2] = \begin{cases} x[2], & n = 2 \\ 0, & n \neq 2 \end{cases}$$



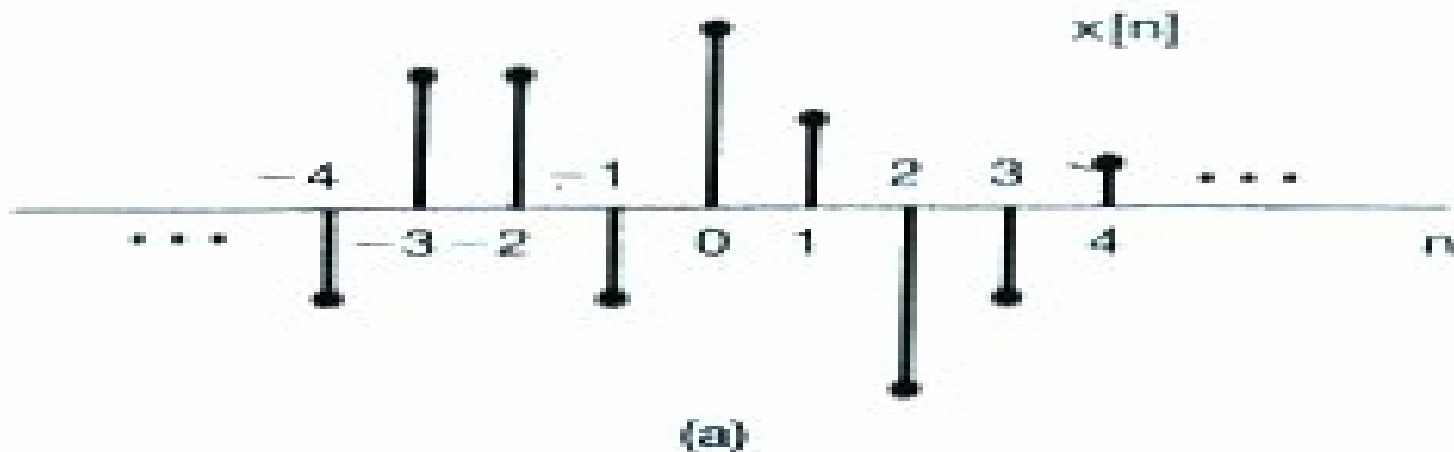
- ❖ 图中这5个序列的和就等于在 $-2 \leq n \leq 2$ 区间的 $x[n]$ 。
若扩大到包含更多的移位加权脉冲，从而

$$\begin{aligned} x[n] = & \dots + x[-3]\delta[n+3] + x[-2]\delta[n+2] \\ & + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] \\ & + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] \\ & + x[3]\delta[n-3] + \dots \end{aligned}$$

即 $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$ $u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$

这样，就把任意一个序列表示成一串移位的单位脉冲序列 $\delta[n-k]$ 的线性组合，而这个线性组合式中的加权因子就是 $x[k]$ 。称为离散时间单位脉冲序列的
筛选性质。

2.1.1 用脉冲表示离散时间信号



$$\begin{aligned} x[n] &= \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \end{aligned}$$

如果 $x[n]=u[n]$, 那么
$$u[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta[n-k]$$

2.1.2 离散时间LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示

一个线性系统对 $x[n]$ 的响应就是系统对这些移位脉冲的每一个响应加权后的叠加；再者，时不变性又意味这——一个时不变系统对移位单位脉冲的响应就是未被移位情况下单位脉冲响应的移位。

❖ 考虑某一线性（可能是时变的）系统对任一输入 $x[n]$ 的响应。由于可以将输入表示为一组移位单位脉冲的线性组合，令 $h_k[n]$ 记为该线性系统对移位单位脉冲 $\delta[n-k]$ 的响应，那么根据叠加性质，该线性系统对输入 $x[n]$ 的响应 $y[n]$ 就是这些基本响应的加权线性组合，即：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h_k[n] \quad \text{式2.3}$$

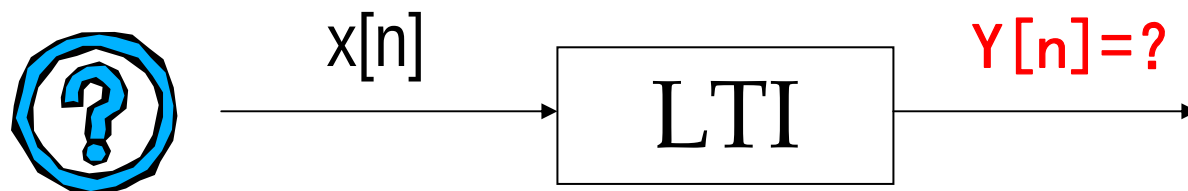
2.1.2 离散LTI系统的单位脉冲响应及卷积和表示

(1) 单位脉冲响应



$h[n]$: 单位脉冲响应

(2) 卷积和



$$\delta[n] \longrightarrow h[n]$$

根据时不变

$$\delta[n-k] \longrightarrow h[n-k]$$

根据叠加性质

$$x[k]\delta[n-k] \longrightarrow x[k] h[n-k]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

举例说明式2.3的意义。下图示出该系统对 $\delta[n+1]$, $\delta[n]$ 和 $\delta[n-1]$ 的响应是 $h_{-1}[n]$, $h_0[n]$ 和 $h_1[n]$ 。

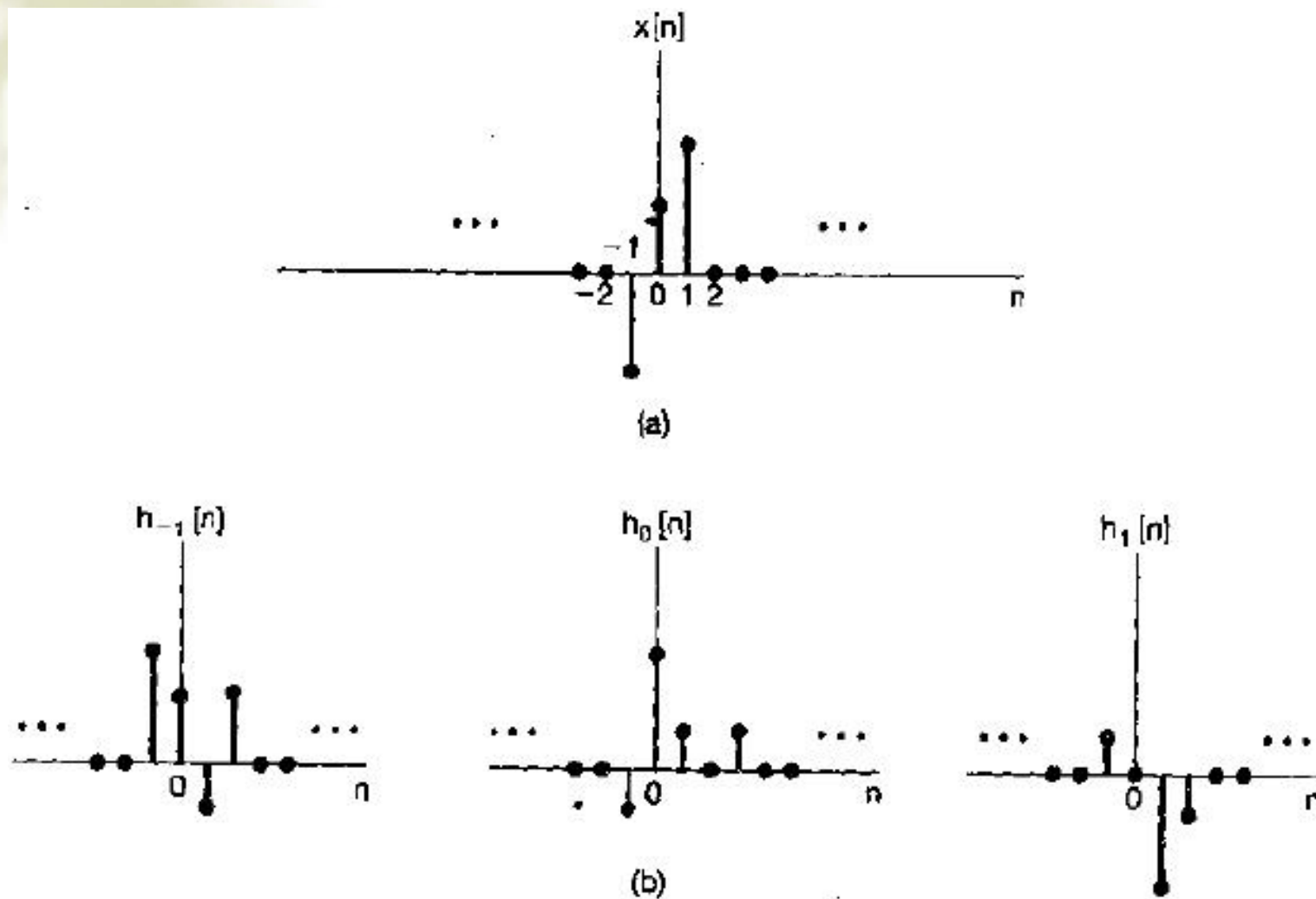
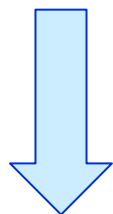
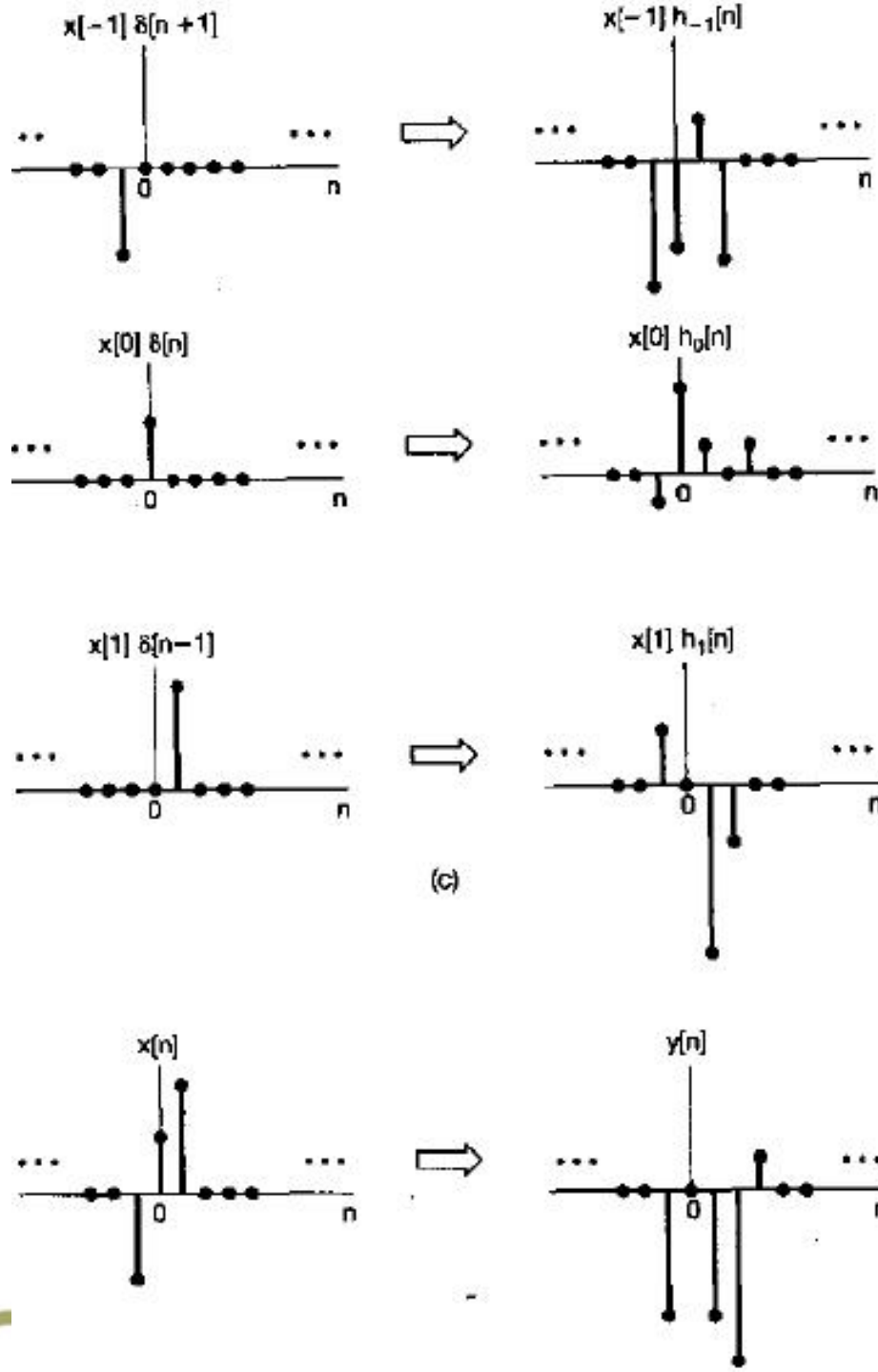


图 2.2 由(2.3)式表示的离散时间线性系统响应的图解表示

$$\begin{aligned}
 x[n] &= x[-1]\delta[n+1] \\
 &+ x[0]\delta[n] \\
 &+ x[1]\delta[n-1]
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 y[n] &= x[-1]h_{-1}[n] \\
 &+ x[0]h_0[n] \\
 &+ x[1]h_1[n]
 \end{aligned}$$



❖ 一般说来，在线性系统中，对于不同的 k 值，其响应 $h_k[n]$ 相互之间是没必要非有什么关系不可。但是若该系统也是**时不变**的，就有：因为 $\delta[n-k]$ 是 $\delta[n]$ 的时移，响应 $h_k[n]$ 也就是 $h_0[n]$ 的一个时移，即

$$h_k[n] = h_0[n-k]$$

为了简化符号，将 $h_0[n]$ 下标去掉，而定义系统**单位脉冲（样本）序列响应**为

$$h[n] = h_0[n]$$

也就是说， $h[n]$ 是LTI系统当输入为 $\delta[n]$ 时的输出。

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow h[n]$$

❖ 那么，对LTI系统来说，式2.3就变为

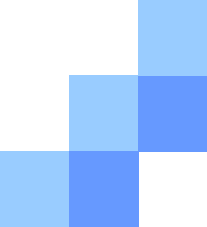
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad \text{式2.6}$$

式2.6又称为卷积和，其右边的运算称为 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的卷积，用符号记作

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

这意味着，既然一个LTI系统对任意输入的响应可以用系统对单位脉冲的响应来表示，那么LTI系统的单位脉冲响应就完全刻画了系统的特性。

💣 比较式2.6和式2.3，其区别就在于是否是LTI系统，在时刻 k 加入的输入 $x[k]$ 引起的响应 $x[k]h[n-k]$ 就是 $h[n]$ 移位并经加权的结果。



卷积和

卷积和

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

或者

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

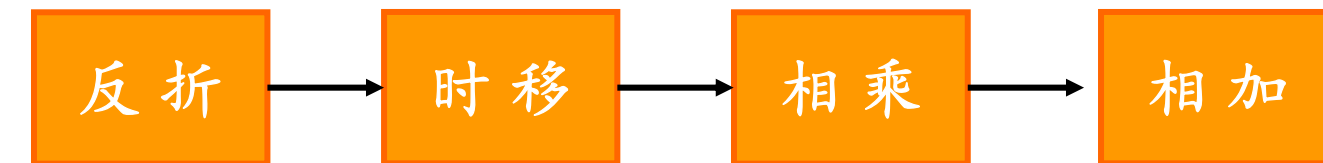
LTI系统的单位脉冲响应完全刻画了系统的特性

(3)如何计算卷积和

从卷积和的表达式：

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

可知，卷积和也要经过以下四个步骤：



动画

$$h[k] \rightarrow h[-k]$$

$$h[-k] \rightarrow h[n-k]$$

$$x[k]h[n-k]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

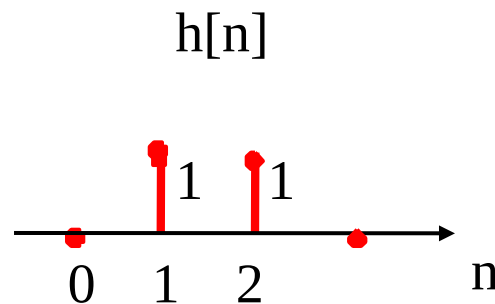
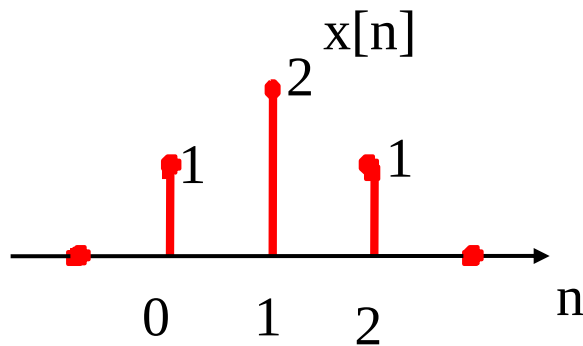
具体求解法有：

- 1) 图解法
- 2) 解析法
- 3) 利用多项式的乘、除法求解
- 4) 列表法

例题 2.1 2.22.3 2.4

1) 图解法

已知 $X[n]$ 和 $h[n]$, 求: $y[n] = x[n] \cdot h[n]$



将 $x[n]$ 和 $h[n]$ 的自变量换成 k 。

(1) 反折: $h[k] \rightarrow h[-k]$

(2) 时移: $h[-k] \rightarrow h[n-k]$

(3) 相乘、求和:

当 $n-1 < 0$ 时, 即 $n < 1$ 时, $y[n] = 0$;

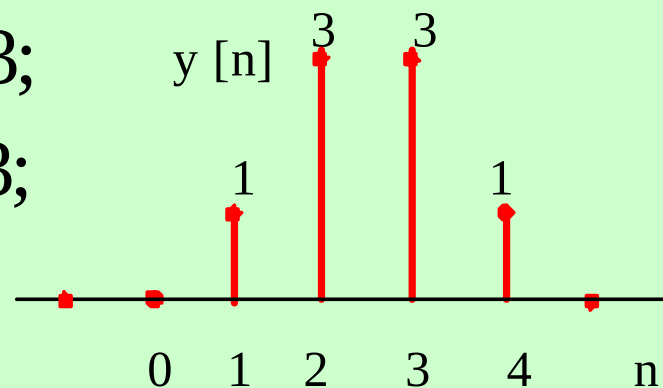
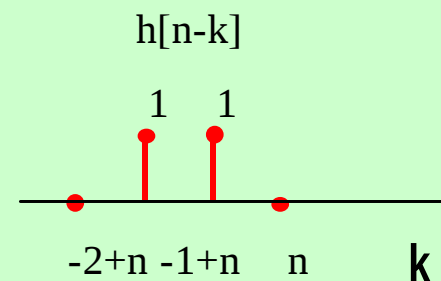
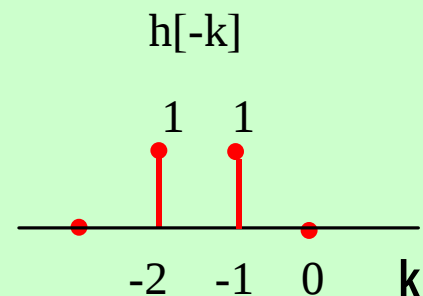
当 $n = 1$ 时, $y[n] = 1 \times 1 = 1$;

当 $n = 2$ 时, $y[n] = 1 \times 2 + 1 \times 1 = 3$;

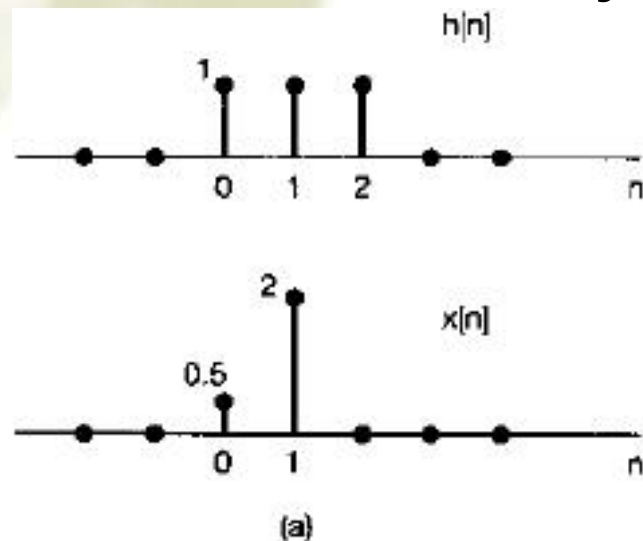
当 $n = 3$ 时, $y[n] = 1 \times 1 + 1 \times 2 = 3$;

当 $n = 4$ 时, $y[n] = 1 \times 1 = 1$ 。

当 $n > 4$ 时, $y[n] = 0$;



例1 (2-1) : LTI系统, 其单位脉冲响应 $h[n]$, 输入为 $x[n]$, 求输出 $y[n]$ 。



$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$\begin{aligned} y[n] &= x[0]h[n-0] + x[1]h[n-1] \\ &= 0.5h[n] + 2h[n-1] \end{aligned}$$

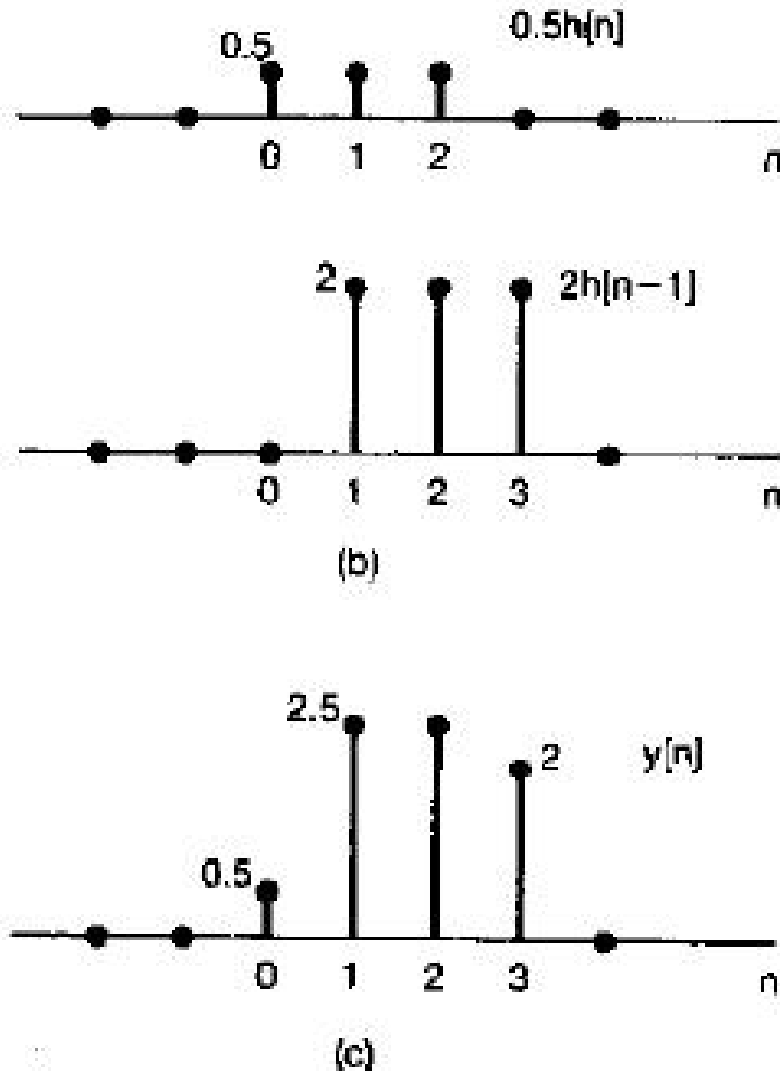
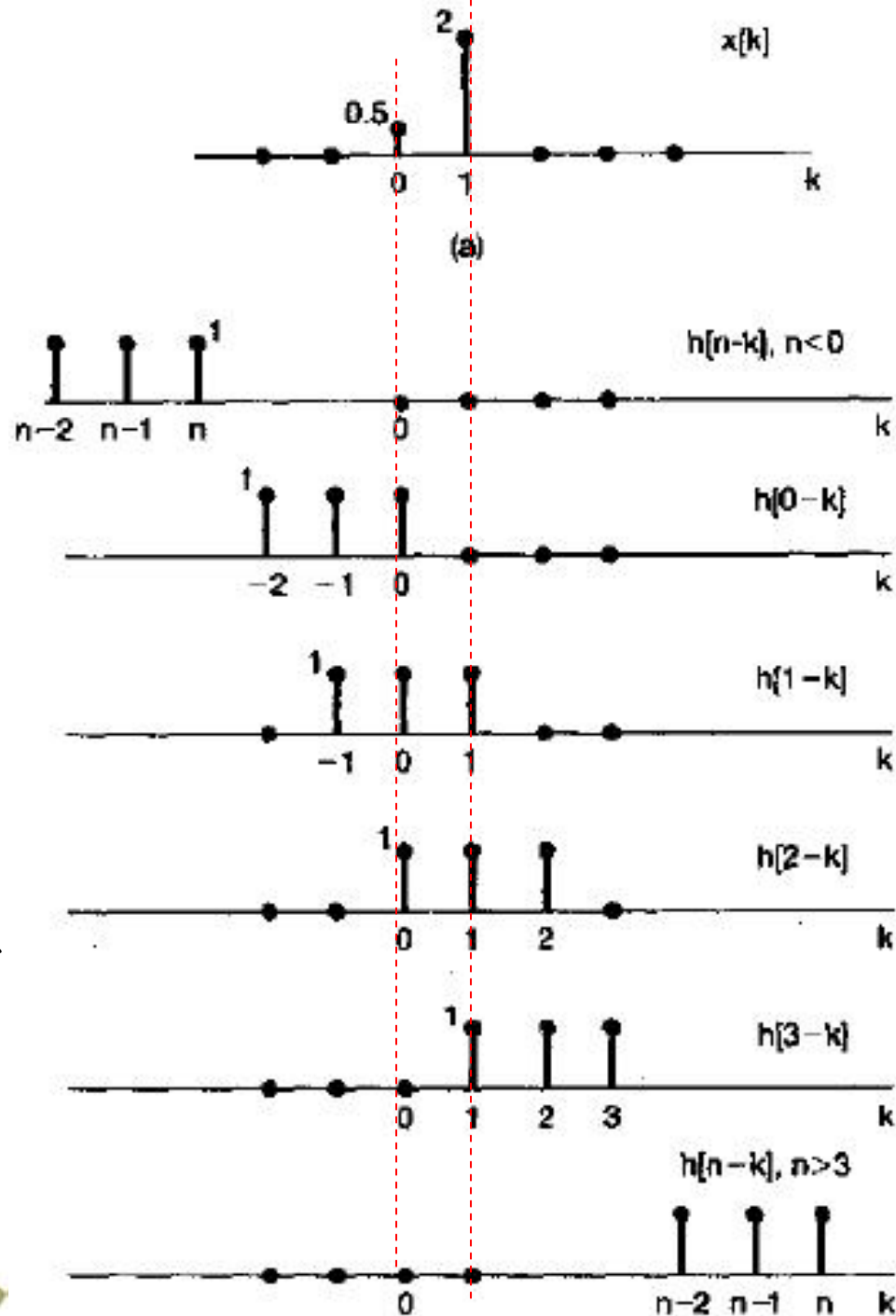


图 2.3 (a) LTI 系统的单位脉冲响应 $h[n]$ 及其输入 $x[n]$;
(b) 对 $x[0]=0.5$ 和 $x[1]=2$ 的响应;
(c) 总的响应 $y[n]$ 就是 (b) 的和

❖ 我们换一个角度思考问题，若将信号 $x[k]$ 和 $h[n-k]$ 看作 k 的函数，而 $h[n-k]$ 可看作是信号 $h[k]$ 经反转时移后的信号，在 $h[-k]$ 基础上 $n>0$ 时右移 n ， $n<0$ 时左移 n 。将它们相乘就得到序列 $g[k]=x[k]h[n-k]$ 。卷积运算就可以用序列 $h[n-k]$ 沿着 $x[k]$ “滑动”来说明，在 n 的定义域上，对全部 k 值将乘积相加。

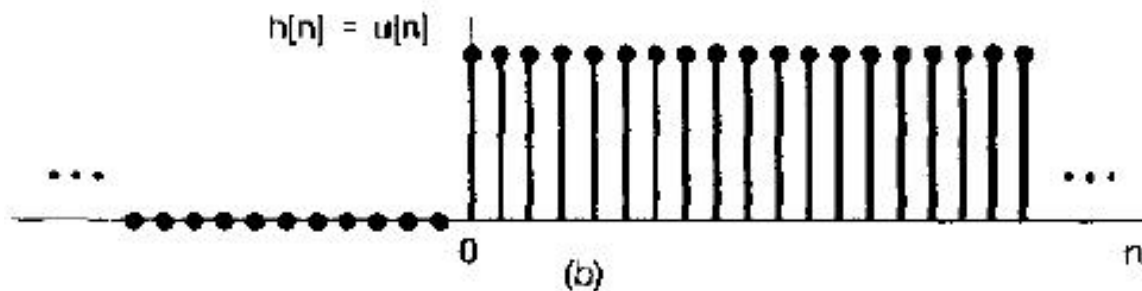
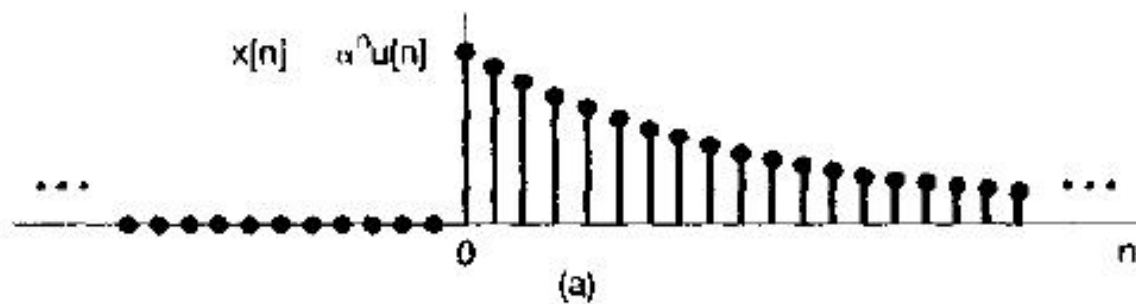


例2 (2-3) : 已知输入 $x[n]$ 和单位脉冲响应 $h[n]$, 求 $y[n]$ 。

$$x[n] = \alpha^n u[n] \quad 0 < \alpha < 1$$

$$h[n] = u[n]$$

解： 当 $n < 0$ 时，
 $y[n] = 0$



当 $n \geq 0$ 时,

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

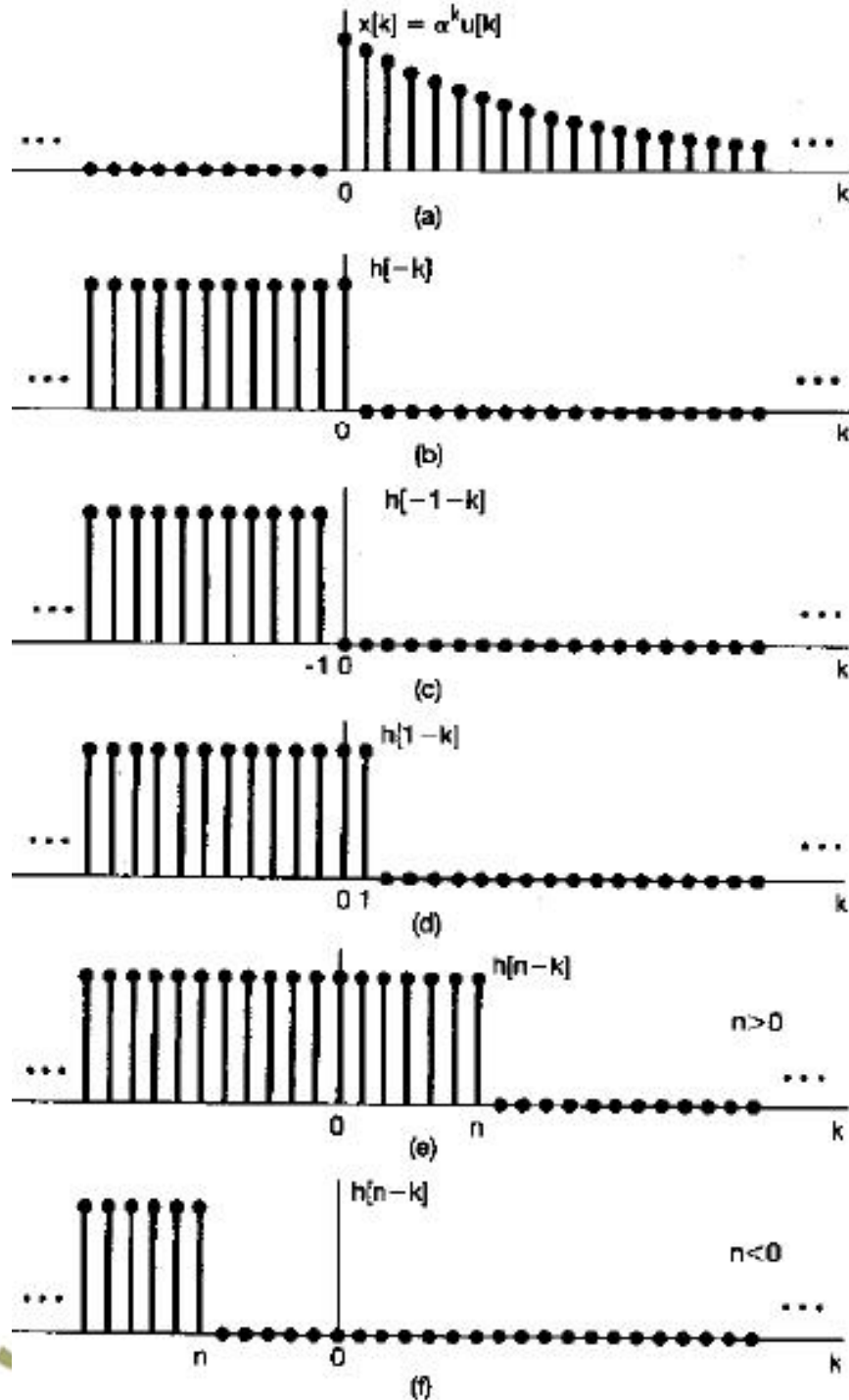
$$= \sum_{k=0}^n x[k]h[n-k]$$

$$= \sum_{k=0}^n \alpha^k$$

$$= \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

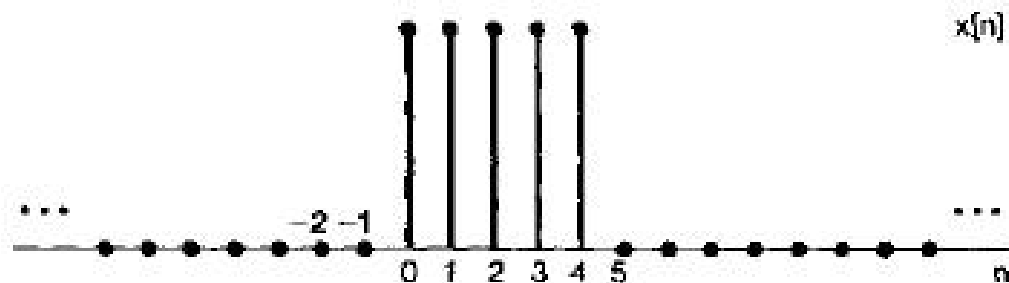
对全部 n 就有

$$y[n] = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha} u[n]$$

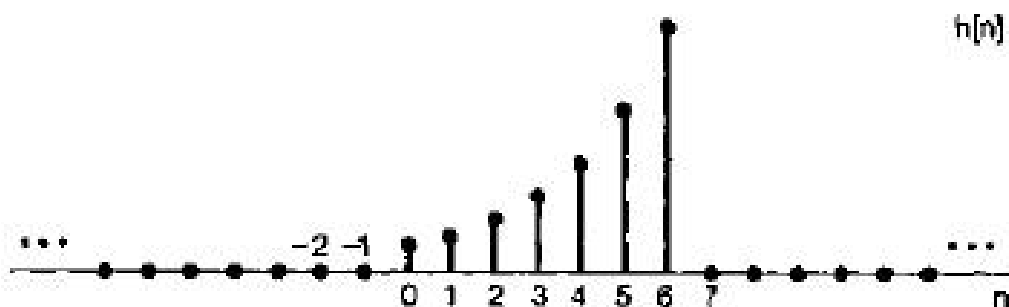


例3 (2-4) : 已知LTI系统, $x[n]$ 和 $h[n]$, 求 $y[n]$ 。

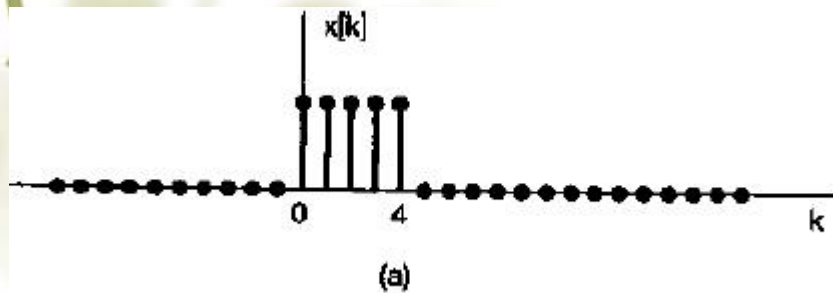
$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值} \end{cases} \quad h[n] = \begin{cases} \alpha^n, & \alpha > 1, 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{其余 } n \text{ 值} \end{cases}$$



(a)



(b)



解：对 n 分五个区间讨论

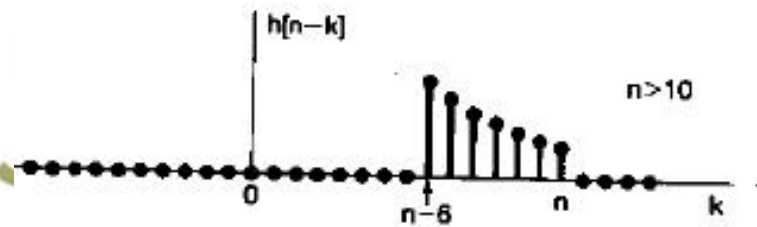
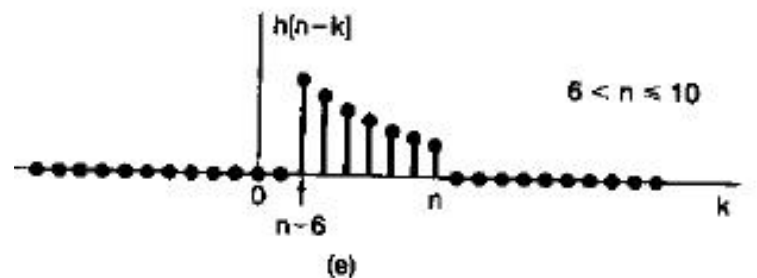
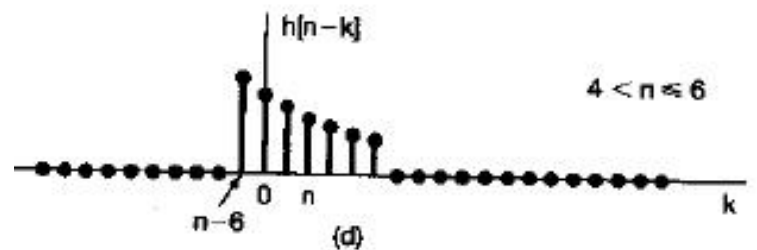
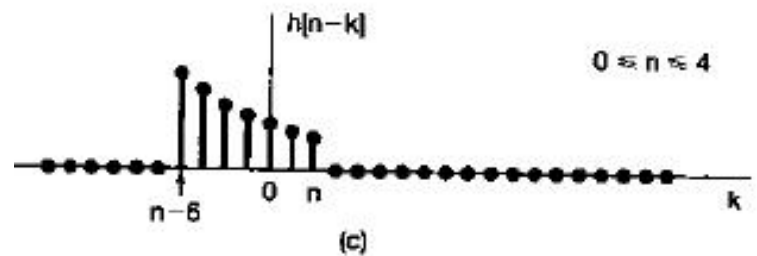
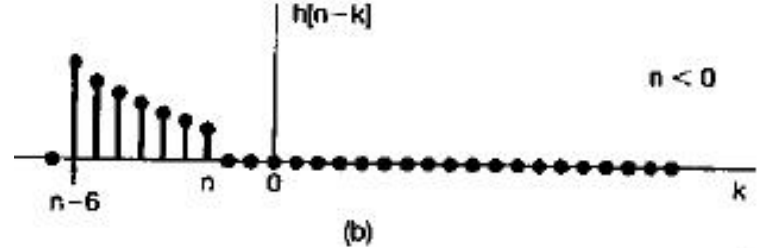
$$n < 0$$

$$0 \leq n \leq 4$$

$$4 < n \leq 6$$

$$6 < n \leq 10$$

$$n > 10$$



例4 (2-5) : 已知LTI系统, $x[n]$ 和 $h[n]$, 求 $y[n]$ 。

$$x[n] = 2^n u[-n]$$

$$h[n] = u[n]$$

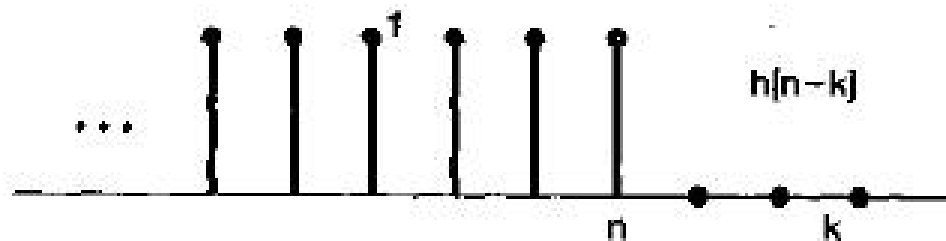
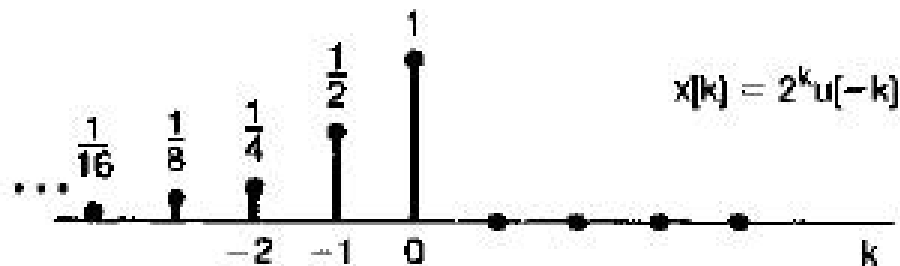
解：先得出序列 $x[k]$
和 $h[n-k]$,

$$g[k] = x[k]h[n-k]$$

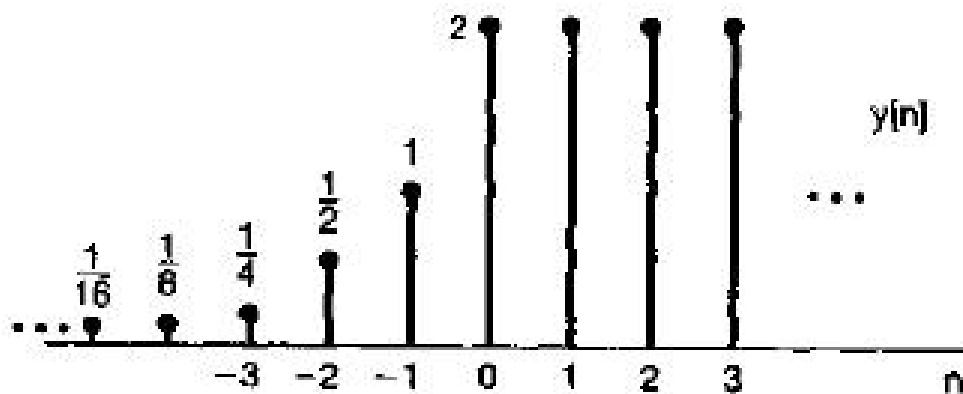
讨论：

$$n \geq 0$$

$$n < 0$$



(a)

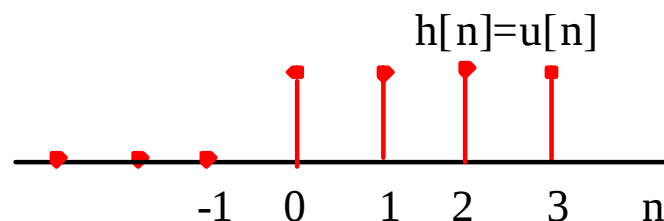
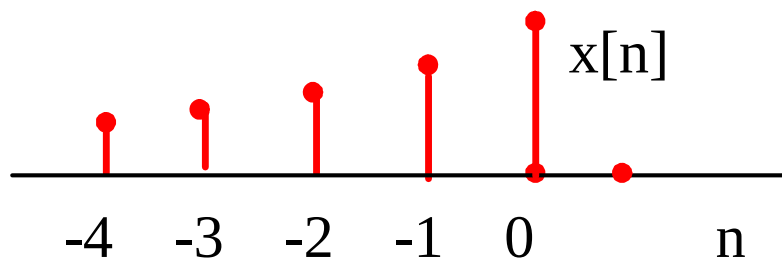


(b)

图 2.11 (a)例 2.5 中的序列 $x[k]$ 和 $h[n-k]$; (b)输出结果 $y[n]$

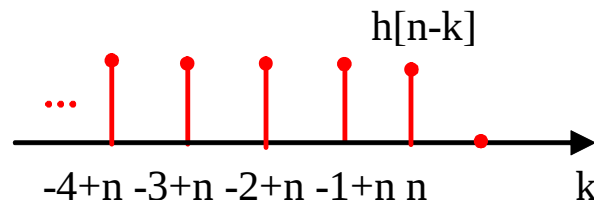
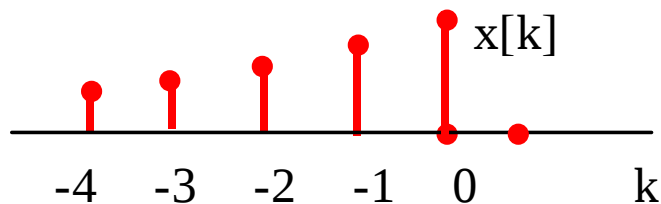
2) 解析式法-例4 (2-5)

例: 已知: $x[n] = 2^n u[-n]$, $h[n] = u[n]$. 求 $y[n] = x[n] * h[n]$.



解: 当 $n < 0$ 时, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n 2^k = 2^{n+1}$.

当 $n > 0$ 时, $y[n] = \sum_{k=-\infty}^0 2^k = 2$.



3) 多项式相乘法

$$\text{已知: } x_1[n] = 2\delta[n] + \delta[n-1] + 4\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$x_2[n] = 3\delta[n] + \delta[n-1] + 5\delta[n-2]$$

$$\text{求卷积: } y[n] = x_1[n] * x_2[n]$$

$$\text{解: } x_1[n] = \{2, 1, 4, 1\}, n = 0, 1, 2, 3; \quad x_2[n] = \{3, 1, 5\}, n = 0, 1, 2$$

$$\begin{array}{r} \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & \\ \hline 10 & 5 & 20 & 5 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 12 & 3 \\ \hline 6 & 5 & 23 & 12 & 21 & 5 \end{array} \end{array}$$

$$y[n] = \{6, 5, 23, 12, 21, 5\}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

上面的这个表达式还不完整，还没有确定 $y[n]$ 的定义域。一般，对于一个定义为 $[n_1, n_2]$ 的序列 $x[n]$ 以及 $[n_3, n_4]$ 的序列 $h[n]$, $h[n-k]$ 的定义域为：

$$[n - n_4, n - n_3] \quad \text{即}$$

$$\left. \begin{array}{l} n - n_3 \geq n_1 \\ n - n_4 \leq n_2 \end{array} \right\} \Rightarrow n_1 + n_3 \leq n \leq n_2 + n_4 \quad \text{故：} y[n] \text{ 的定义域为 } [n_1 + n_3, n_2 + n_4]$$

上面这道例题，其中 $n_1=0$, $n_2=3$, $n_3=0$, $n_4=2$, 则其定义域为 $[0, 5]$ 。

$$\text{即：} y[n] = \{6, \quad 5, \quad 23, \quad 12, \quad 21, \quad 5 \}, \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$x[n]$ 定义在 $[n_1, n_2]$, 以及 $h[n]$ 定义在 $[n_3, n_4]$ 上。若定义 $x[n]$ 的序列长度为 N_x , $h[n]$ 的序列长度为 N_h , $y[n]$ 的长度为 N_y , 则

$$N_x = n_2 - n_1 + 1 \quad N_h = (n_4 - n_3 + 1)$$

又 $\because y[n]$ 的定义域为 $[n_1 + n_3, n_2 + n_4]$

$$\begin{aligned} \text{则 } N_y &= n_2 + n_4 - n_1 - n_3 + 1 = (n_2 - n_1 + 1) \\ &\quad + (n_4 - n_3 + 1) - 1 = N_x + N_h - 1 \end{aligned}$$

4) 列表法

❖ 例：已知两个序列分别为：

$$x[n]=\{2,1,4,1\}, n=0,1,2,3$$

$$h[n]=\{3,1,5\}, n=0,1,2$$

❖ 求卷积和： $y[n]=x[n]*h[n]$

解卷积运算

在许多信号处理的实际问题中，需要做解卷积运算，即已知 $x[n]$ 或 $h[n]$ ， $y[n]$ ，求 $h[n]$ 或 $x[n]$ 。

解卷积运算可以用长除法来进行。仍举上面的例子进行说明。

$$y[n] = \{6, 5, 23, 12, 21, 5\}, n = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$x[n] = \{2, 1, 4, 1\}, n = 0, 1, 2, 3;$$

求 $h[n]$ 。

							3	1	5
2	1	4	1	6	5	23	12	21	5
				6	3	12	3		
					2	11	9	21	
					2	1	4	1	
						10	5	20	5
						10	5	20	5

作业

P₉₈₋₉₉

2.1 2.3 2.5 2.7

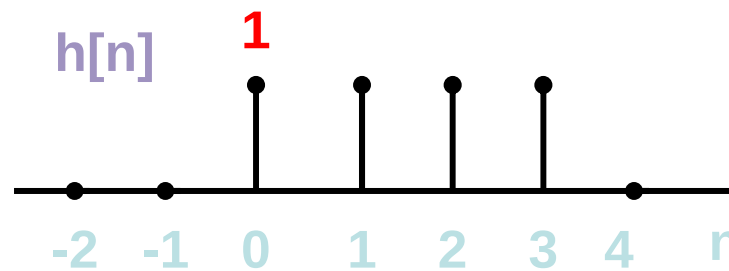
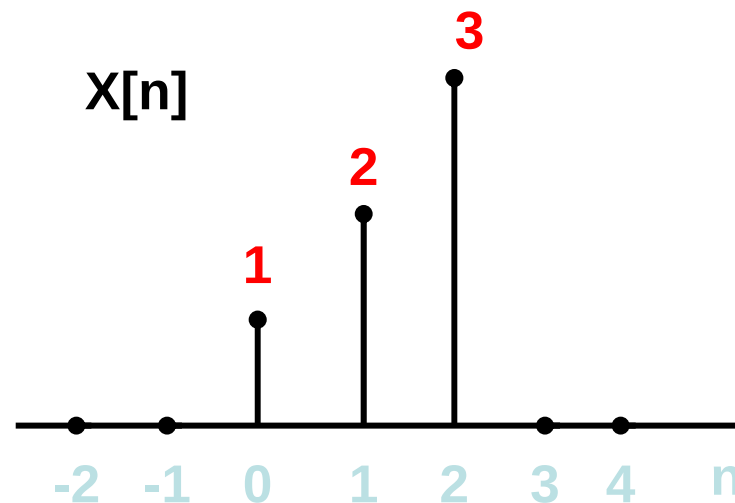
课堂练习

已知:

$$x[n] = \begin{cases} n+1 & n=0,1,2 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1 & n=0,1,2,3 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

求: $y[n] = x[n] * h[n]$



2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

2.2.1 用冲激表示连续时间信号

定义 $\delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

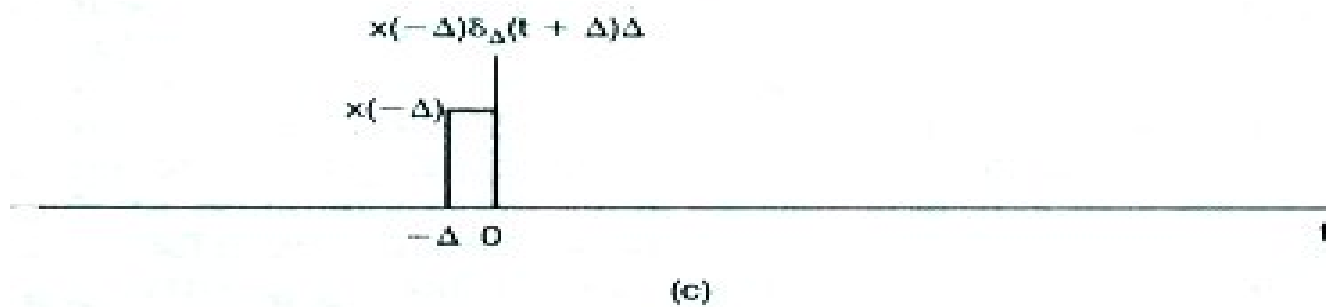
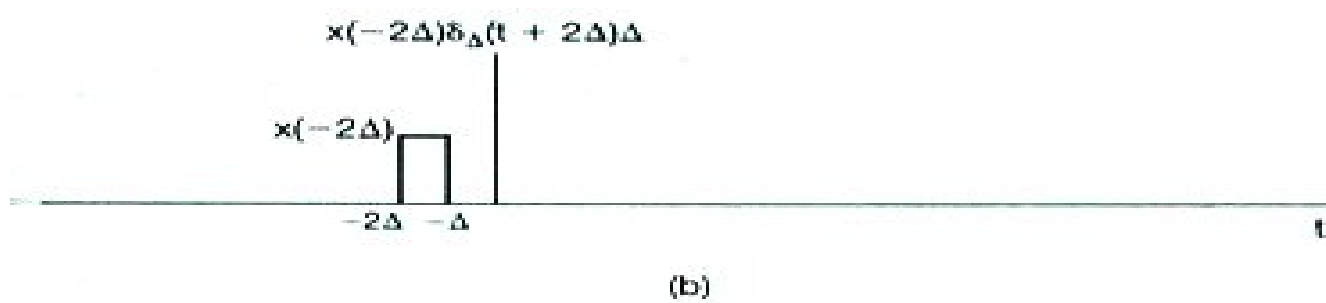
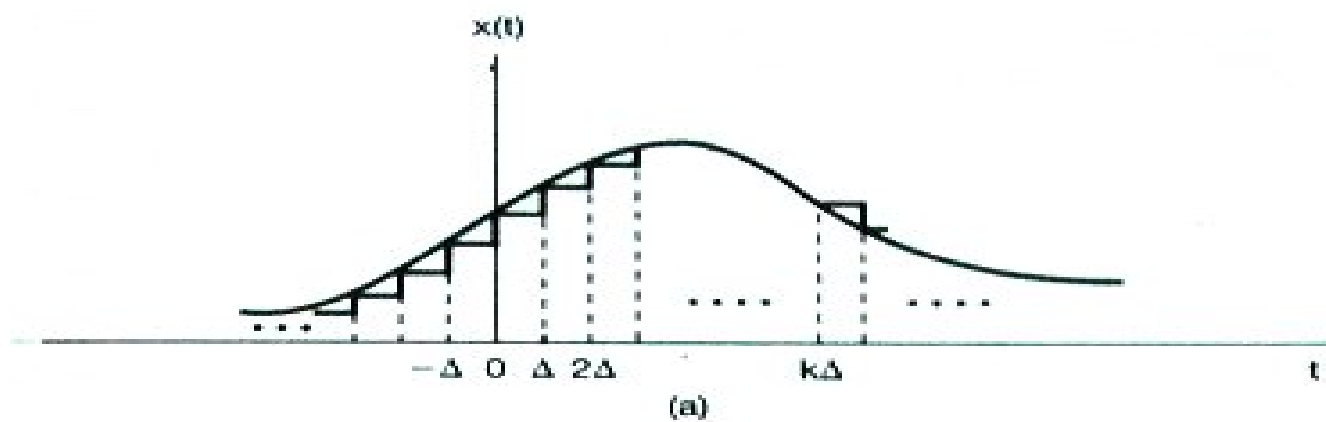
有如下表达式：

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

因此：

$$x(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k\Delta) \cdot \Delta \cdot \delta_{\Delta}(t - k\Delta)$$

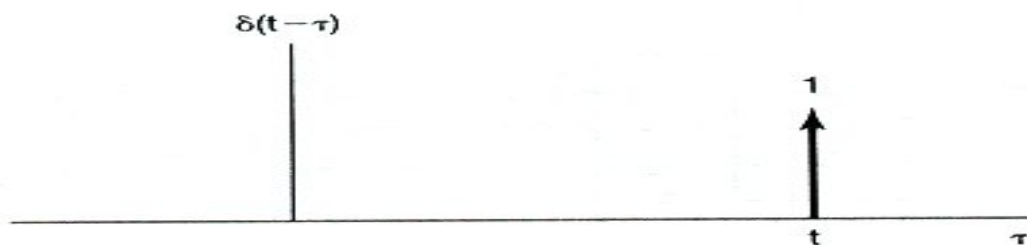
信号分解动画



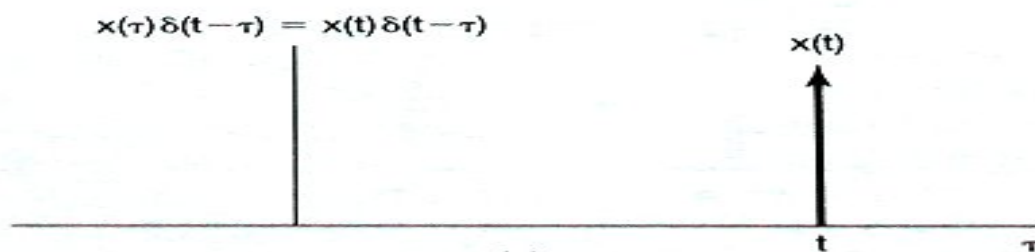
或者
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$



(a)



(b)



(c)

2.2.2 连续LTI系统的单位冲激响应及卷积积分表示

(1) 单位冲激响应



(2) 卷积积分





因为

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau$$

所以有

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

或者 **$y(t) = x(t) * h(t)$**

2.2.2 连续时间LTI系统的单位冲激响应及卷积积分表示

❖ 连续时间LTI系统的单位冲激响应 $h(t)$:

$$\delta(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow h(t)$$

❖ 对比离散时间LTI系统的单位冲激响应 $h[n]$:

$$\delta[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow h[n]$$

❖ 对比离散时间LTI系统的卷积积分：

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow y[n]$$
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$
$$y[n] = x[n] * h[n]$$

💣 连续时间LTI系统的卷积积分：

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow y(t)$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
$$y(t) = x(t) * h(t)$$

反转: $h(\tau) \longrightarrow h(-\tau)$

时移: $h(-\tau) \longrightarrow h(t-\tau)$

相乘: $x(\tau)h(t-\tau)$

相加:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Example 2.6 2.8

卷积积分动画

例1 (2-6) : 设某一LTI系
输入为 $x(t)$, 其单位冲激
响应为 $h(t)$

$$x(t) = e^{-at}u(t), a > 0$$

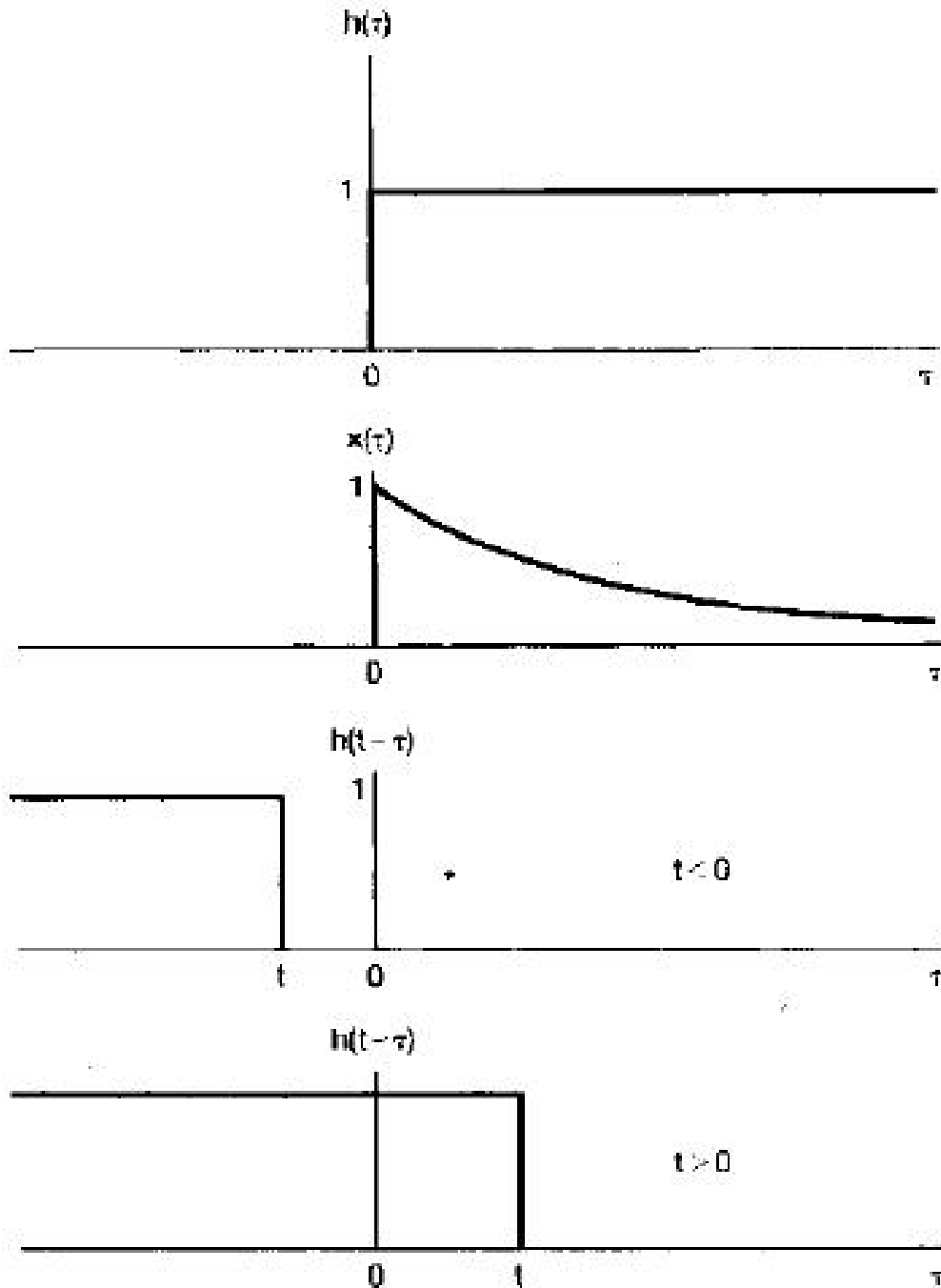
$$h(t) = u(t)$$

解: 图解法求卷积

$t < 0$ 时, $y(t) = 0$

$t > 0$ 时, 有

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{其余 } \tau \text{ 值} \end{cases}$$

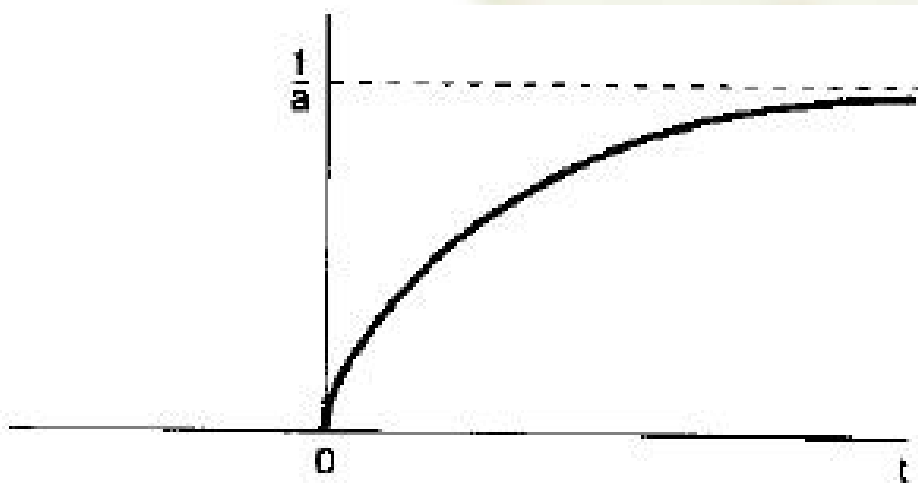


由该式可算出 $t>0$ 时

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\&= \int_0^t e^{-a\tau}d\tau \\&= \frac{1}{a}(1-e^{-at})\end{aligned}$$

因此，对于全部 t ， $y(t)$ 是

$$y(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$



卷积积分的图解法

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

可根据 $x(t)$ 、 $h(t)$ 求 $y(t)$:

- 1) 画出 $x(t)$ 与 $h(t)$ 的波形，并将时间轴 t 换成 τ ，得 $x(\tau)$ 与 $h(\tau)$;
- 2) **反折** 将波形 $h(\tau)$ 绕纵坐标反折，得 $h(-\tau)$;
- 3) **时移** 给定一个 t_1 值，将波形 $h(-\tau)$ 沿 τ 轴平移 $|t_1|$ 。
 $t_1 < 0$ 时，波形左移； $t_1 > 0$ 时，波形右移。

- 4) **相乘** 将时移后的 $h(t_1-\tau)$ 乘以 $x(\tau)$, 得被积函数 $x(\tau)h(t_1-\tau)$;
- 5) **卷积积分** 计算乘积信号 $x(\tau)h(t_1-\tau)$ 波形与 τ 轴之间的净面积, 得卷积在 t_1 时刻的值;

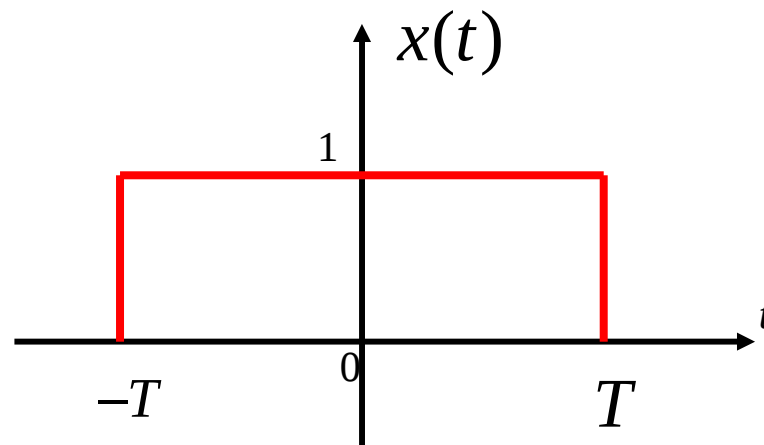
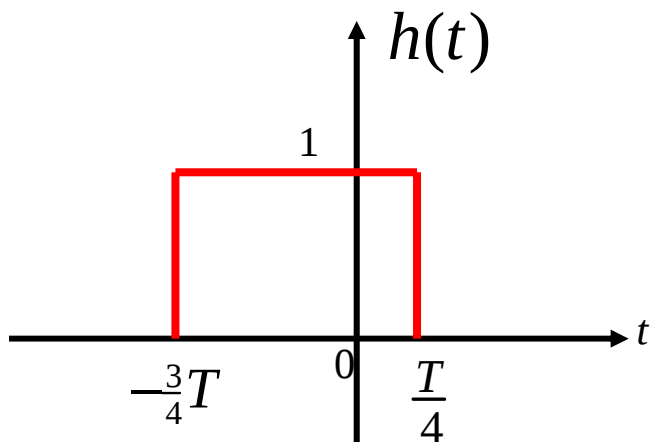
$$y(t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t_1 - \tau)d\tau$$

- 6) 以 t_1 为参变量, 将波形 $h(t-\tau)$ 连续地沿 τ 轴平移, 就得到任意时刻 t 的卷积积分, 即:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

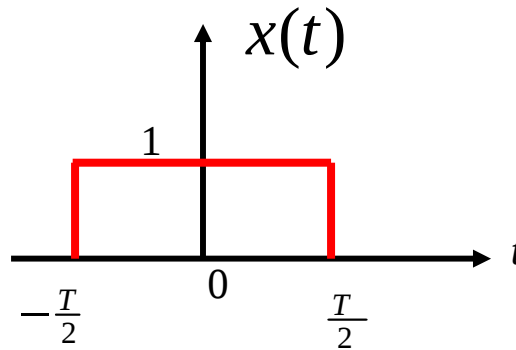
例：

- 设信号 $x(t)$ 和 $h(t)$ 分别如图所示。求 $y(t)=x(t)*h(t)$ ，并画出 $y(t)$ 的波形。

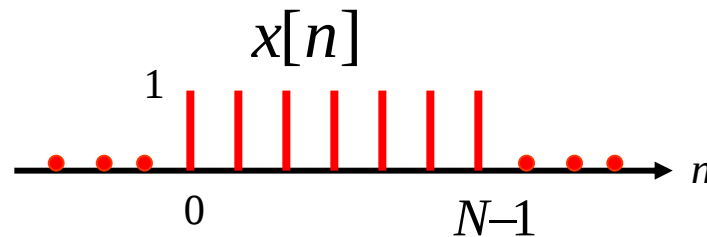


课堂作业

❖ 已知： $x(t)$ 的波形。用图解法求 $y(t)=x(t)*x(t)$ ，画出 $y(t)$ 波形。



❖ 已知： $x[n]$ 的波形。求 $y[n]=x[n]*x[n]$ ，画出 $y[n]$ 波形。

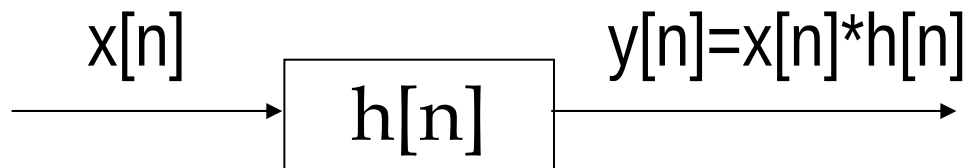
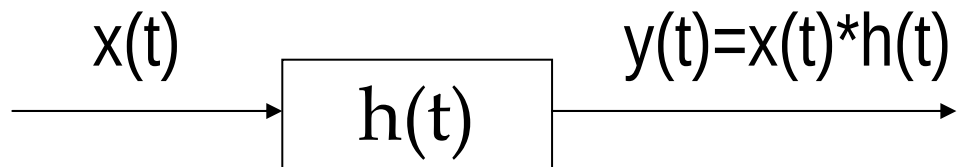


2.3 LTI系统性质

系统:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n - k]$$

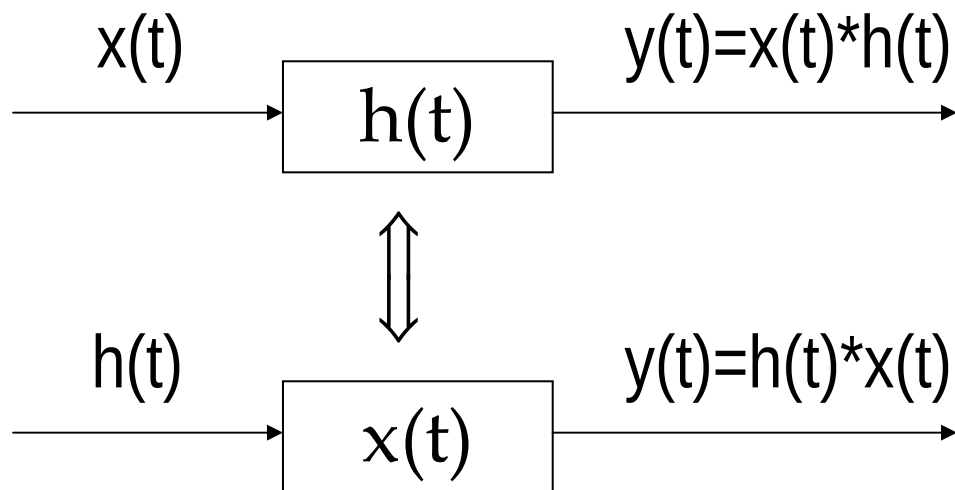


- 交换律
- 分配律
- 结合律
- 有记忆和无记忆
- 可逆性
- 因果性
- 稳定性

2.3.1 交换律

离散时间: $x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$

连续时间: $x(t)*h(t)=h(t)*x(t)$



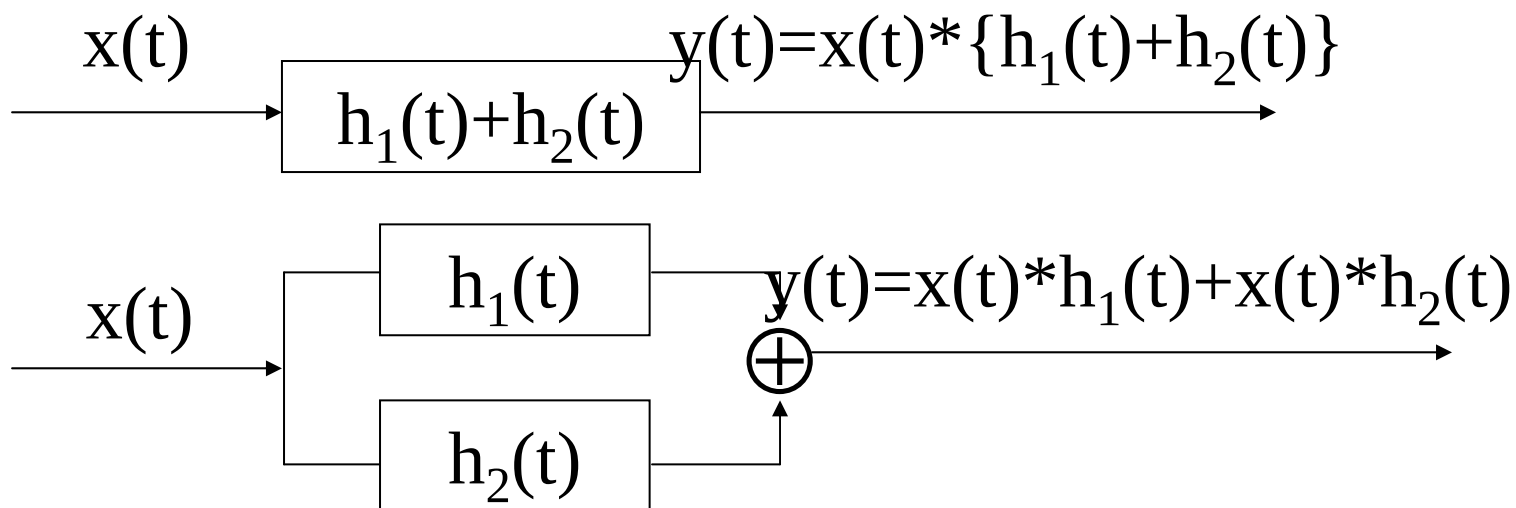
2.3.2分配律

离散时间:

$$x[n]*\{h_1[n]+h_2[n]\}=x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

连续时间:

$$x(t)*\{h_1(t)+h_2(t)\}=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



Example 2.10

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+2^n u[-n], h[n]=u[n]$$

2.3.2 分配律性质

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$$

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$$

分配律在系统互联中有一个很有用的解释。右图(a)中示出两个连续时间LTI系统的并联，图(a)中方框内都给出了它们的单位冲激响应。这再次**强调了一个LTI系统是完全由它的冲激响应来表征的。**

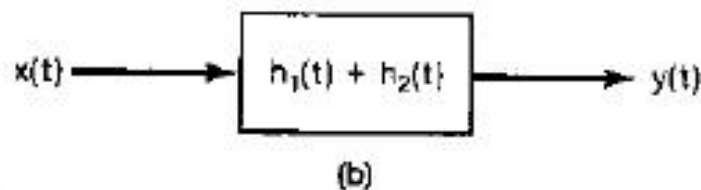
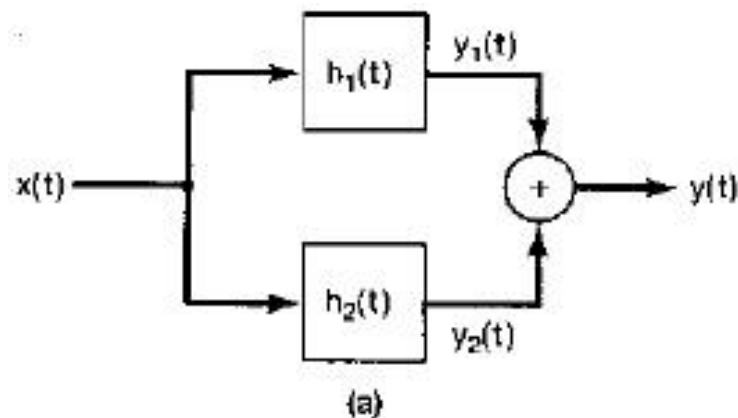


图 2.23 LTI 系统并联中卷积分配律的说明

- ❖ 这两个系统，具有相同的输入，其单位冲激响应为 $h_1(t)$ 和 $h_2(t)$ ，而输出相加。因为

$$y_1(t) = x(t) * h_1(t)$$

$$y_2(t) = x(t) * h_2(t)$$

整个图2.23(a)的输出

$$y(t) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \quad \text{式2.48}$$

而图2.3(b)的输出

$$y(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad \text{式2.49}$$

根据分配律，式2.48和式2.49完全一样的。

- ❖ LTI系统的并联，可以用一个单一的LTI系统来代替，而该系统的单位冲激响应就是在并联联结中各个单位冲激响应的和。

❖ 同时，由于分配律和交换律，就有

$$[x_1(t) + x_2(t)] * h(t) = x_1(t) * h(t) + x_2(t) * h(t)$$

说明：LTI系统对两个（多个）输入和的响应就等于系统对单个输入响应的和。

❖ 由于卷积的分配律，可以将一个复杂的卷积分为几个较为简单的卷积来求解。

例（2-10）： $y[n]$ 是下面两个序列的卷积：

$$x[n] = (1/2)^n u[n] + 2^n u[-n] \qquad h[n] = u[n]$$

解：令 $x_1[n] = (1/2)^n u[n]$, $x_2[n] = 2^n u[-n]$

$$\text{所以, } y[n] = x[n] * h[n]$$

$$= x_1[n] * h[n] + x_2[n] * h[n]$$

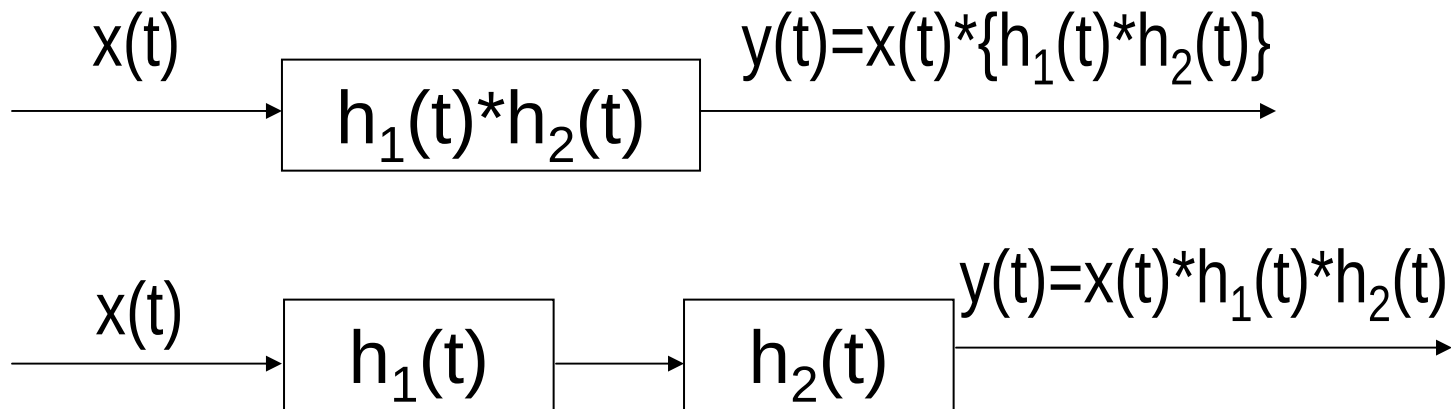
2.3.3 结合律性质

离散时间:

$$x[n] * \{h_1[n] * h_2[n]\} = \{x[n] * h_1[n]\} * h_2[n]$$

连续时间:

$$x(t) * \{h_1(t) * h_2(t)\} = \{x(t) * h_1(t)\} * h_2(t)$$



2.3.3 结合律性质

$$\begin{aligned}x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \\ = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t)\end{aligned}$$

❖ 按什么顺序来卷积这些信号是没有关系的

在图2.25(a)中

$$\begin{aligned}y[n] &= w[n] * h_2[n] \\ &= (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]\end{aligned}$$

在图2.25(b)中

$$\begin{aligned}y[n] &= x[n] * h[n] \\ &= x[n] * (h_1[n] * h_2[n])\end{aligned}$$

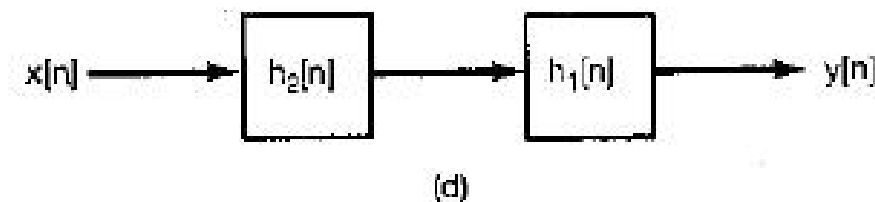
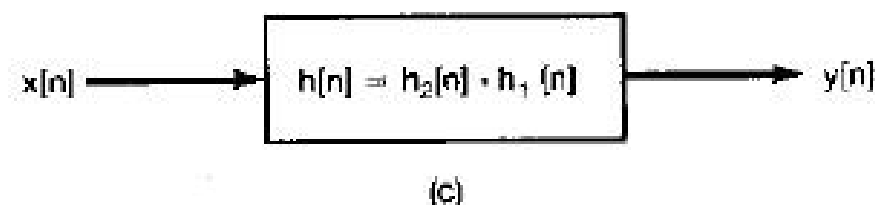
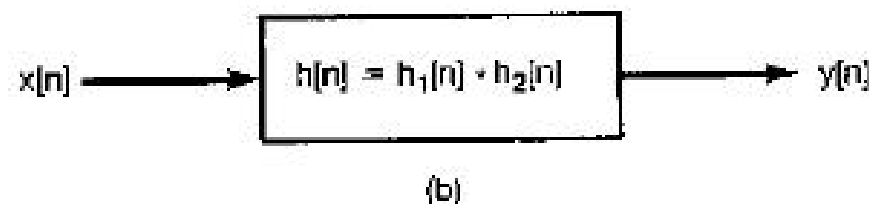
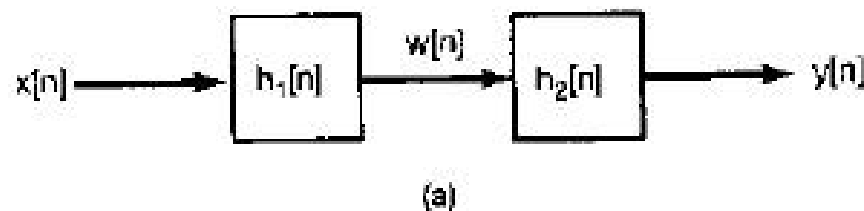


图 2.25 卷积的结合律性质及结合律与交换律性质对 LTI 系统级联的意义

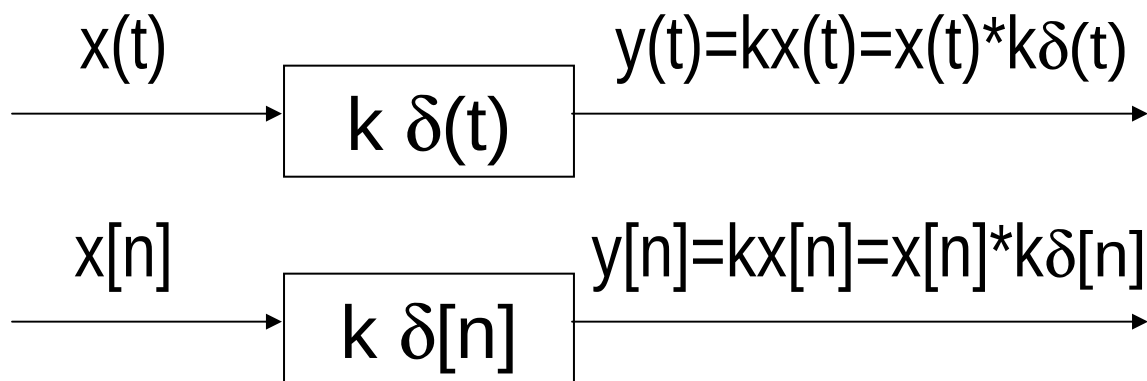
- ❖ 根据结合律，图2.25(a)两个系统的级联就等效于图2.25(b)中的单一系统。即两个LTI系统级联后的冲激响应就是它们单个冲激响应的卷积。这一结果一般化到任意多个LTI系统的级联。
- ❖ 图2.25(c)(d)是根据结合律，改变级联系统中的卷积次序。LTI系统级联特性，其总系统响应与系统级联次序无关。但对非LTI系统则未必成立。
- ❖ 例如，有两个无记忆系统，一个是将输入乘以2，另一个是将输入平方，那么先乘2再平方，就得 $y[n]=4x^2[n]$ 。若先平方再乘2，即改变级联次序，则得到 $y[n]=2x^2[n]$ 。

2.3.4有记忆和无记忆LTI系统

无记忆系统:

离散时间: $y[n]=kx[n]$, $h[n]=k\delta[n]$

连续时间: $y(t)=kx(t)$, $h(t)=k\delta(t)$



应用: $x(t)*\delta(t)=x(t)$ 和 $x[n]*\delta[n]=x[n]$

2.3.4 有记忆和无记忆LTI系统

由交换律知道，离散时间LTI系统

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

若这个系统是无记忆系统这一命题成立的话，就只有：对 $n \neq 0$ ， $h[n]=0$ 。令 $h[0]=K$ 是一个常数，这时，其单位脉冲响应为

$$h[n] = K\delta[n]$$

卷积和为

$$y[n] = Kx[n]$$

若一个离散时间LTI系统，它的单位脉冲响应 $h[n]$ 对于 $n \neq 0$ 不是全为零的话，这个系统就是有记忆的。对连续时间LTI系统该命题同样成立。

- ❖ 对于无记忆的LTI系统，若 $K=1$ ，那么这些系统就变成了恒等系统，其输出等于输入，单位脉冲（冲激）响应等于单位脉冲（冲激）。

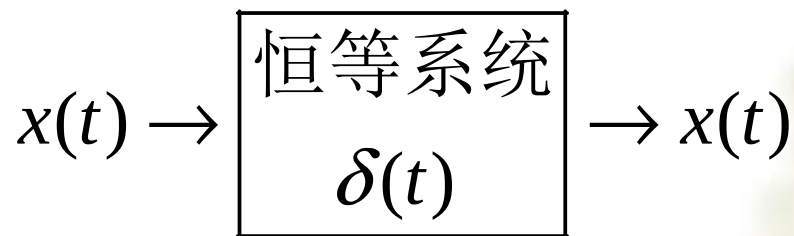
$$y[n] = Kx[n] = x[n] \quad y(t) = Kx(t) = x(t)$$

$$h[n] = K\delta[n] = \delta[n] \quad h(t) = K\delta(t) = \delta(t)$$

- ❖ 这时，卷积和和卷积积分公式就意味着

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

$$x(t) = x(t) * \delta(t)$$



例1：一离散时间LTI系统其单位冲激响应，判断该系统是否是无记忆系统

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1 \\ 0, & \text{其余} n \text{ 值} \end{cases}$$

解：其卷积和为

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \\ &= h[0]x[n] + h[1]x[n-1] \\ &= x[n] + x[n-1] \end{aligned}$$

所以，其输入—输出关系可看出，该系统不是无记忆系统。

2.3.5 LTI系统的可逆性

若LTI系统是可逆的，那么它就有有一个LTI的逆系统

(为什么这个逆系统就一定是LTI系统？习题2.50)

❖ 图2.26(a)的级联系统
就与图2.26(b)的恒等系统
(无记忆系统)一样。

总冲激响应

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

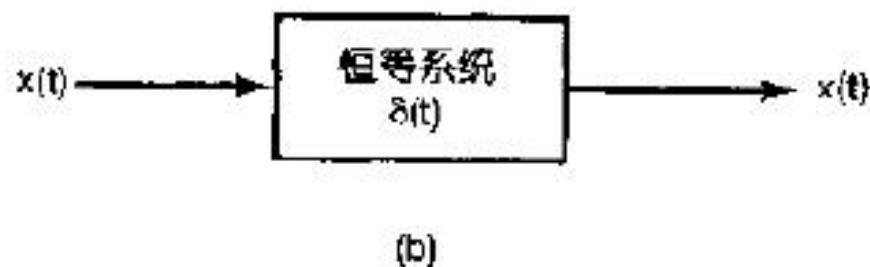
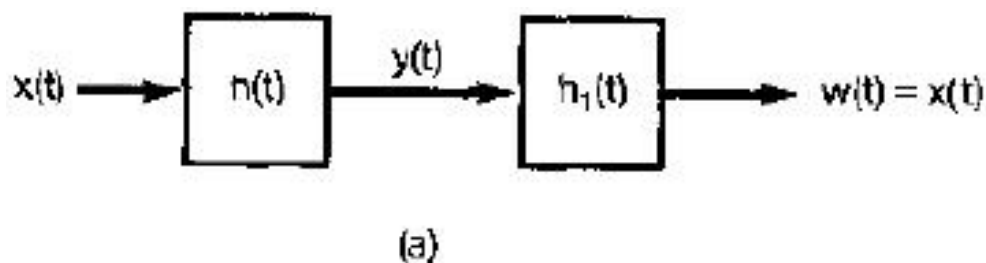
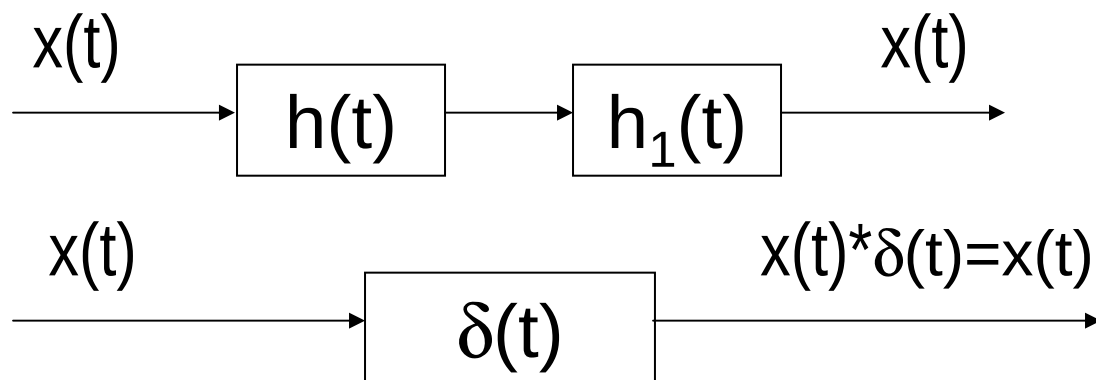


图 2.26 连续时间 LTI 系统的逆系统概念。如果 $h(t) * h_1(t) = \delta(t)$ ，冲激响应为 $h_1(t)$ 的系统就是冲激响应为 $h(t)$ 的系统的逆系统

2.3.5 LTI系统的可逆性

冲激响应: $h(t)$

逆冲激响应: $h_1(t)$



因此, 满足条件:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \text{ or } h[n] * h_1[n] = \delta[n]$$

Example 2.11 2.12

例 (2-12) : 有一LTI系统, 其单位脉冲响应为
 $h[n]=u[n]$, 判断其逆系统的单位脉冲响应 $h_1[n]$ 是否
满足

$$h[n]*h_1[n]=\delta[n]$$

解: 利用卷积和来计算该LTI系统对任意输入的响应:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]u[n-k]$$

因为, 对于 $n-k<0$, $u[n-k]=0$, 而在 $n-k\geq 0$, $u[n-k]=1$,

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

这其实就是我们以前曾遇到的系统: 累加器。该系统是可逆的, 其逆系统为

$$y[n]=x[n]-x[n-1]$$

现在我们来求这个逆系统的单位脉冲响应 $h_1[n]$ ，前面我们证明过，这个逆系统也是LTI系统，所以根据

$$x[n] = x[n] * \delta[n]$$

令 $x[n] = \delta[n]$ ，带入 $y[n] = x[n] - x[n-1]$ ，有

$$\delta[n] * h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$$h_1[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$h[n]$ 和 $h_1[n]$ 是否是一对互为可逆的LTI系统的脉冲响应？经计算

$$\begin{aligned} h[n] * h_1[n] &= u[n] * \{\delta[n] - \delta[n-1]\} \\ &= u[n] * \delta[n] - u[n] * \delta[n-1] \\ &= u[n] - u[n-1] \\ &= \delta[n] \end{aligned}$$

2.3.6 LTI系统的因果性

一个因果系统的输出只决定于现在和过去的输入值。那么对于离散时间LTI系统是因果的，由卷积和知道

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$y[n]$ 就必须与 $k > n$ 的 $x[k]$ 无关。也就是要 $h[n-k]$ 在 $k > n$ 时都必须为零。

❖ 因果离散时间LTI系统的脉冲响应必须满足下面条件（充要条件）：

$$h[n] = 0, \quad n < 0$$

那么因果LTI系统的卷积和就为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]h[n-k] \quad y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} h[k]x[n-k]$$

❖ 更一般的情况如习题1.44所指出的，一个线性系统的因果性就等效于初始松弛条件，即如果一个线性因果系统的输入在某个时刻点以前是0，那么其输出在那个时刻以前也必然为0。

❖ 最后，虽然因果性只是系统的一个特性，但是一般也将 $n < 0$ 或 $t < 0$ 时为零的信号称之为因果信号。于是：一个LTI系统的因果性就等效于它的冲激响应是一个因果信号。

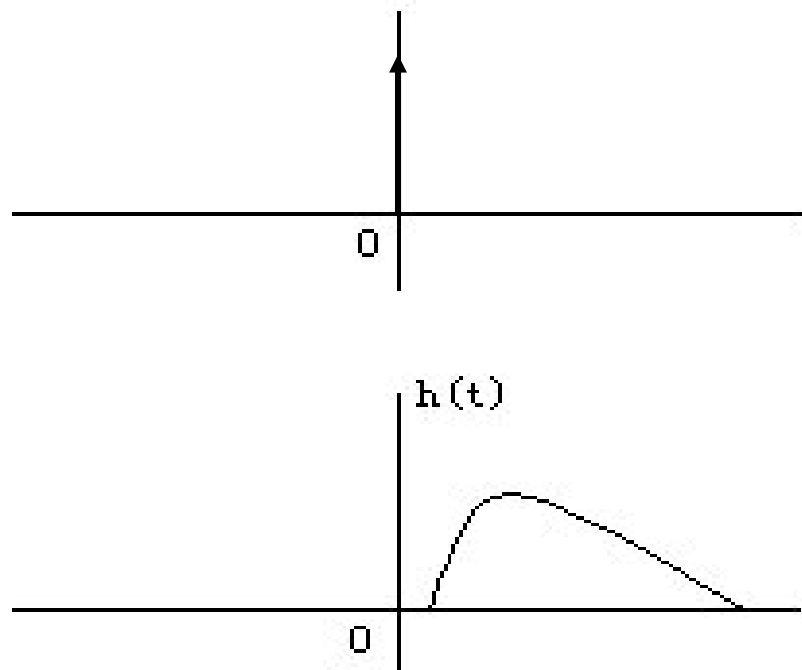
2.3.6 LTI系统的因果性

离散时间系统的冲激响应满足

$$h[n]=0, \quad n<0$$

连续时间系统的冲激响应满足

$$h(t)=0, \quad t<0$$



2.3.7 LTI系统的稳定性

稳定:每一个有界的输入, 其输出都是有界的。

(1) 离散系统:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \quad \text{或} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k]$$

如果 $|x[n]| < B$, 满足 $|y[n]| < A$ 的条件是: $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty$

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |x[n-k]| |h[k]| < B \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]|$$

$$\text{if } \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < +\infty, \quad \text{then} \quad |y[n]| < A$$

💣 所以，如果单位脉冲响应是**绝对可和**的，即

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |h[k]| < \infty \quad \text{式2.86}$$

那么 $y[n]$ 就是有界的，因此系统是稳定的。式2.86是一个离散时间LTI系统稳定性的充要条件。

💣 连续时间LTI系统稳定性的充要条件：单位冲激响应是**绝对可积**的，即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < \infty$$

如何得到？

(2) 连续时间系统

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{或} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

如果 $|x(t)| < B$, 满足 $|y(t)| < A$ 的条件是: $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty$

$$|y(t)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t-\tau)| |h(\tau)| d\tau < B \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau$$

$$\text{if } \int_{-\infty}^{+\infty} |h(\tau)| d\tau < +\infty, \quad \text{then } |y(t)| < A$$

Example 2.13

2.3.8 LTI系统的单位阶跃响应

到目前为止，我们利用单位脉冲响应或单位冲激响应来表征一个LTI系统，尤其是，由于 $h[n]$ 或 $h(t)$ 完全确定了一个LTI系统的特性，所以就能把象稳定性和因果性等这些系统性质与 $h[n]$ 或 $h(t)$ 的性质联系起来。

❖ 单位阶跃响应 $s[n]$ 或 $s(t)$ 也常用来描述一个LTI系统的特性。

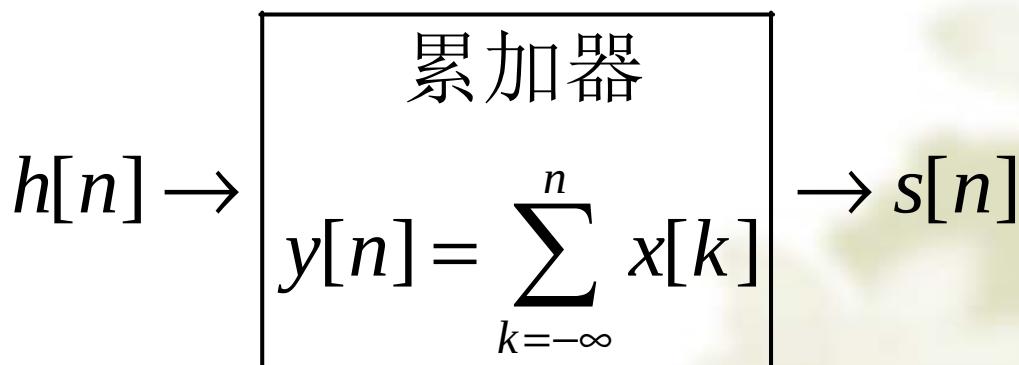
$$u[n] \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow s[n]$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{\text{LTI系统}} \rightarrow s(t)$$

❖ 根据卷积和的表示，一个离散时间LTI系统的阶跃响应

$$s[n] = u[n] * h[n]$$

然而，根据卷积的交换律， $s[n] = h[n] * u[n]$ ，因此 $s[n]$ 可以看成是输入为 $h[n]$ ，而系统的单位脉冲响应为 $u[n]$ 时的响应。由例2.12， $u[n]$ 是一个累加器的单位脉冲响应



❖ 一个离散时间LTI系统的单位阶跃响应就是其单位脉冲响应的求和函数

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k]$$

反之，一个离散时间LTI系统的单位脉冲响应就是它的单位阶跃响应的一次差分

$$h[n] = s[n] - s[n-1]$$

💣 同理，对于连续时间LTI系统来说，其单位阶跃响应就是它的单位脉冲响应的积分函数

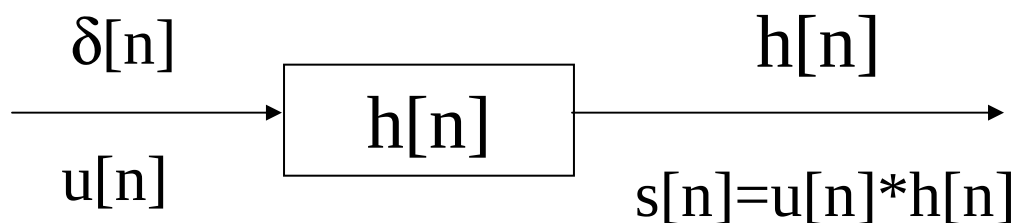
$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau$$

单位冲激响应就是它的单位阶跃响应的一阶导数

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt} = s'(t)$$

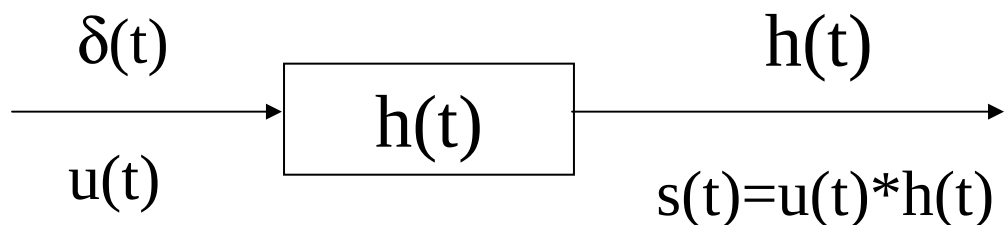
2.3.8 LTI系统的单位阶跃响应

离散时间系统:



$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^n h[k] \quad \text{或} \quad h[n] = s[n] - s[n-1]$$

连续时间系统:



$$s(t) = \int_{-\infty}^t h(\tau) d\tau \quad \text{或} \quad h(t) = s'(t)$$

一些重要的性质

$$(1) \quad u[n] * u[n] = (n+1)u[n]$$

$$(2) \quad u(t) * u(t) = tu(t)$$

$$(3) \quad \delta(t) * \delta(t) = \delta(t)$$

$$(4) \quad \delta(t - t_0) * \delta(t) = \delta(t - t_0)$$

$$(5) \quad x(t) * \delta(t) = x(t)$$

$$(6) \quad x(t - t_0) * \delta(t) = x(t - t_0)$$

$$(7) \quad x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0)$$

$$(8) \quad \delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$$

$$(9) \quad \text{如果 } y(t) = x_1(t) * x_2(t)$$

$$\text{那么 } x_1(t - t_1) * x_2(t - t_2) = y(t - t_1 - t_2)$$

2.4 用微分方程和差分方程描述的因果LTI系统

连续时间系统: 微分方程

离散时间系统: 差分方程

2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

- ❖ 一类极为重要的连续（离散）时间系统是输出与输入关系用线性常系数微分（差分）方程来表述
- ❖ 一阶线性常系数微分方程

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$$

- ❖ 一阶线性常系数差分方程

$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

命题1: $\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = bx(t)$ 所表征的连续时间系统, 若满足初始松弛条件(若 $t < t_0$, $x(t) = 0$, 则 $t < t_0$, $y(t) = 0$), 那么该系统就是LTI系统。 ($y(t_0) = ?$)

初始松弛条件的具体例子: 图1.1的电路

命题2: $y[n] + ay[n-1] = bx[n]$ 所表征的离散时间系统, 若满足初始松弛条件(若 $n < n_0$, $x[n] = 0$, 则 $n < n_0$, $y[n] = 0$), 那么该系统就是LTI系统。

例 (2-15) : 已知差分方程表征的系统¹₂为 $y[n-1] = x[n]$ 满足初始松弛条件, 求该系统的单位脉冲响应。

解: 考虑输入 $x[n] = \delta[n]$, 这时, 有 $n < 0$, $x[n] = 0$, 初始松弛条件就意味着 $n < 0$, $y[n] = 0$, 所以就有了一个初始条件 $y[-1] = 0$ 。由这个初始条件开始对 $n \geq 0$ 的各个 $y[n]$ 值解得:

$$y[1] = x[1] + \frac{1}{2} y[0] = \frac{1}{2} \quad \dots\dots$$

$$y[2] = x[2] + \frac{1}{2} y[1] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad y[n] = x[n] + \frac{1}{2} y[n-1] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

因为初始松弛的条件, 由一阶差分方程表征的系统就是LTI系统。所以该系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

2.4.1 线性常系数微分方程

N阶线性常系数微分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dx^k(t)}{dt^k}$$

或者

$$\begin{aligned} & a_N y^{(N)}(t) + a_{N-1} y^{(N-1)}(t) + \cdots + a_1 y'(t) + a_0 y(t) \\ &= b_M x^{(M)}(t) + b_{M-1} x^{(M-1)}(t) + \cdots + b_1 x'(t) + b_0 x(t) \end{aligned}$$

初始条件:

$$y(t_0), y'(t_0), \dots, y^{(N-1)}(t_0) \quad (N \text{ 个})$$

2.4.2 线性常系数差分方程

N阶线性常系数差分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

或者
$$a_N y[n-N] + a_{N-1} y[n-(N-1)] + \cdots + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] \\ = b_M x[n-M] + b_{M-1} x[n-(M-1)] + \cdots + b_1 x[n-1] + b_0 x[n]$$

初始条件:

$$y[0], y[-1], \dots, y[-(N-1)] \quad (N \text{ 个})$$

Example 2.15

2.4.3 用微分和差分方程描述的一阶系统的方框图表示

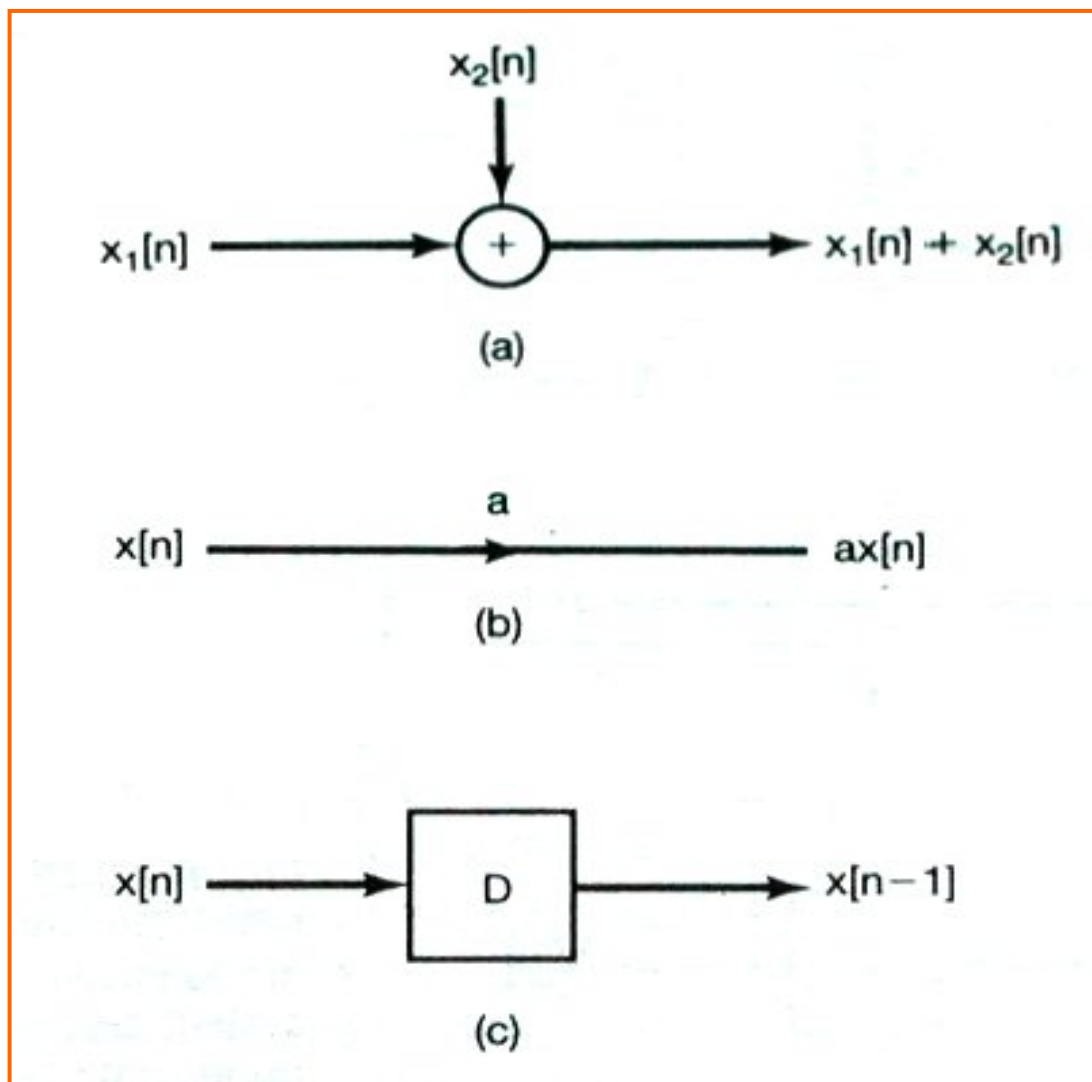
(1) 离散时间系统

基本单元:

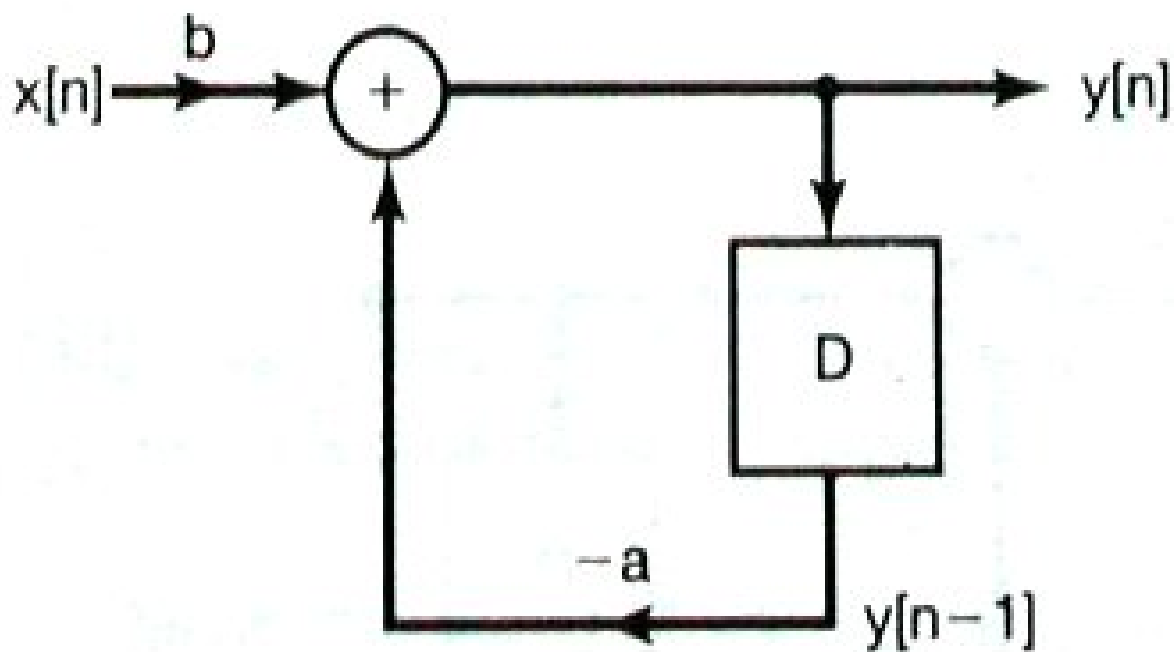
A. 加法器

B. 乘以系数

C. 单位延时



$$y[n] + ay[n-1] = bx[n]$$

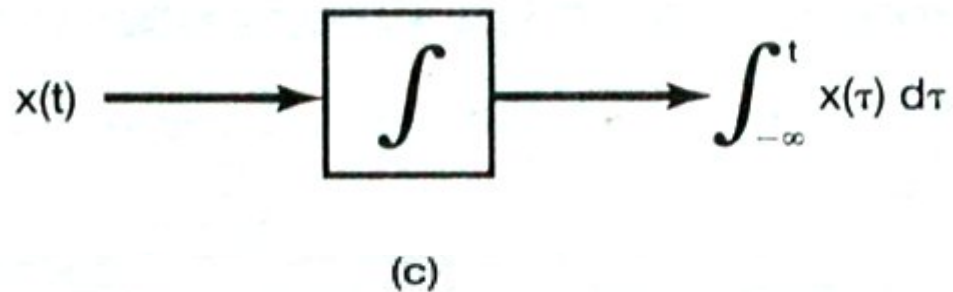
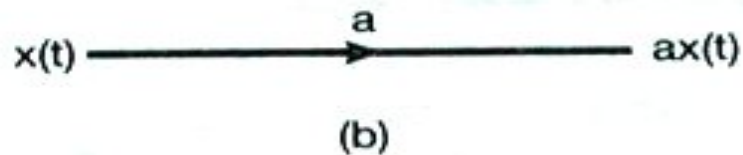
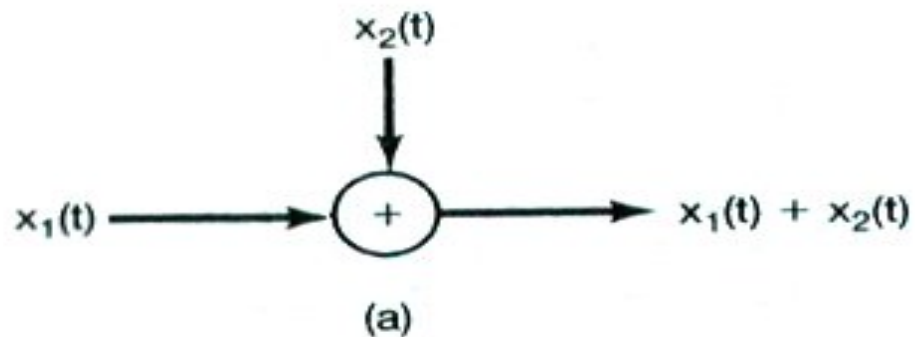


基本单元:

A. 加法器

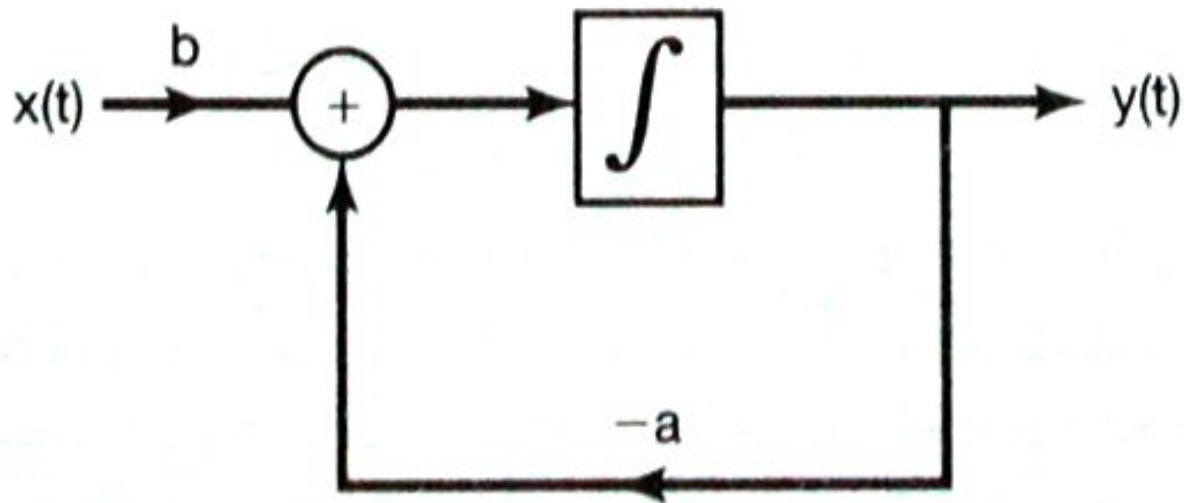
B. 乘以系数

C. 积分器



例：

$$y'(t) + ay(t) = bx(t)$$



2.5 奇异函数

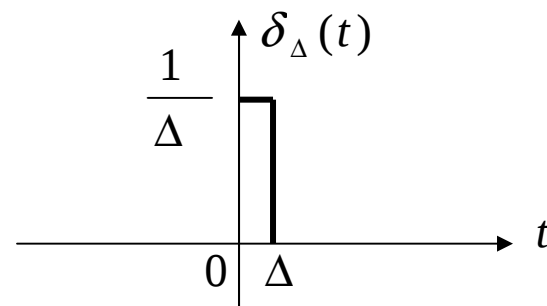
❖ 2.5.1 作为理想化短脉冲的单位冲激

- 如果将单位冲激定义为某种信号的极限形式的话，那么事实上就存在着无限多个看起来很不同的信号，但在极限之下表现都像一个脉冲。

2.5 奇异函数

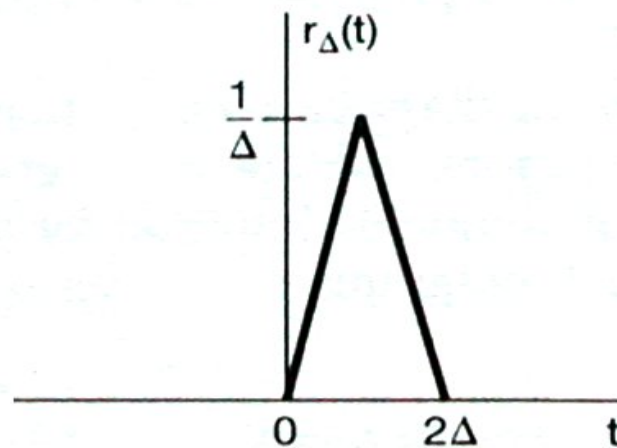
$$(1) \quad \delta_{\Delta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta}, & 0 \leq t \leq \Delta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta_{\Delta}(t)$$



$$(2) \quad r_{\Delta}(t) = \delta_{\Delta}(t) * \delta_{\Delta}(t)$$

$$\delta(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} r_{\Delta}(t)$$



2.5.2 通过卷积定义单位脉冲

❖ $\delta(t)$ 的运算定义为：

$$\delta(t) * x(t) = x(t), \text{ 或者, } \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) x(t - \tau) d\tau = x(t)$$

即将 $\delta(t)$ 定义为与任意函数卷积运算能产生该函数本身的一种函数。

2.5.3 单位脉冲偶和其它奇异函数

(1) 单位冲激偶: $u_1(t) = \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x'(t) \quad \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t)$$

$$u_k(t) = \underbrace{u_1(t) * \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet * u_1(t)}_k$$

若常数信号: 令 $x(t)=1$

$$0 = \frac{dx(t)}{dt} = x(t) * u_1(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) x(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\tau) d\tau$$

单位冲激偶
的面积为0

令 $x(t)=g(-t)$

$$\begin{aligned} g(-t) * u_1(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau - t) u_1(\tau) d\tau \\ &= \frac{dg(-t)}{dt} = -g'(-t) \end{aligned}$$

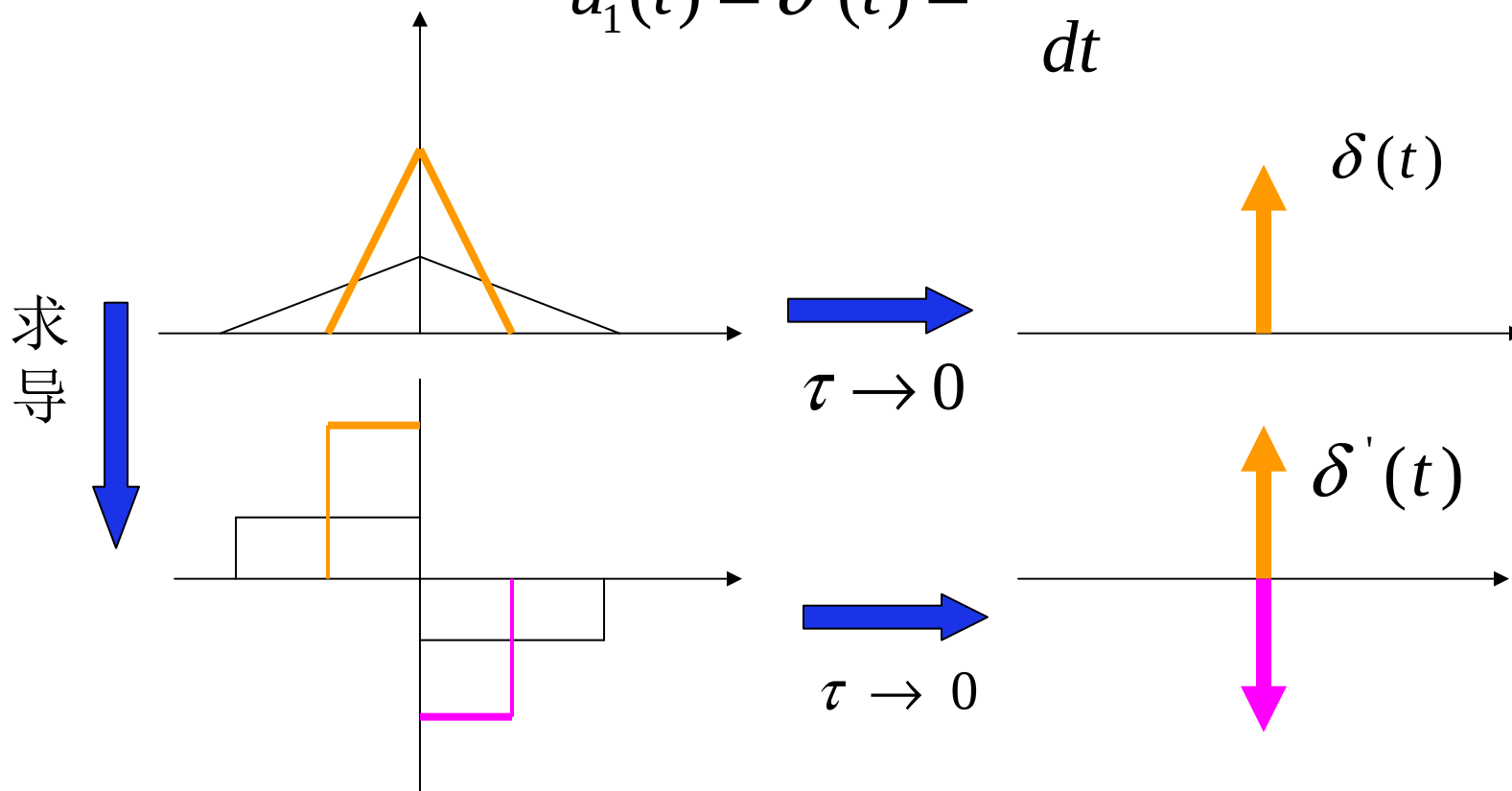
令 $t=0$

$$-g'(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) u_1(\tau) d\tau$$

单位冲激偶的“筛选”性质

单位脉冲偶信号示意图

$$u_1(t) = \delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$$



冲激偶的性质

❖ 面积

❖ $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0$

❖ “筛选”

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) g(t) dt = -g'(0)$$

补充一些重要的性质

$$(1) \quad x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$(2) \quad x(t) * \delta'(t) = x'(t)$$

$$(3) \quad x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

$$(4) \quad x(t - t_1) * h(t - t_2) = x(t) * h(t) * \delta(t - t_1 - t_2)$$

补充1：卷积的微积分性质

❖ 卷积的微分

设 $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ 且 $y'(t), x'(t), h'(t)$ 存在.

则 $y'(t) = x(t) * h'(t) = x'(t) * h(t)$

$$\begin{aligned}\text{证：} y'(t) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \right]' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h'(t - \tau) d\tau = x(t) * h'(t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{同理：} y'(t) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau \right]' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x'(t - \tau) d\tau = h(t) * x'(t) = x'(t) * h(t)\end{aligned}$$

补充1：卷积的微积分性质

❖ 卷积的积分

设 $y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ 且 $y^{(-1)}(t)$, $x^{(-1)}(t)$, $h^{(-1)}(t)$ 存在.

$$\text{则 } y^{(-1)}(t) = x(t) * h^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h(t)$$

$$\text{证 : } y^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[\int_{-\infty}^t h(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau = x(t) * h^{(-1)}(t)$$

$$\text{同理 : } y^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t y(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^t \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) x(\lambda - \tau) d\tau \right] d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \left[\int_{-\infty}^t x(\lambda - \tau) d\lambda \right] d\tau = h(t) * x^{(-1)}(t)$$

补充1：卷积的微积分性质

$$\text{设 } y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

且 $y^{(-1)}(t)$, $x^{(-1)}(t)$, $h^{(-1)}(t)$ 存在; $y'(t)$, $x'(t)$, $h'(t)$ 存在.

$$\text{则 } y(t) = x'(t) * h^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t) * h'(t)$$

$$\text{推广1: } y(t) = x^{(n)}(t) * h^{(-n)}(t) = x^{(-n)}(t) * h^{(n)}(t)$$

$$\text{推广2: } y^{(i+j)}(t) = x^{(i)}(t) * h^{(j)}(t)$$

本章小结

❖ 连续时间系统的时域分析：卷积积分

❖
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

❖ 离散时间系统的时域分析：卷积和

❖
$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x[k]h[n-k]$$

❖ 如何计算卷积

- 步骤：反折、时移、相乘、相加

❖ LTI的性质

- 交换律/ 分配律/ 结合律 -> 有何实际运用?
- 有记忆和无记忆 -> $h(t) = K\delta(t)$
- 可逆性 -> $h_1(t) * h_2(t) = \delta(t)$
- 因果性 -> $h(t) = 0, t < 0$
- 稳定性 -> $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| < +\infty$ 和 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < +\infty$

本章作业

❖ 必做：

➤ 2.1 2.3 2.5 2.7

➤ 2.10 2.11 2.12

➤ 2.20 2.23 2.40

❖ 选做：

➤ 2.18 2.19 2.24 2.47