



第5章 离散时间傅里叶变换

The discrete-time Fourier Transform

主要内容、重点(4学时)

❖ 主要内容

- 离散傅立叶变换的定义、性质、应用

❖ 重点

- 离散傅立叶变换的定义

作业

5.23 2.18 2.19(用本章知识重做)

注释:

✓ **CFS** (the Continuous-time Fourier Series): 连续时间傅立叶级数

✓ **DFS** (the Discrete-time Fourier Series): 离散时间傅立叶级数

❖ **CFT** (the Continuous -Time Fourier Transforms): 连续时间傅立叶变换

❖ **DFT** (the Discrete -Time Fourier Transforms): 离散时间傅立叶变换

5.0 引言

- ❖ 通过本章的学习，我们将建立完整的傅里叶分析方法——连续时间与离散时间。
- ❖ 在3.6节，**离散时间周期信号**的傅里叶级数表示是一个**有限项**级数。
- ❖ 与连续时间情况相比，一个非周期信号的离散时间傅里叶变换总是周期的，且周期为 2π 。

5.1 非周期信号的表示：离散时间傅里叶变换

5.1.1 离散时间傅里叶变换的导出

- ❖ 在4.1节，一个连续时间周期方波的傅里叶级数可以看作是一个包络函数的采样值，并且随着这个方波周期的增大，这些样本变得愈来愈密。即如何从一个周期信号获得非周期信号，将连续时间周期信号的周期无限增大，从而傅里叶级数收敛为连续时间非周期信号的傅里叶变换。
- ❖ 依照相同的思路，对离散时间非周期序列，为了建立它的傅里叶变换，将采样与连续时间情况下完全类似的步骤进行。

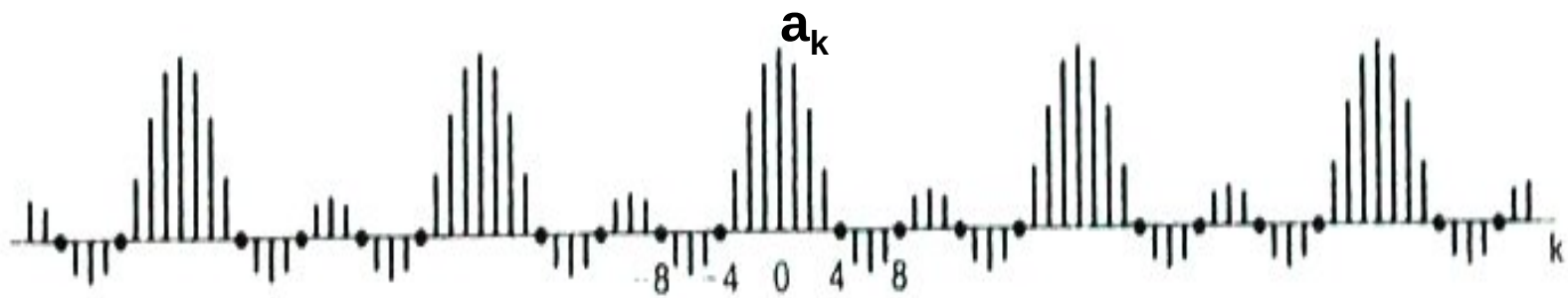
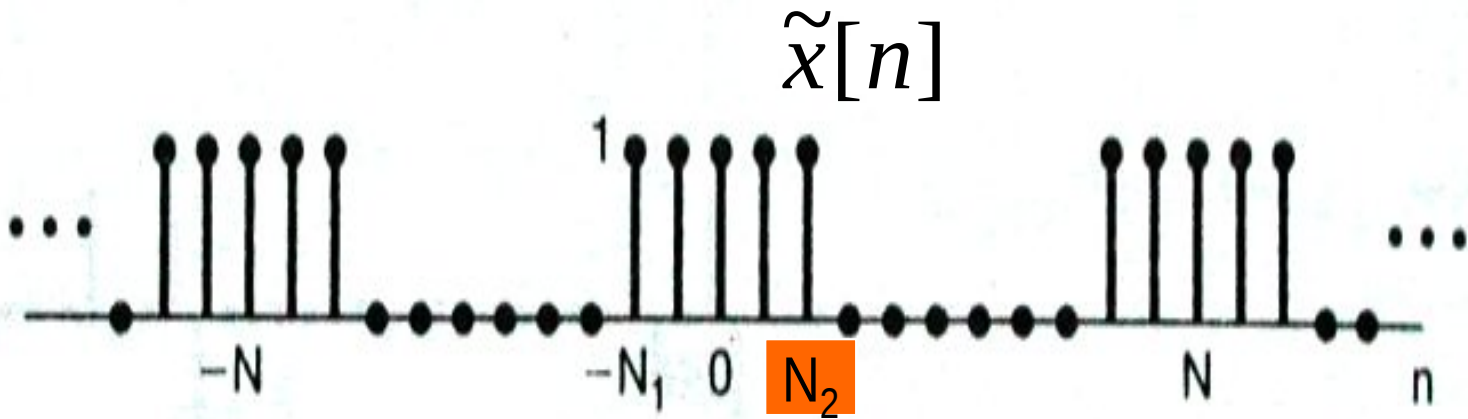
5.1 非周期信号的表示：离散时间傅里叶变换

5.1.1 离散时间傅里叶变换 (DFT)

(1) 傅里级数 (周期信号)

$$\begin{cases} \tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{cases}$$

傅里级数 (周期信号)



❖ 序列 $x[n]$ 以及对应的周期序列 $\tilde{x}[n]$:

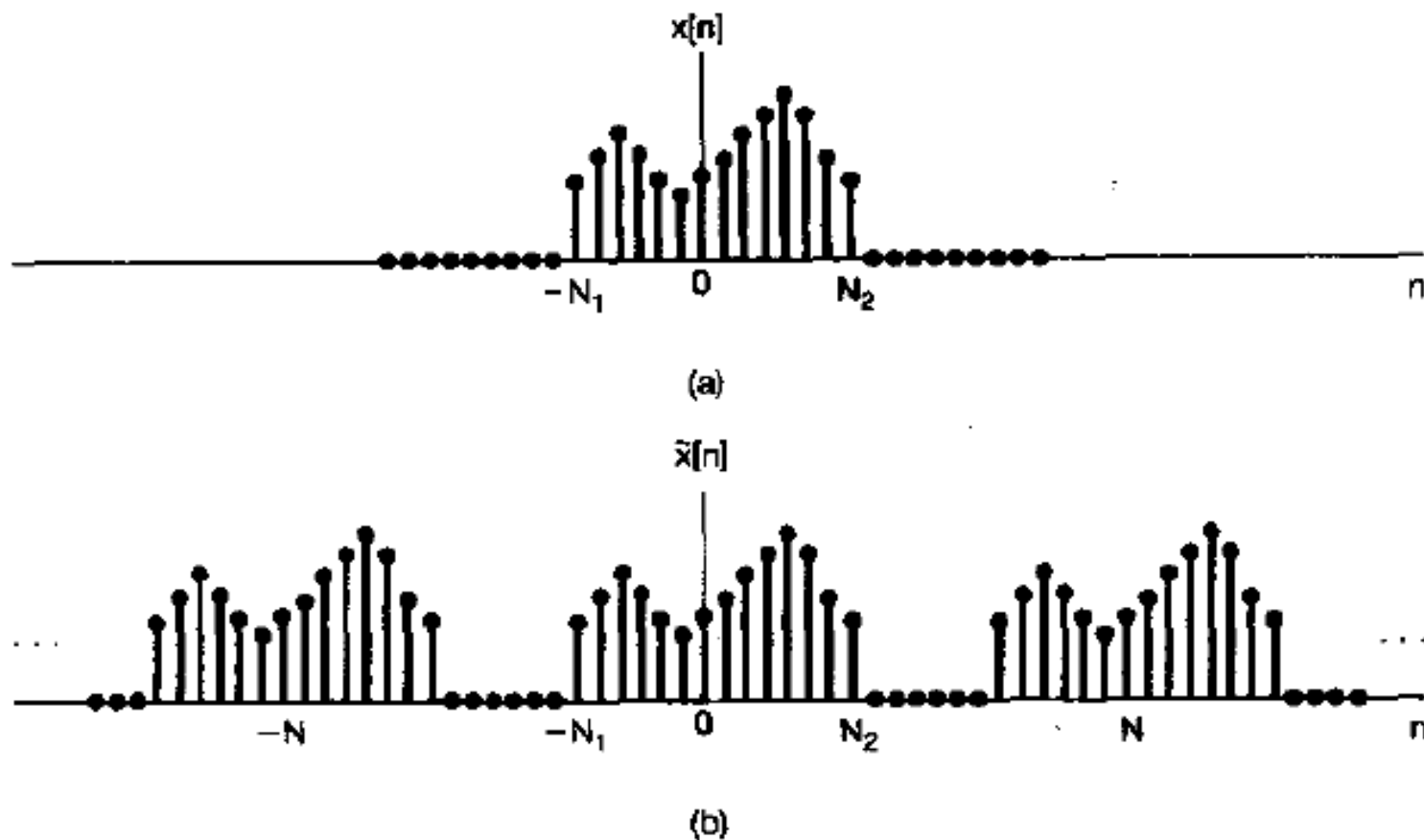


图 5.1 (a) 有限长序列 $x[n]$; (b) 由 $x[n]$ 构成的周期序列 $\tilde{x}[n]$

❖ 有周期序列的傅里叶级数:

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

❖ 因为在 $-N_1 \leq n \leq N_2$ 区间的一个周期上 $x[n] = \tilde{x}[n]$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

❖ 现定义函数

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

即： $a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$

又因为 $1/N = \omega_0 / 2\pi$

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0\end{aligned}$$

- ❖ 随着 N 的增加, ω_0 减小, 一旦 $N \rightarrow \infty$, 上式就过渡为一个积分:

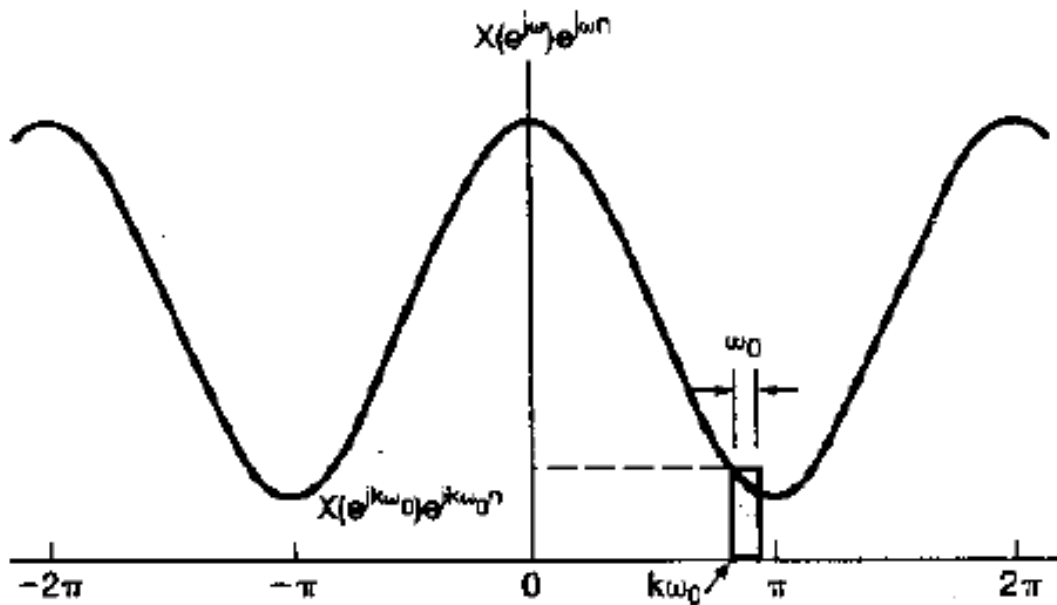


图 5.2 (5.7)式的图解说明

- ❖ $X(e^{j\omega})$ 对 ω 说是周期的, 周期为 2π ; 而 $e^{j\omega n}$ 对 ω 说也是 2π 为周期的。所以乘积 $X(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ 也一定是周期的。

- ❖ 因为这个求和是在N个宽为 $\omega_0=2\pi/N$ 的矩形间隔内完成的，所以总的积分区间总是有一个 2π 的宽度，因此，随着 $N \rightarrow \infty$ ，有：

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

离散时间傅里叶变换对。

- ❖ 离散时间傅里叶变换与连续时间傅里叶变换之比较
两者的主要差别在于离散时间傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 的周期性和在综合公式中的有限积分区间。而这两者均来自这样一个事实：在频率上相差 2π 的离散时间复指数信号是完全一样的。

(2) 傅里叶变换 (非周期信号)

$$x[n] = \tilde{x}[n] \quad -N_1 \leq n \leq N_2$$

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{+N_2} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n}$$

如果定义：

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

那么：

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0})$$

周期序列 $\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} X(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n} \omega_0$

当 $N \rightarrow \infty$,

$$\tilde{x}[n] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} x[n]$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} d\omega$$

$$k\omega_0 \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \omega$$

$$x[n] = \lim_{N \rightarrow \infty} (\tilde{x}[n]) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$\begin{cases} x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n} \end{cases}$$

DTFT 变换对

$$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

5.1.2 离散时间傅里叶变换举例

例5.1 信号 $x[n]=a^n u[n]$, $|a|<1$, 求信号的频谱

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \end{aligned}$$

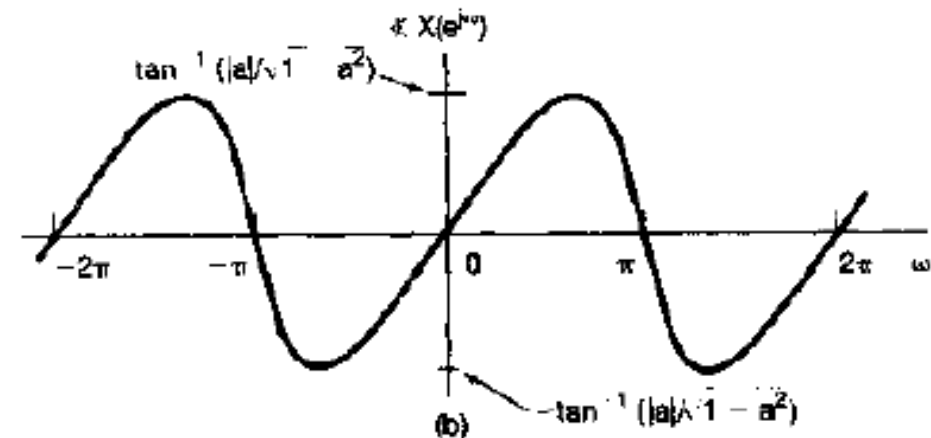
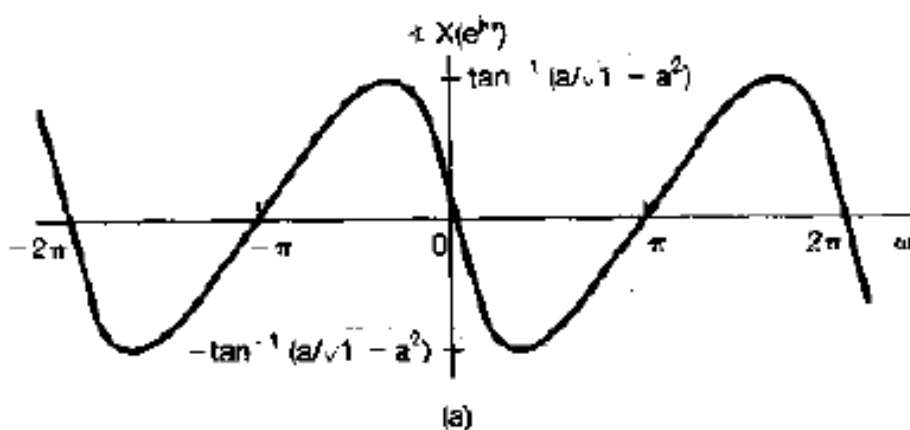
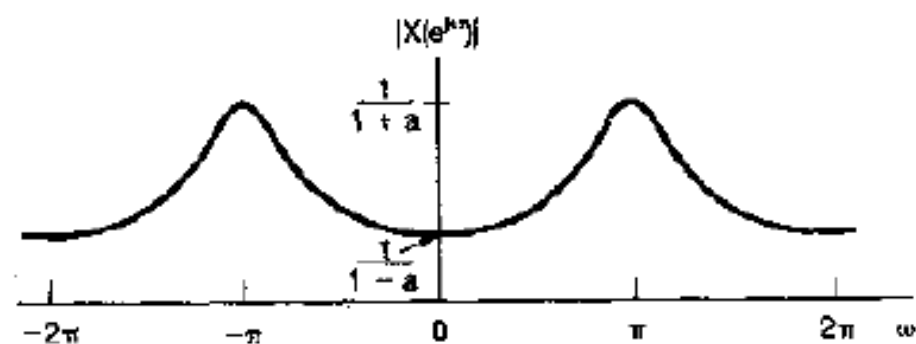
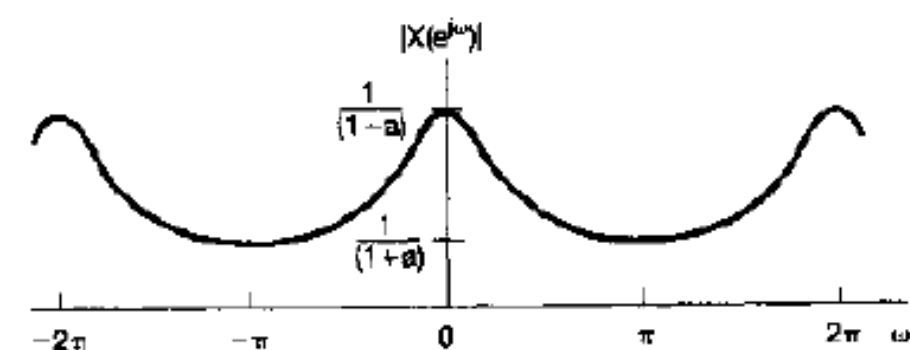
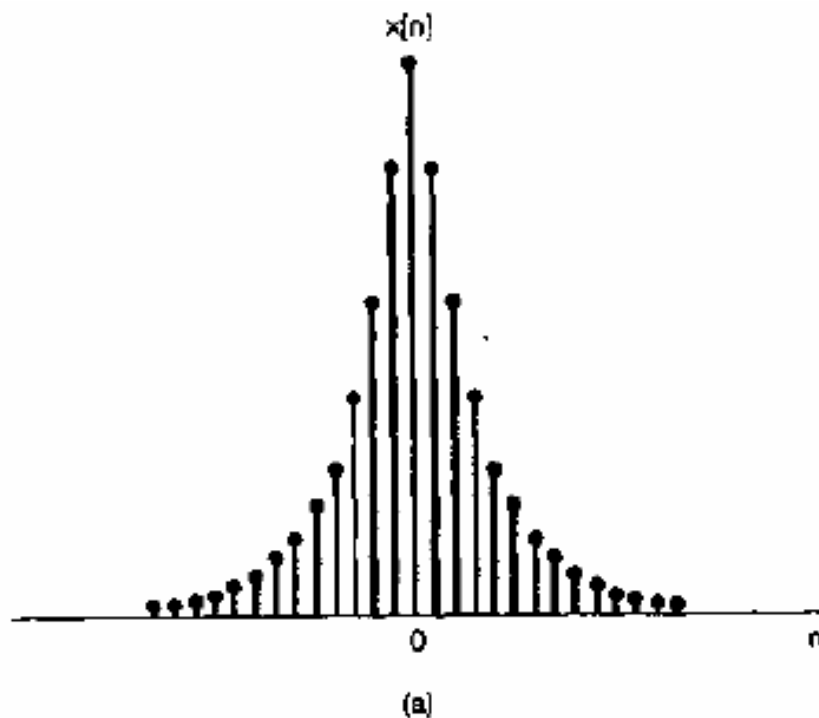


图 5.4 例 5.1 傅里叶变换的模和相位: (a) $a > 0$; (b) $a < 0$

例5.2 信号 $x[n]=a^{|n|}$, $|a|<1$, 求信号的频谱

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a^{|n|}e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{+\infty} a^n e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{m=1}^{+\infty} (ae^{j\omega})^m + \sum_{n=0}^{+\infty} (ae^{-j\omega})^n \\ &= \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} \\ &= \frac{1-a^2}{1-2a\cos\omega+a^2} \end{aligned}$$



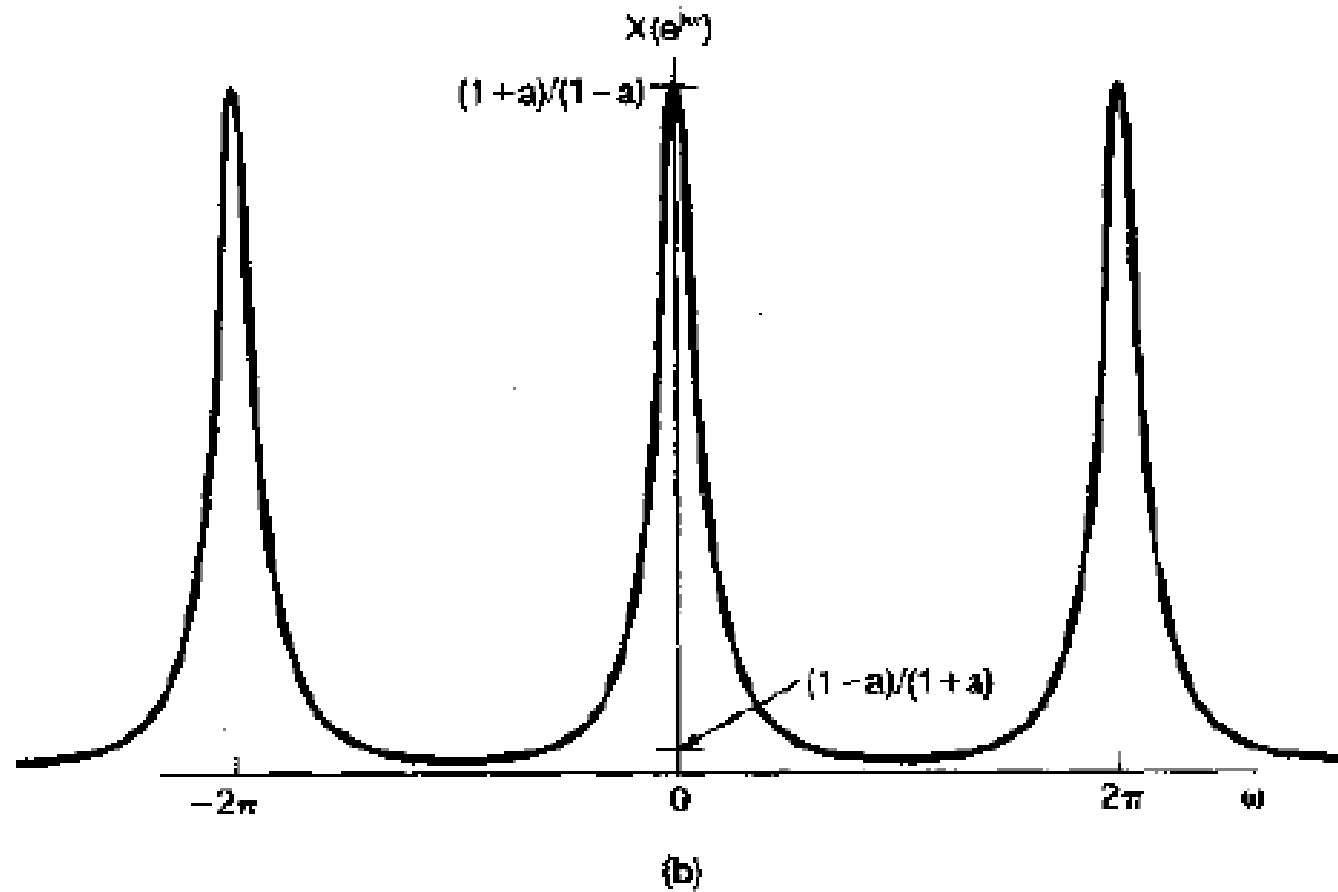
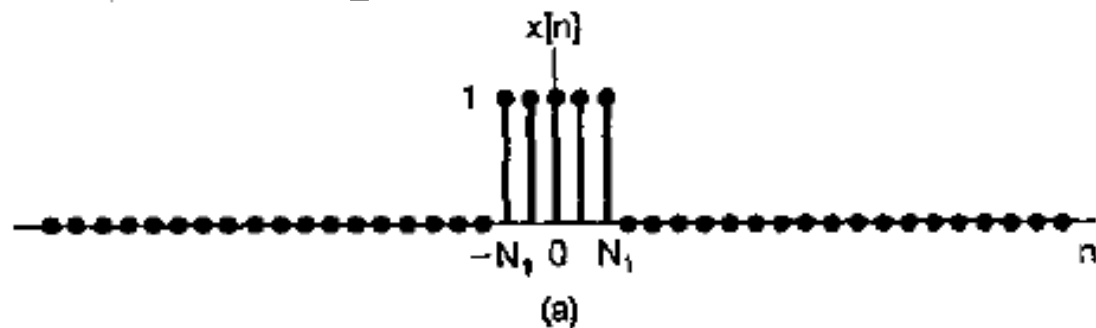


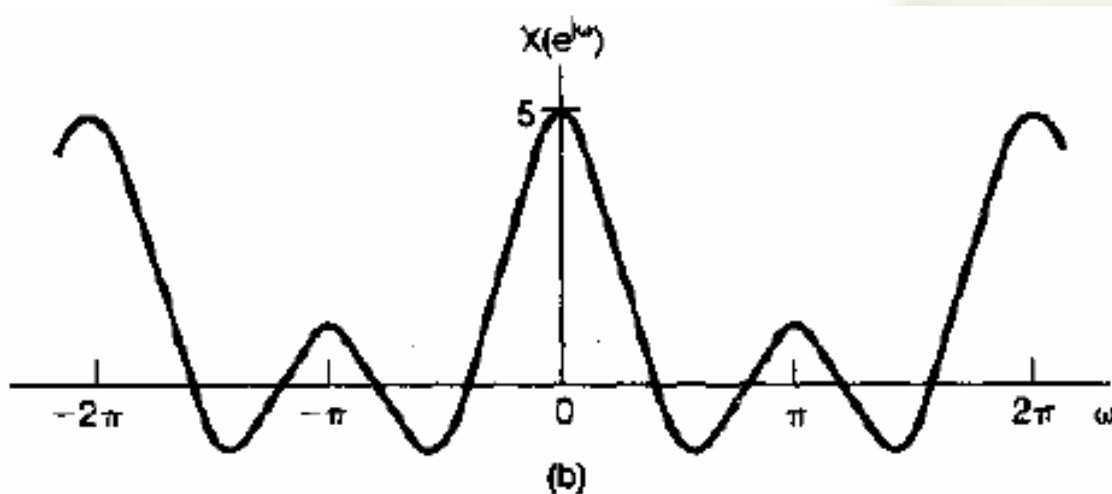
图 5.5 (a) 例 5.2 中的信号 $x[n] = a^{|n|}$; (b) 它的傅里叶变换 ($0 < a < 1$)

例5.3 信号 $x[n]$ 矩形脉冲序列, $N_1=2$

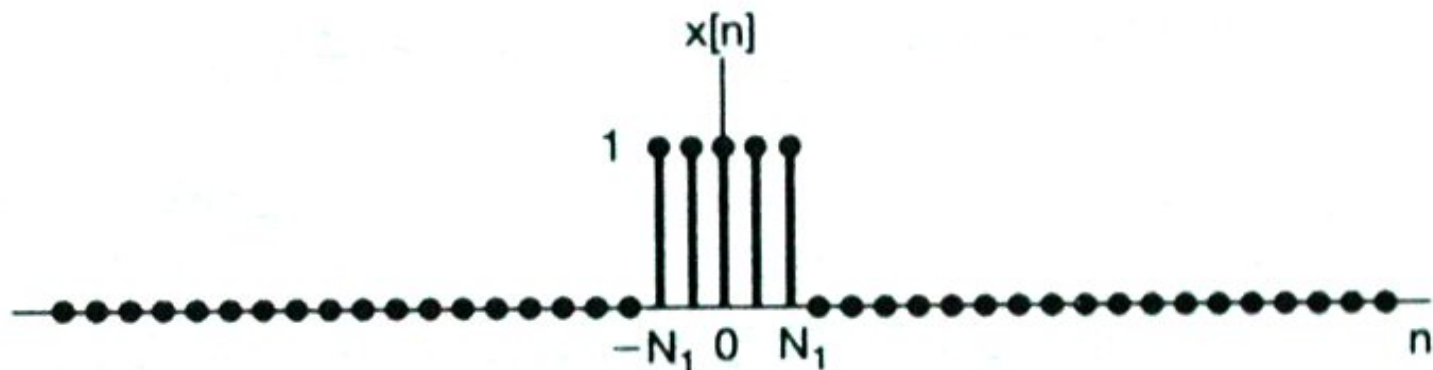
$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases}$$



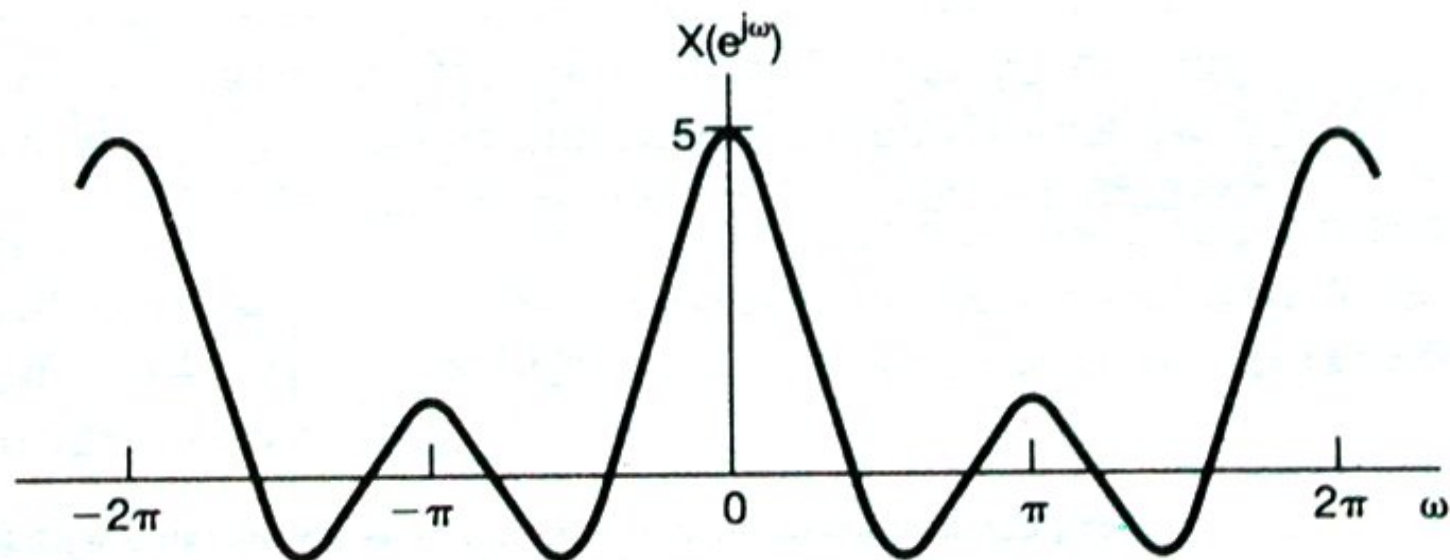
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = \frac{\sin \omega(N_1 + 1/2)}{\sin(\omega/2)}$$



傅里叶变换（非周期信号）



(a)



(b)

5.1.2 DFT例题

例题: 5.1 5.2 5.3

$$\mathbf{5.1} \quad x[n] = a^n u(n), \quad |a| < 1 \quad \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$\mathbf{5.2} \quad x[n] = a^{|n|}, \quad 0 < a < 1 \quad \xleftrightarrow{DTFT} \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos \omega}$$

5.3 矩形脉冲:

$$x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & |n| > N_1 \end{cases} \quad \xleftrightarrow{DTFT} \frac{\sin(N_1 + \frac{1}{2})\omega}{\sin \frac{\omega}{2}}$$

❖ 5.1.3 关于离散时间傅里叶变换的收敛问题

- ❖ 以上讨论都是假设 $x[n]$ 是任意的，但属于有限长序列情况下得到的结论。然而，离散时间傅里叶变换公式对极为广泛的一类：无限长序列（如例5.1和5.2中的信号）也是成立的。

- ❖ 在信号无限长的情况下，还是必须要考虑变换公式中无穷项求和的收敛问题。即要求这个信号序列 $x[n]$ 是绝对可和的：

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

或者

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty$$

- ❖ 信号序列 $x[n]$ 绝对可和，使得分析公式得以存在，即信号的频谱存在；而综合公式是在一个有限区间的积分，不存在收敛问题。

5.1.3 离散时间傅里叶变换收敛问题

❖ 当序列是无限长序列时，由于 $X(e^{j\omega})$ 表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题。

两组收敛条件

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{绝对可和}$$

或者

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad \text{能量有限}$$

5.2 周期信号的傅里叶变换

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n},$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k \frac{2\pi}{N})$$

5.2 周期信号的傅里叶变换

- ❖ 和在连续时间情况相同，利用把一个周期信号的变换表示成为频域中的冲激串的方法，就可以把离散时间周期信号也归并到离散时间傅里叶变换的范畴中去。

- ❖ 考虑信号 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l)$$

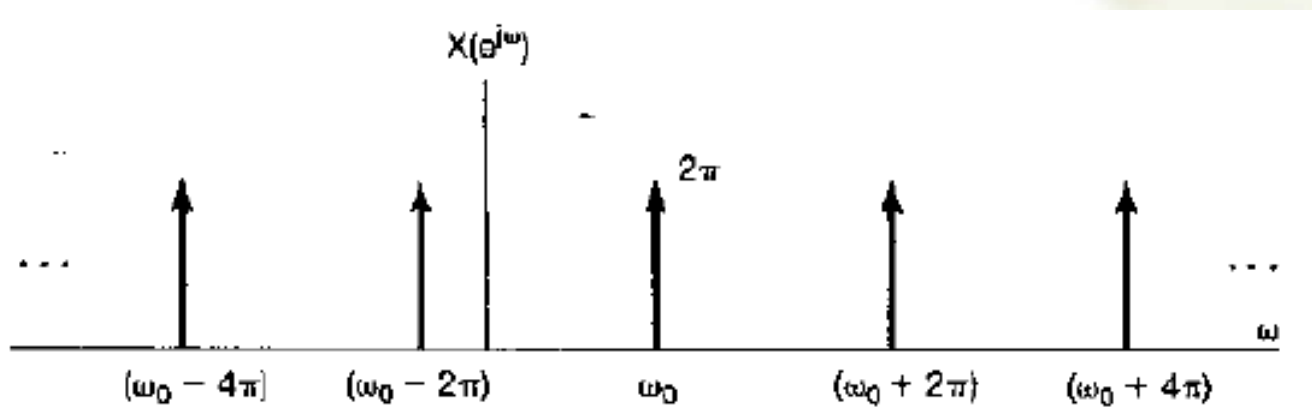


图 5.8 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ 的傅里叶变换

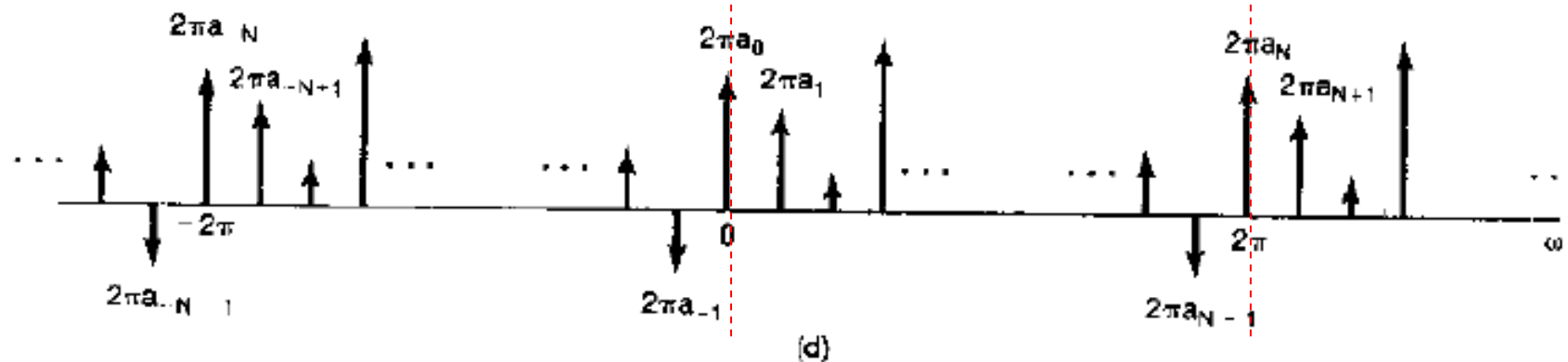
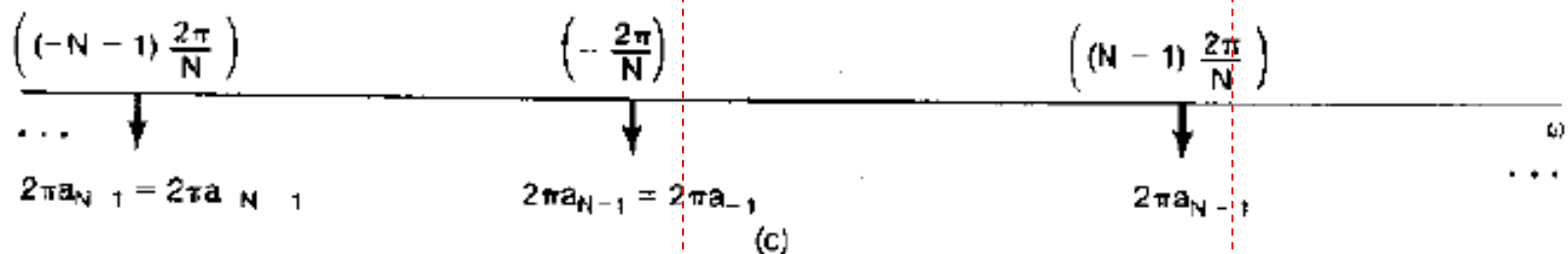
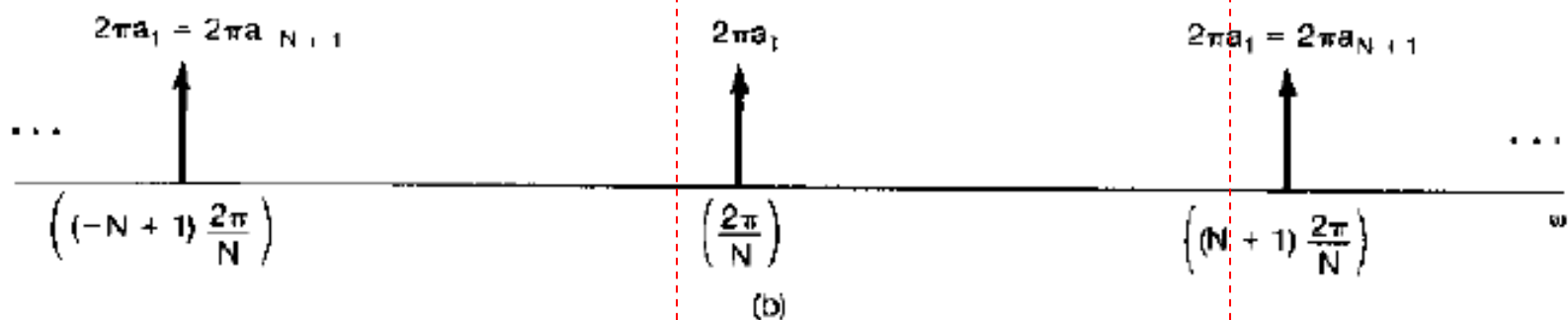
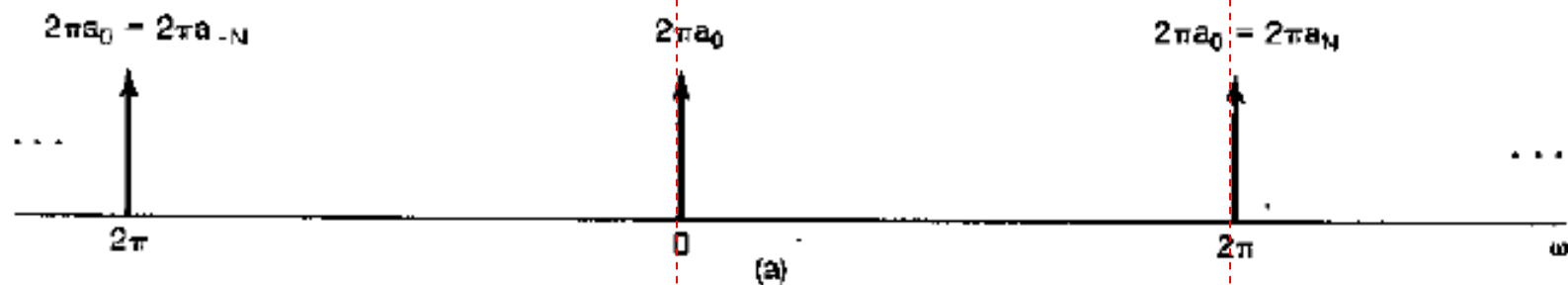
- ❖ 现在考虑一周期序列 $x[n]$ ，周期为 N ，其傅里叶级数为：

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - 2\pi k / N)$$

- ❖ 如果选取求和区间为 $0 \sim N$ ，即 $k=0,1,2,\dots,N-1$ ，则有

$$x[n] = a_0 + a_1 e^{j(2\pi/N)n} + a_2 e^{j2(2\pi/N)n} \\ + a_3 e^{j3(2\pi/N)n} + \dots + a_{N-1} e^{j(N-1)(2\pi/N)n}$$



例5.5 周期信号 $x[n]$

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2}{5} \pi$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - \frac{2}{5} \pi - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + \frac{2}{5} \pi - 2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \frac{2}{5} \pi) + \pi \delta(\omega + \frac{2}{5} \pi), \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

$X(e^{j\omega})$ 以周期为 2π ，周期重复，如图 5.10 所示。

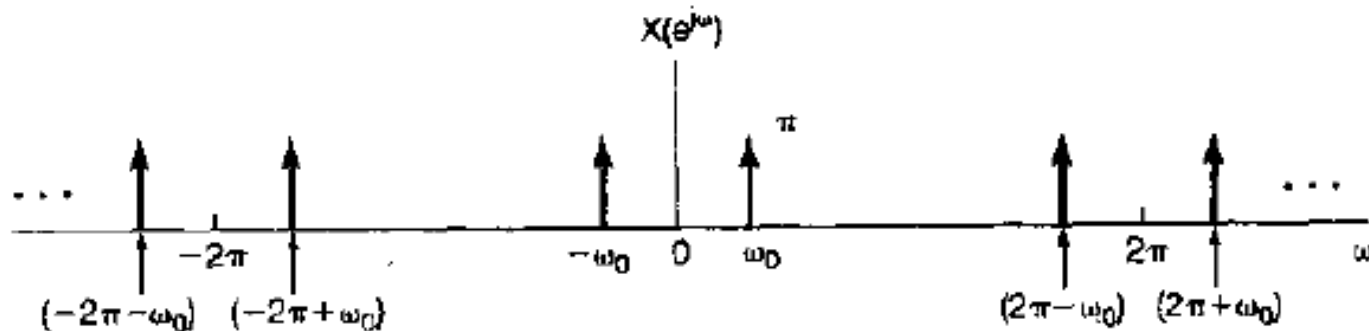


图 5.10 $x[n] = \cos \omega_0 n$ 的离散时间傅里叶变换

例5.5 周期信号 $x[n]$

$$x[n] = \cos \omega_0 n = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 n} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2}{5} \pi$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega - \frac{2}{5} \pi - 2\pi l) + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \pi \delta(\omega + \frac{2}{5} \pi - 2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega}) = \pi \delta(\omega - \frac{2}{5} \pi) + \pi \delta(\omega + \frac{2}{5} \pi), \quad -\pi \leq \omega < \pi$$

$X(e^{j\omega})$ 以周期为 2π ，周期重复，如图 5.10 所示。

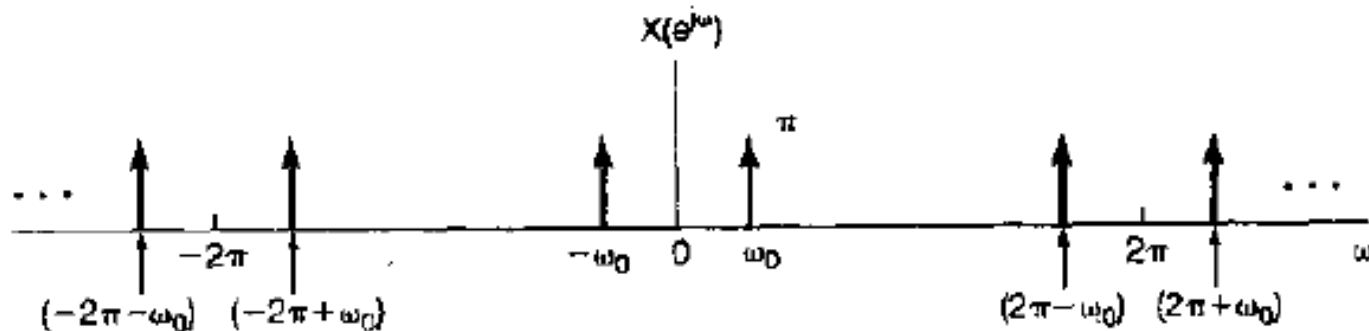
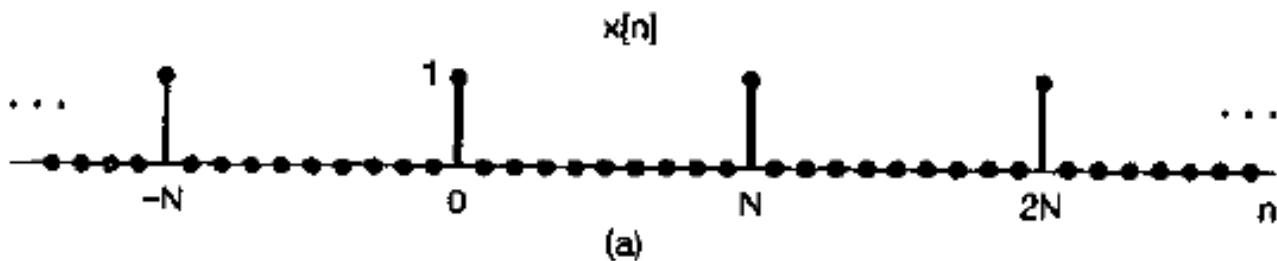


图 5.10 $x[n] = \cos \omega_0 n$ 的离散时间傅里叶变换

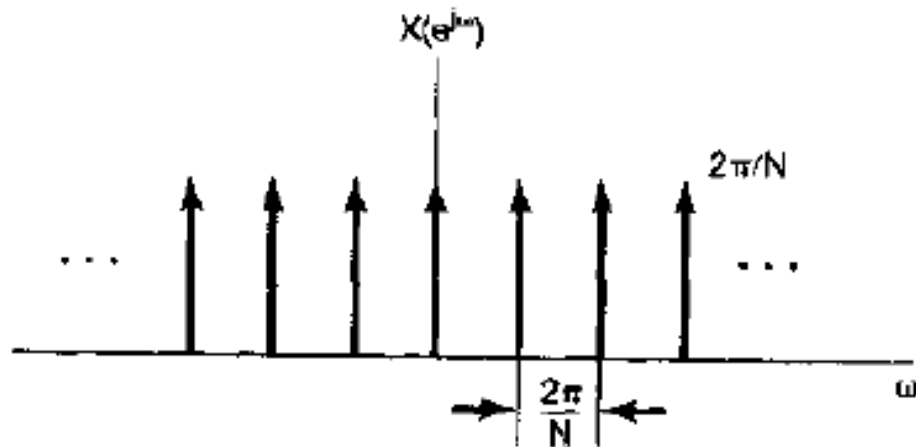
例5.6 与例4.8的周期冲激串相对应的离散时间冲激串：

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - kN]$$



$$a_k = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi}{N}k\right)$$



5.3 离散时间傅里叶变换性质

$$x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})$$

5.3 离散时间傅里叶变换性质

5.3.1 离散时间傅里叶变换的周期性

- ❖ 离散时间傅里叶变换对 ω 来说总是周期的，其周期为 2π ：

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$$

5.3.2 线性

$$x_1[n] \xleftrightarrow{F} X_1(e^{j\omega})$$

$$x_2[n] \xleftrightarrow{F} X_2(e^{j\omega})$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \xleftrightarrow{F} aX_1(e^{j\omega}) + bX_2(e^{j\omega})$$

5.3.3 时移与频移性质

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{F} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

例 5.7 图 5.12(a)示出一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器的频率响应 $H_{lp}(e^{j\omega})$ ，而图 5.12(b)则是将 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 频移半个周期(即 π)后的 $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ 。因为在离散时间情况下，高频是集中在 π (或 π 的奇数倍)附近，所以图 5.12(b)所示特性就是一个截止频率为 $\pi - \omega_c$ 的理想高通滤波器，也即

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) \tag{5.32}$$

由(3.122)式可知，并且在 5.4 节将再次讨论的，一个 LTI 系统的频率响应是该系统单位脉冲响应的傅里叶变换，于是，若 $h_{lp}[n]$ 和 $h_{hp}[n]$ 分别记作图 5.12(a)

和(b)的单位脉冲响应，那么(5.32)式和频移性质就意味着低通和高通滤波器有如下关系：

$$h_{hp}[n] = e^{j\pi n} h_{lp}[n] \tag{5.33}$$

$$= (-1)^n h_{lp}[n] \tag{5.34}$$

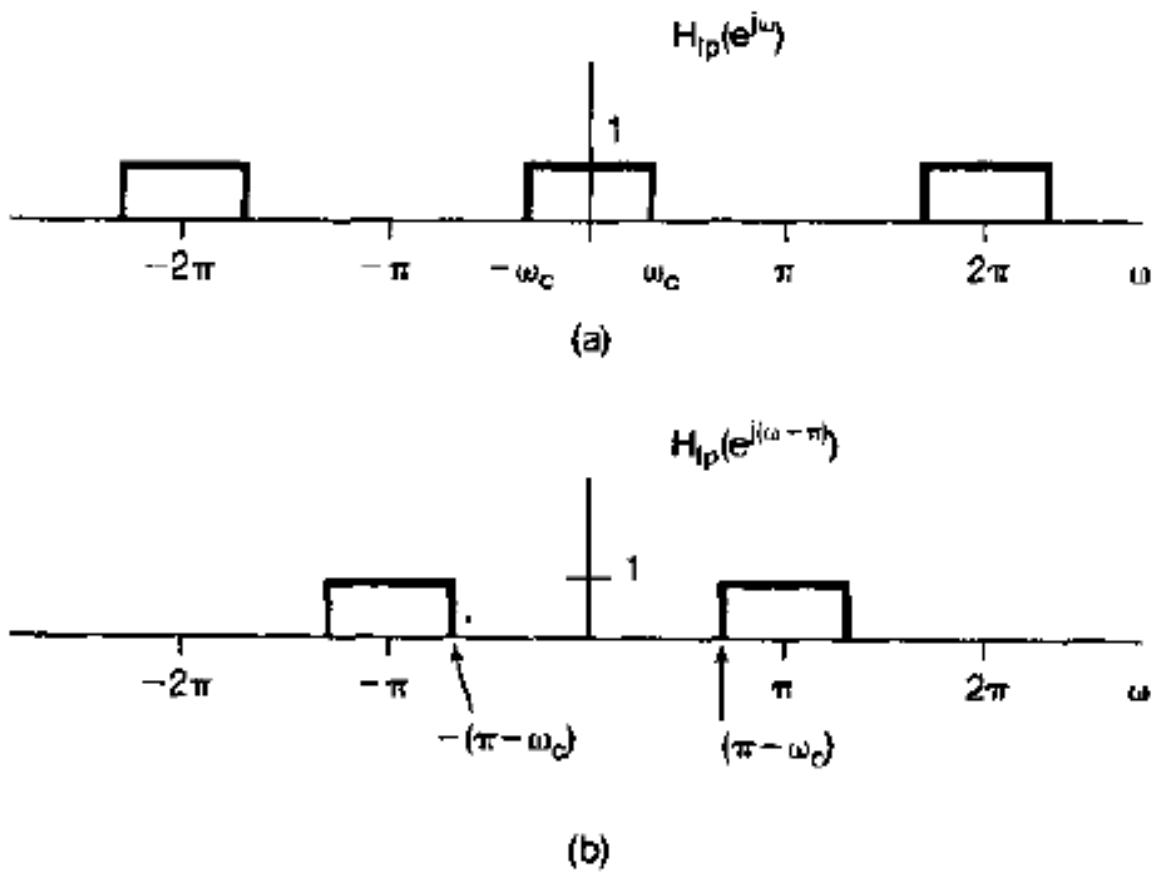


图 5.12 (a) 某一低通滤波器的频率响应；
(b) 将(a)的频率响应频移半个周期 $\omega = \pi$ 得到一高通滤波器的频率响应

5.3.4 共轭与共轭对称性

$$(1) \quad x[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \Rightarrow x^*[n] \xleftrightarrow{FT} X^*(e^{-j\omega})$$

$$(2) \quad x[n] = x^*[n] \Rightarrow X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$$

$$\operatorname{Re}\{X(e^{j\omega})\} \quad \omega \text{ 的偶函数}$$

$$\operatorname{Im}\{X(e^{j\omega})\} \quad \omega \text{ 的奇函数}$$

$$(3) \text{ 如果 } x[n] = x_e[n] + x_o[n] = x^*[n]$$

$$\text{那么 } X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

$$\text{and } x_e[n] \xleftrightarrow{F} X_R(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega})$$

$$x_o[n] \xleftrightarrow{F} jX_I(e^{j\omega}) = X_o(e^{j\omega})$$

5.3.5 差分与累加

$$x[n] - x[n-1] \xleftrightarrow{FT} (1 - e^{-j\omega}) X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{m=-\infty}^n x[m] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} X(e^{j\omega}) + \pi X(e^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

例题5.8

例 5.8 现利用累加性质来导出单位阶跃 $x[n] = u[n]$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 。已知

$$g[n] = \delta[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(e^{j\omega}) = 1$$

由 1.4.1 节知道，单位阶跃就是单位脉冲的累加，即

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^n g[m]$$

上式两边取傅里叶变换，并应用累加性质可得

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - e^{-j\omega})} G(e^{j\omega}) + \pi G(e^0) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

5.3.6 时间反转

$$x[-n] \xleftrightarrow{F} X(e^{-j\omega})$$

5.3.7 时域扩展

由于离散时间信号在时间上的离散性，因此时间和频率的尺度变换性质与在连续时间下相比都稍许有些不同。在 4.3.5 节曾导出连续时间下的性质为

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right) \quad (5.43)$$

然而，如果试图要定义一个信号 $x[an]$ ，若 a 不是一个整数时就遇到了困难。因此就不能用 $a < 1$ 来减慢这个信号的变化；另一方面，就是令 a 是一个不同于 ± 1 的整数，比如说考虑 $x[2n]$ ，这也不只是使原信号的变化加速。因为 n 仅仅取整数值， $x[2n]$ 仅为由 $x[n]$ 中的偶次样本所组成。

5.3.7 时域扩展

定义: k 是正整数

$$x_k[n] = \begin{cases} x[n/k] & n=rk & \text{当 } n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & n \neq rk & \text{当 } n \text{ 不为 } k \text{ 的整倍数} \end{cases}$$

因此:
$$X_k(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_k[n] e^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_k[rk] e^{-j\omega rk}$$

因为:
$$x_k[rk] = x[r]$$

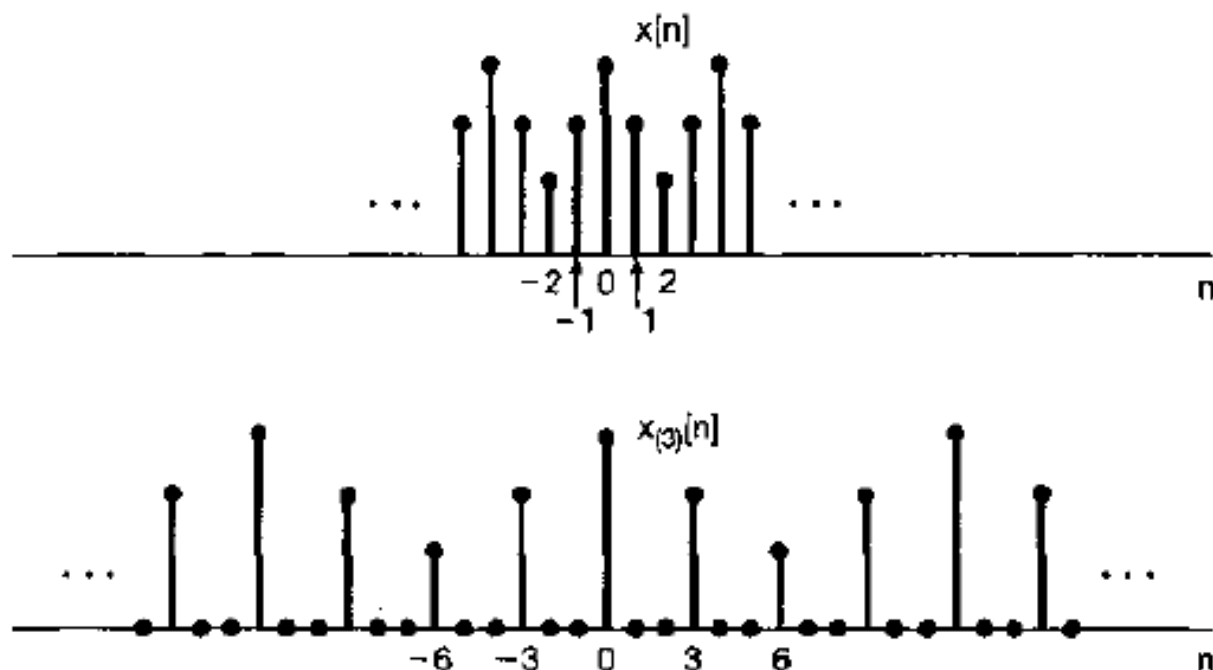
所以:
$$X_k(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r] e^{-j(k\omega)r} = X(e^{jk\omega})$$

$$x_k[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{jk\omega})$$

❖ 若令 k 是一个正整数，并且定义：

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{当 } n \text{ 为 } k \text{ 的整倍数} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 不为 } k \text{ 的整倍数} \end{cases}$$

图5.13是一个 $k=3$ 的例子，这时的 $x_{(k)}[n]$ 是在 $x[n]$ 连续值之间插入 $(k-1)$ 个零值而得到的：



❖ 直观上看，可以把 $x_{(k)}[n]$ 看作是减慢了的 $x[n]$ 。因为，除非 n 是 k 的整数倍，即 $n=rk$ ，否则 $x_{(k)}[n]$ 都等于0，所以 $x_{(k)}[n]$ 的傅立叶变换：

$$X_{(k)}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[n]e^{-j\omega n}$$

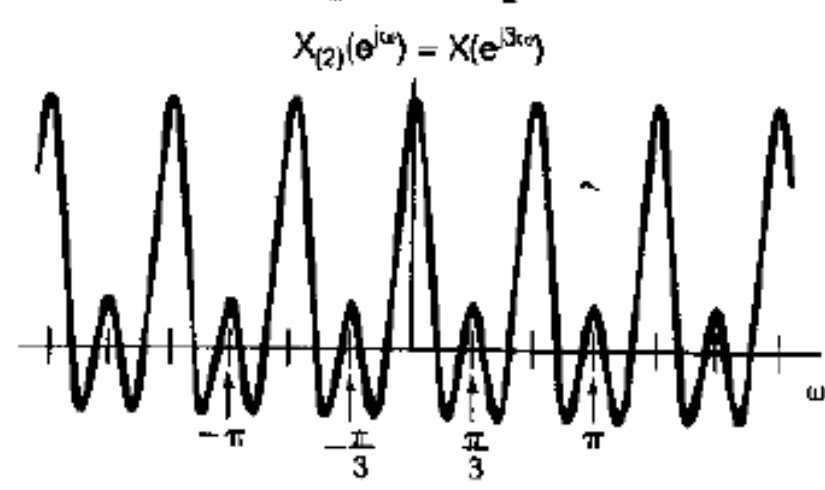
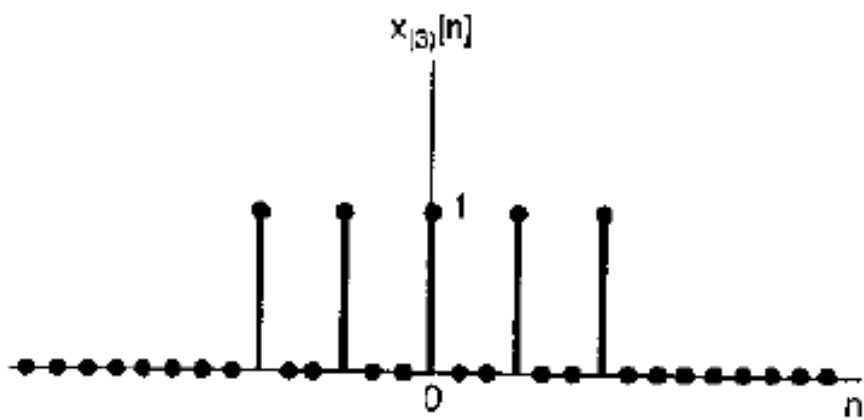
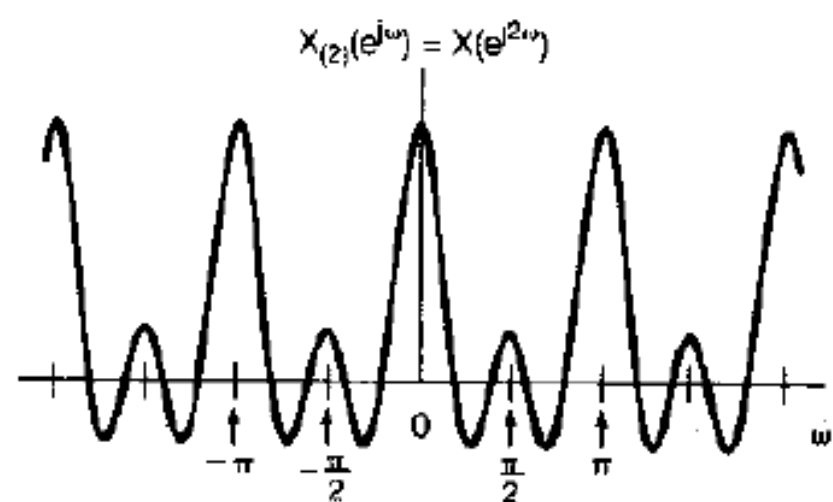
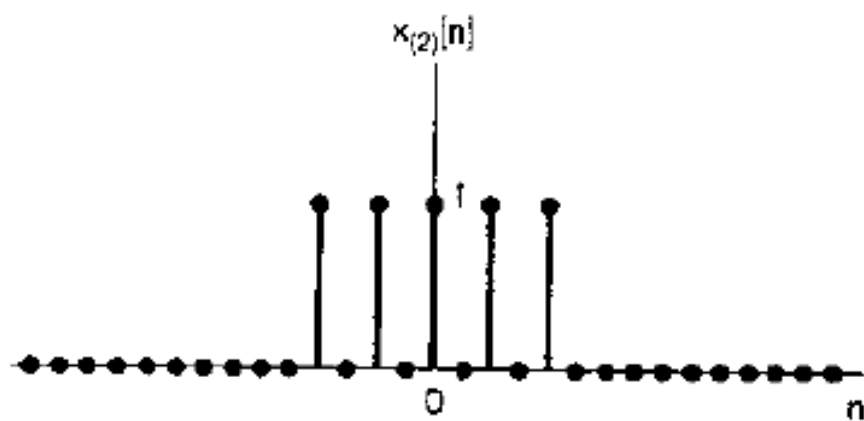
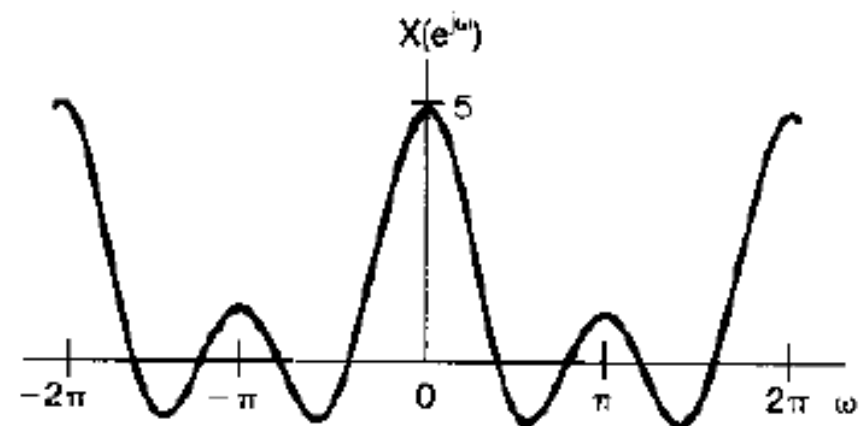
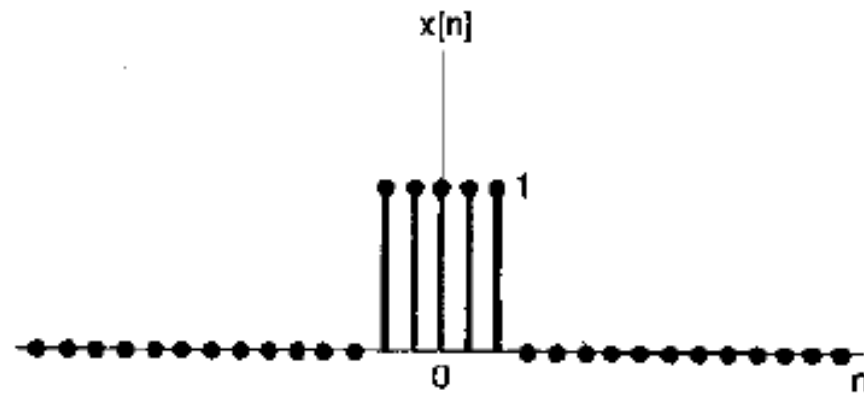
$$= \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x_{(k)}[rk]e^{-j\omega rk}$$

$$\underline{\underline{x_{(k)}[rk] = x[r] \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[r]e^{-j(k\omega)r}}}$$

$$= X(e^{jk\omega})$$

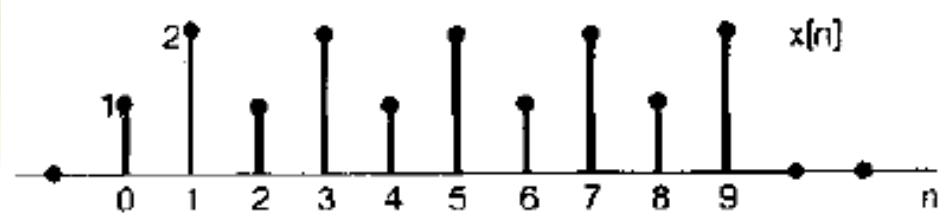
$$x_{(k)}[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{jk\omega})$$

- ❖ 当 $k > 1$ 时，该信号在时间上被拉开了，从而在时间上就减慢了，而它的傅立叶变换就受到压缩。例如，由于 $X(e^{j\omega})$ 是周期的，周期为 2π ，因而 $X(e^{jk\omega})$ 也是周期的，周期为 $2\pi/k$ 。



例 5.9 作为时域扩展性质在确定傅里叶变换应用中的一个例子, 让我们来考虑一下示于图 5.15(a)中的序列。可以将这个序列与图 5.15(b)这一较为简单的序列联系起来, 这就是

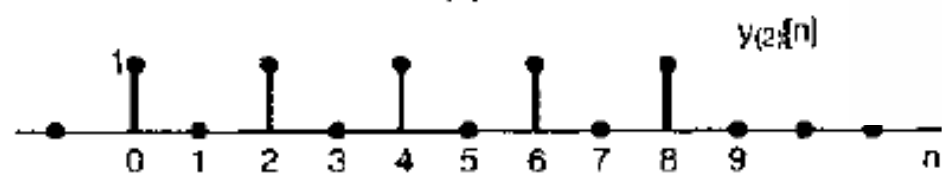
$$x[n] = y_{(2)}[n] + 2y_{(2)}[n-1]$$



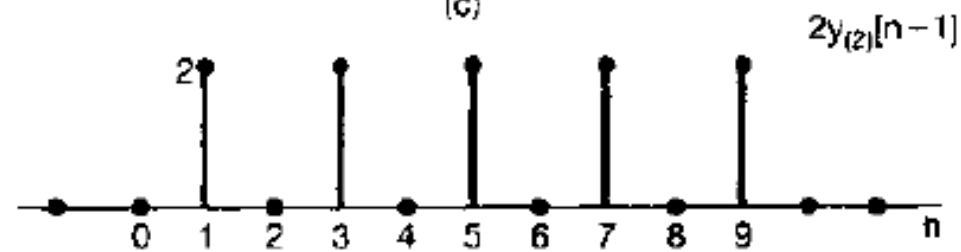
(a)



(b)



(c)



(d)

图 5.15 (a)例 5.9 的信号 $x[n]$; (b) 信号 $y[n]$;
(c) 由 $y[n]$ 每两点之间插入一个零值得到的信号 $y_{(2)}[n]$;
(d) 信号 $2y_{(2)}[n-1]$

其中

$$y_{(2)}[n] = \begin{cases} y[n/2], & \text{当 } n \text{ 为偶} \\ 0, & \text{当 } n \text{ 为奇} \end{cases}$$

而 $y_{(2)}[n-1]$ 则代表 $y_{(2)}[n]$ 右移一个单位。信号 $y_2[n]$ 和 $2y_{(2)}[n-1]$ 均分别示于图 5.15(c) 和 (d)。

接下来可以看到, $y[n] = g[n-2]^{\textcircled{1}}$, $g[n]$ 就是曾在例 5.3 中讨论过的当 $N_1 = 2$ 时的矩形脉冲, 并示于图 5.6(a) 中。结果, 根据例 5.3 和时移性质, 有

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega} \frac{\sin(5\omega/2)}{\sin(\omega/2)}$$

利用时域扩展性质可得

$$y_{(2)}[n] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j4\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

再根据线性和时移性质有

$$2y_{(2)}[n-1] \xleftrightarrow{\mathcal{F}} 2e^{-j\omega} \frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)}$$

将以上两个结果合在一起, 最后得

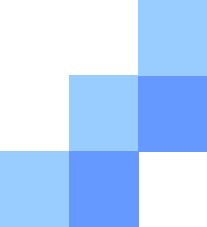
$$X(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega} (1 + 2e^{-j\omega}) \left(\frac{\sin(5\omega)}{\sin(\omega)} \right)$$

5.3.8 频域微分

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} -jnx[n]e^{-j\omega n}$$

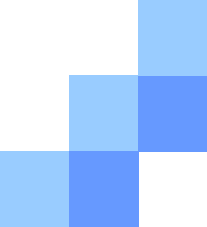
$$nx[n] \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$



5.3.9 Parseval定理

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

自学例题 5.10



5.4 卷积性质

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$$

5.4.1 举例

例题 5.11 5.12 5.13 5.14

5.4.2 $H(e^{j\omega})$ 收敛性

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{系统是稳定的}$$

如果 H 不收敛则用 Z 变换

5.4 卷积性质

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega}) \times H(e^{j\omega})$$

例 5.11 考虑一 LTI 系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = \delta[n - n_0]$$

它的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 就是

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta[n - n_0] e^{-j\omega n} = e^{-j\omega n_0}$$

因此，对于傅里叶变换为 $X(e^{j\omega})$ 的任意输入 $x[n]$ ，其输出的傅里叶变换是

$$Y(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega}) \quad (5.49)$$

对于这个例子， $y[n] = x[n - n_0]$ ，(5.49) 式就与时移性质相一致。同时，频率响应 $H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_0}$ ，它是一个纯时移系统，对所有频率其模为 1，而相移则与频率成线性关系，即 $-\omega n_0$ 。

例 5.12 考虑一下在 3.9.2 节介绍过的离散时间理想低通滤波器。该系统的频率响应 $H(e^{j\omega})$ 如图 5.17(a) 所示。因为一个 LTI 系统的单位脉冲响应和频率响应是一对傅里叶变换，所以就能利用傅里叶变换的综合公式(5.8)式由频率响应来确定该理想低通滤波器的单位脉冲响应。以 $-\pi \leq \omega \leq \pi$ 作为积分区间，由图 5.17(a) 可见有

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega n} d\omega = \frac{\sin \omega_0 n}{\pi n} \quad (5.50)$$

$h[n]$ 如图 5.17(b) 所示。

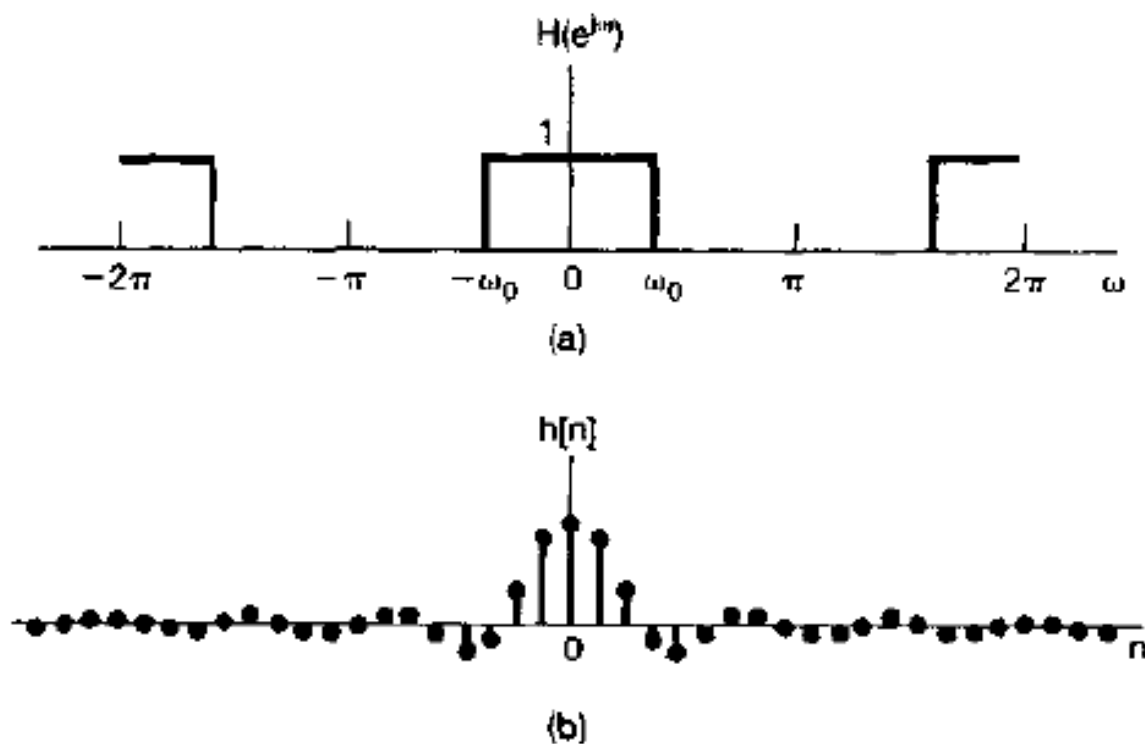


图 5.17 (a) 离散时间理想低通滤波器的频率响应;
(b) 该理想低通滤波器的单位脉冲响应

例 5.13 考虑一 LTI 系统, 其单位脉冲响应为

$$h[n] = \alpha^n u[n]$$

这里 $|\alpha| < 1$ 。假设该系统的输入是

$$x[n] = \beta^n u[n]$$

$|\beta| < 1$ 。求 $h[n]$ 和 $x[n]$ 的傅里叶变换, 有

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad (5.51)$$

和

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.52)$$

这样就有

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1 - \alpha e^{-j\omega})(1 - \beta e^{-j\omega})} \quad (5.53)$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{A}{1 - \alpha e^{-j\omega}} + \frac{B}{1 - \beta e^{-j\omega}} \quad (5.54)$$

将(5.53)式和(5.54)式的右边令其相等, 就得

$$A = \frac{\alpha}{\alpha - \beta}, \quad B = -\frac{\beta}{\alpha - \beta}$$

因此, 根据例 5.1 和线性性质, 凭直观就得(5.54)式的反变换为

$$y[n] = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \alpha^n u[n] - \frac{\beta}{\alpha - \beta} \beta^n u[n] = \frac{1}{\alpha - \beta} [\alpha^{n+1} u[n] - \beta^{n+1} u[n]] \quad (5.55)$$

当 $\alpha = \beta$ ，5.54式的部分分式展开式就不成立，这时

$$Y(e^{j\omega}) = \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)^2$$

利用表5.2的傅立叶变换对公式，有

$$(n+1)a^n x[n], \quad |a| < 1 \xleftrightarrow{F} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \right)^2$$

❖ 结果得

$$y[n] = (n+1)a^n x[n]$$

例 5.14 考虑图 5.18(a) 的系统，其输入为 $x[n]$ ，输出为 $y[n]$ 。频率响应为 $H_{lp}(e^{j\omega})$ 的 LTI 系统是一个截止频率为 $\pi/4$ 的理想低通滤波器，通带内增益为 1。先考虑图 5.18(a) 中的上部路径。信号 $w_1[n]$ 的傅里叶变换可以将 $(-1)^n = e^{j\pi n}$ 而使得有 $w_1[n] = e^{j\pi n} x[n]$ ，再利用频移性质而得到

$$W_1(e^{j\omega}) = X(e^{j(\omega-\pi)})$$

由卷积性质得出

$$W_2(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega}) X(e^{j(\omega-\pi)})$$

因为 $w_3[n] = e^{j\pi n} w_2[n]$ ，再次利用频移性质就得

$$\begin{aligned} W_3(e^{j\omega}) &= W_2(e^{j(\omega-\pi)}) \\ &= H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) X(e^{j\omega-2\pi}) \end{aligned}$$

因为离散时间傅里叶变换总是周期的，周期为 2π

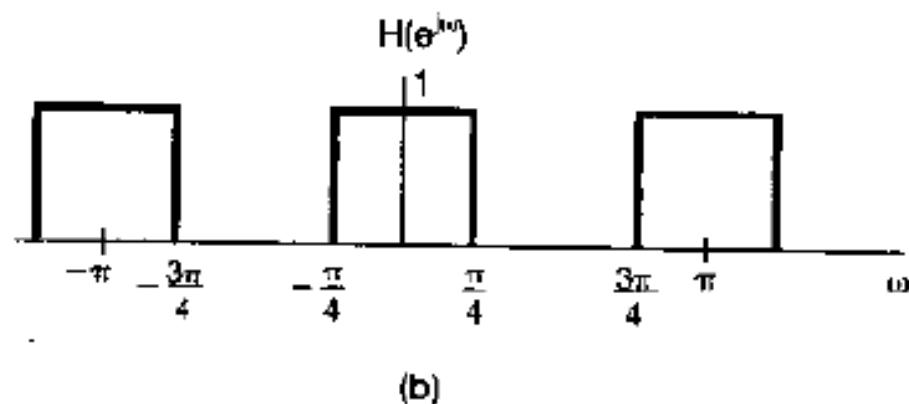
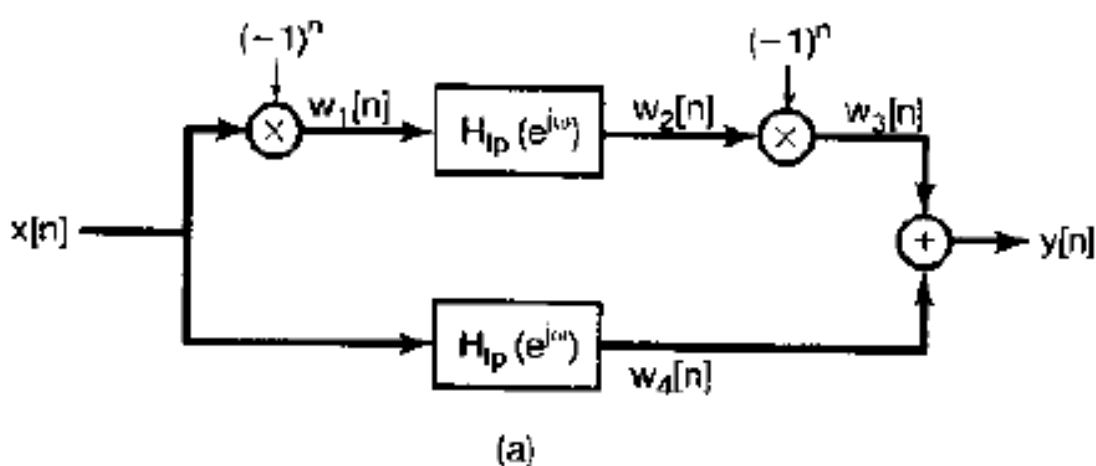


图 5.18 (a) 例 5.14 中的系统互联；(b) 该系统的总频率响应

$$W_3(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) X(e^{j\omega})$$

再在图 5.18(a)的下部路径应用卷积性质, 可得

$$W_4(e^{j\omega}) = H_{lp}(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$

根据傅里叶变换的线性性质, 有

$$Y(e^{j\omega}) = W_3(e^{j\omega}) + W_4(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]X(e^{j\omega})$$

结果, 图 5.18(a)整个系统的频率响应为

$$H(e^{j\omega}) = [H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)}) + H_{lp}(e^{j\omega})]$$

如图 5.18(b)所示。

如同在例 5.7 中所看到的, $H_{lp}(e^{j(\omega-\pi)})$ 是一个理想高通滤波器的频率响应。因此, 整个系统既通过低频, 又通过高频, 而阻止这两个频带之间的频率通过。也就是说, 这是一个称之为具有理想带阻特性的滤波器, 其阻带范围是 $\pi/4 < |\omega| < 3\pi/4$ 。

值得提及的是，和连续时间情况相同，不是每一个 LTI 系统都有一个频率响应。例如，单位脉冲响应 $h[n] = 2^n u[n]$ 的 LTI 系统，对正弦输入就不是一个有限的响应，这就反映出对 $h[n]$ 的傅里叶变换的分析公式是发散的。然而，若一个 LTI 系统是稳定的，那么由 2.3.7 节，它的单位脉冲响应就是绝对可和的，即

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad (5.59)$$

因此，对稳定系统而言，频率响应总是收敛的。在利用傅里叶方法时，总是局限到单位脉冲响应的傅里叶变换存在的系统内。第 10 章将把傅里叶变换推广到 z 变换中去，在那里就可以对频率响应不收敛的 LTI 系统应用变换法。

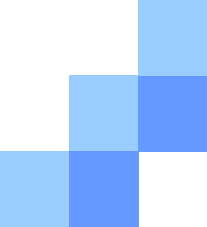
5.4 卷积性质

$$y[n] = x[n] * h[n] \xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega})H(e^{j\omega}) = Y(e^{j\omega})$$

5.4.2 $H(e^{j\omega})$ 收敛性

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \text{系统是稳定的}$$

如果 H 不收敛则用 Z 变换



5.5 相乘性质

$$x_1[n] \xleftrightarrow{FT} X_1(e^{j\omega}) \quad x_2[n] \xleftrightarrow{FT} X_2(e^{j\omega})$$

$$y[n] = x_1[n]x_2[n]$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

例题 5.15

5.6 傅里叶变换性质和基本傅里叶变换对列表

表5.1 表 5.2

5.5 相乘性质证明

❖ 周期卷积 $y[n] = x_1[n] \times x_2[n]$

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n}$$

$$\underline{\underline{x_1[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta}} \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) e^{j\theta n} d\theta \right\} e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n] e^{-j(\omega-\theta)n} \right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$$

例 5.15 有一信号 $x[n]$, 它为两个另外的信号的乘积, 求其傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$, 即

$$x[n] = x_1[n]x_2[n]$$

式中

$$x_1[n] = \frac{\sin(3\pi n/4)}{\pi n}$$

和

$$x_2[n] = \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n}$$

根据(5.63)式的相乘性质知道, $X(e^{j\omega})$ 是 $X_1(e^{j\omega})$ 和 $X_2(e^{j\omega})$ 的周期卷积, 其中(5.63)式的积分可以在任意 2π 长度的区间内进行。现选取积分区间为 $-\pi < \theta \leq \pi$ ①, 可得

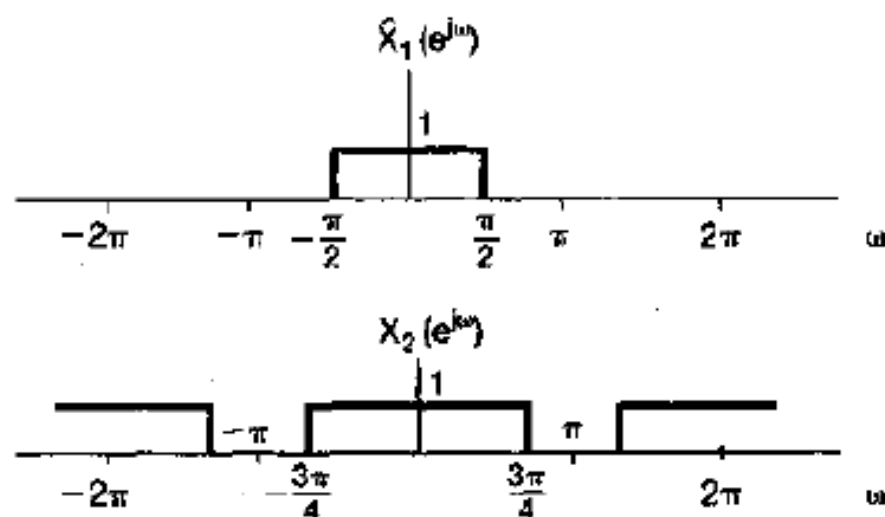
$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \quad (5.64)$$

(5.64)式类似于非周期卷积, 除了积分是限制在区间 $-\pi < \theta \leq \pi$ 这一点外。然而, 我们可以将这个式子转换成一般的卷积, 定义

$$\hat{X}_1(e^{j\omega}) = \begin{cases} X_1(e^{j\omega}), & \text{对 } -\pi < \omega \leq \pi \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

然后, 在(5.64)式中用 $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ 替代 $X_1(e^{j\theta})$, 并利用 $\hat{X}_1(e^{j\theta})$ 在 $|\theta| > \pi$ 为零, 就有

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{X}_1(e^{j\theta}) X_2(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 X(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{X}_1(\theta) X_2(\omega - \theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \hat{X}_1(\omega) * X_2(\omega)
 \end{aligned}$$

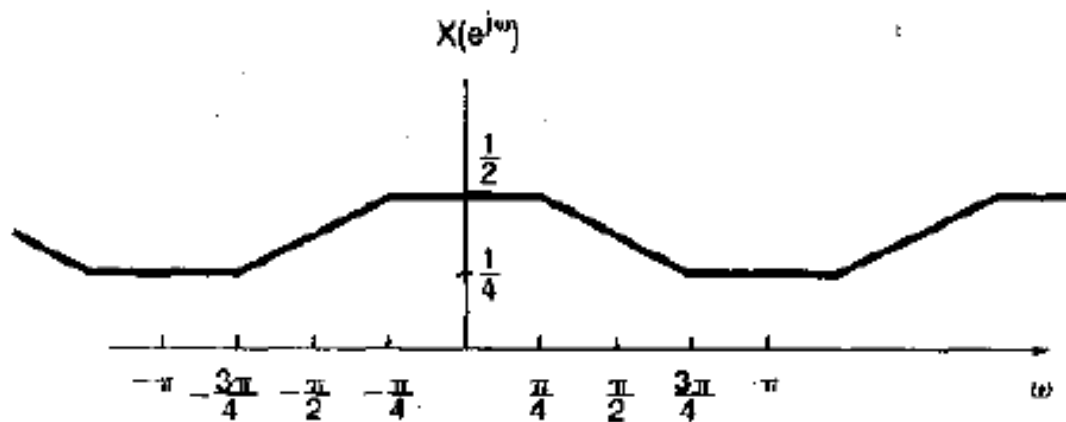


图 5.20 例 5.15 周期卷积的结果

5.8 由线性常系数差分方程表征的系统

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^N a_k e^{-jk\omega}}$$

例题5.18 5.19 5.20

例 5.18 考虑一因果 LTI 系统，其差分方程为

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \quad (5.81)$$

其中 $|a| < 1$ 。由 (5.80) 式，该系统的频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}} \quad (5.82)$$

将 (5.82) 式与例 5.1 比较可知，它就是序列 $a^n u[n]$ 的傅里叶变换。因此，该系统的单位脉冲响应是

$$h[n] = a^n u[n] \quad (5.83)$$

例 5.19 考虑一因果 LTI 系统, 其差分方程为

$$y[n] - \frac{3}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] = 2x[n] \quad (5.84)$$

由(5.80)式, 频率响应是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{1 - \frac{3}{4}e^{-j\omega} + \frac{1}{8}e^{-j2\omega}} \quad (5.85)$$

为求单位脉冲响应, 第一步是要将(5.85)式的分母因式分解为:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \quad (5.86)$$

$H(e^{j\omega})$ 就能按部分分式展开, 如同附录中例 A.3 那样, 展开的结果为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} - \frac{2}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \quad (5.87)$$

式中每一项的反变换都可凭直观写出, 其结果为

$$h[n] = 4\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 2\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

例 5.20 考虑例 5.19 的 LTI 系统, 并设系统输入为

$$x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

利用(5.80)式和例 5.1 或例 5.18, 可得

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \left[\frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})} \right] \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} \right] \\ &= \frac{2}{(1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega})(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

如同在附录中给出的, 这种情况下的部分分式展开式是

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{B_{11}}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} + \frac{B_{12}}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{B_{21}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.90)$$

式中常数 B_{11} 、 B_{12} 和 B_{21} 可用附录中给出的方法求出。这个特定的展开式在附录例 A.4 中详细地列出来了, 所得到的值是

$$B_{11} = -4, B_{12} = -2, B_{21} = 8$$

这样

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{4}{1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega}} - \frac{2}{(1 - \frac{1}{4}e^{-j\omega})^2} + \frac{8}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\omega}} \quad (5.91)$$

上式第一和第三项与在例 5.19 中所遇到的形式相同, 而第二项与在例 5.13 中所见过的一样。无论由这些例子, 还是根据表 5.2, 都能将(5.91)式中的每一项求反变换, 而得出

$$y[n] = \left\{ -4\left(\frac{1}{4}\right)^n - 2(n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 8\left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} u[n] \quad (5.92)$$

5.23 2.18 2.19(用本章知识重做)

5.23中

(e) $\text{Re}\{x(\omega)\}$ 改为 $X_R(e^{j\omega})$ or $\text{Re}\{X(e^{j\omega})\}$

(f) ii $\int_{-\pi}^{+\pi} \left| \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} \right|^2 d\omega$

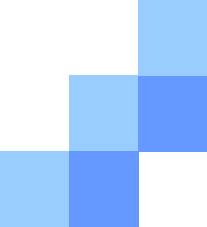
❖ 对比连续时间傅里叶变换来学习

❖ DFT定义:
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

❖ DFT与CFT的重要区别:

- ✓ (1) CFT的分析公式为一无限积分, 而DFT的分析公式为一无限求和。
- ✓ (2) 离散时间傅里叶变换的周期性, 以及其合成公式中的积分区间为 2π 。



总结（2）

- ❖ 常见基本信号的傅里叶变换



- ❖ 离散傅里叶变换的性质（见表5.1和5.2）



- ❖ 应用—>常系数微分方程的求解