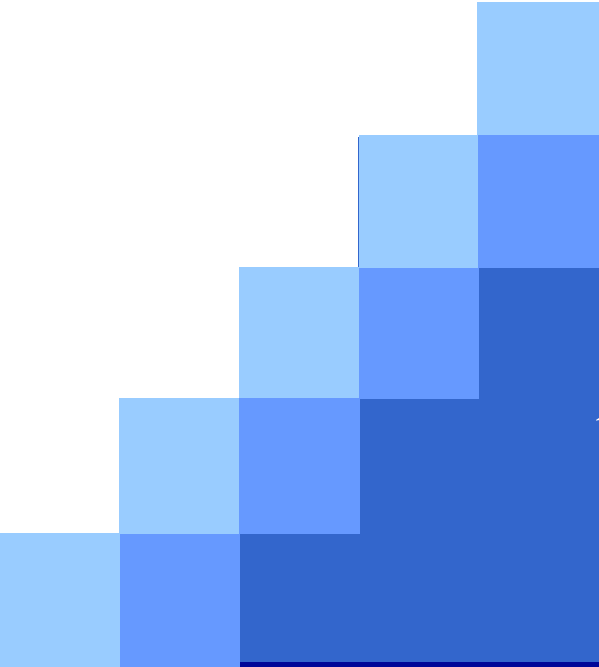




第3章 周期信号的 傅里叶级数表示

重点、难点内容

- ❖ LTI系统对复指数信号的响应
 - ▶ 特征函数、特征值
- ❖ 傅立叶级数变换对定义式
- ❖ 连续时间傅里叶级数性质（7个）
- ❖ 傅里叶级数收敛条件
- ❖ 傅里叶级数与LTI系统

学习目标

❖ 掌握傅里叶级数展开式



❖ 掌握周期信号通过LTI系统的分析方法

3.0 引言

- ❖ 第2章所学到的卷积和来表示、分析LTI系统，是基于将信号表示成一组移位单位脉冲的线性组合。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$$

- ❖ 和第二章一样，本章我们的讨论的出发点仍是将信号表示成一组基本信号的线性组合，不过这时的**基本信号是复指数**，所得到的表示就是连续时间或离散时间傅里叶级数和傅里叶变换。

- ❖ 同第2章的处理方法一样，那就是：根据叠加性质，LTI系统对任意一个由这些基本信号线性组合而成的输入信号的响应就是系统对这些基本信号单个响应的线性组合。在第2章中，这些单个响应皆为单位脉冲（冲激）响应的移位。

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- ❖ 在这一章中，我们将学习到，LTI系统对复指数信号的响应也具有有一种特别简单的形式.....

3.0 引言

➤ 时域分析方法的基础:

1. 信号在时域的分解。

2. LTI系统满足线性、时不变性。

➤ 从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求:

1. 本身简单，且LTI系统对它的响应能简便得到

2. 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号

3.1 历史回顾

- ❖ 傅里叶分析方法的建立有着一段漫长的历史。最早出现在古巴比伦时代，利用“三角函数和”（也就是成谐波关系的正弦和余弦函数或周期复指数函数的和）的概念，来预测天体运动。以及后来的古希腊的占星学家也利用这一想法。因为太阳系的行星运动是周期性的。
- ❖ 近代，这方面的研究始于瑞士数学家欧拉，他在1729年解运算行星运行轨道时，得出了这方面的一些结果。在1748年，欧拉在振动弦的研究工作中，得出了一个重要的结论。

❖ 图3.1是弦振动的几个标准振荡模式。 $f(t,x)$ 表示在某一时刻 t ，沿着弦的横向距离 x 处的垂直偏离(振幅)，则对任意固定时刻 t 来说，所有这些振荡模式均为 x 的正弦函数，并成谐波关系。

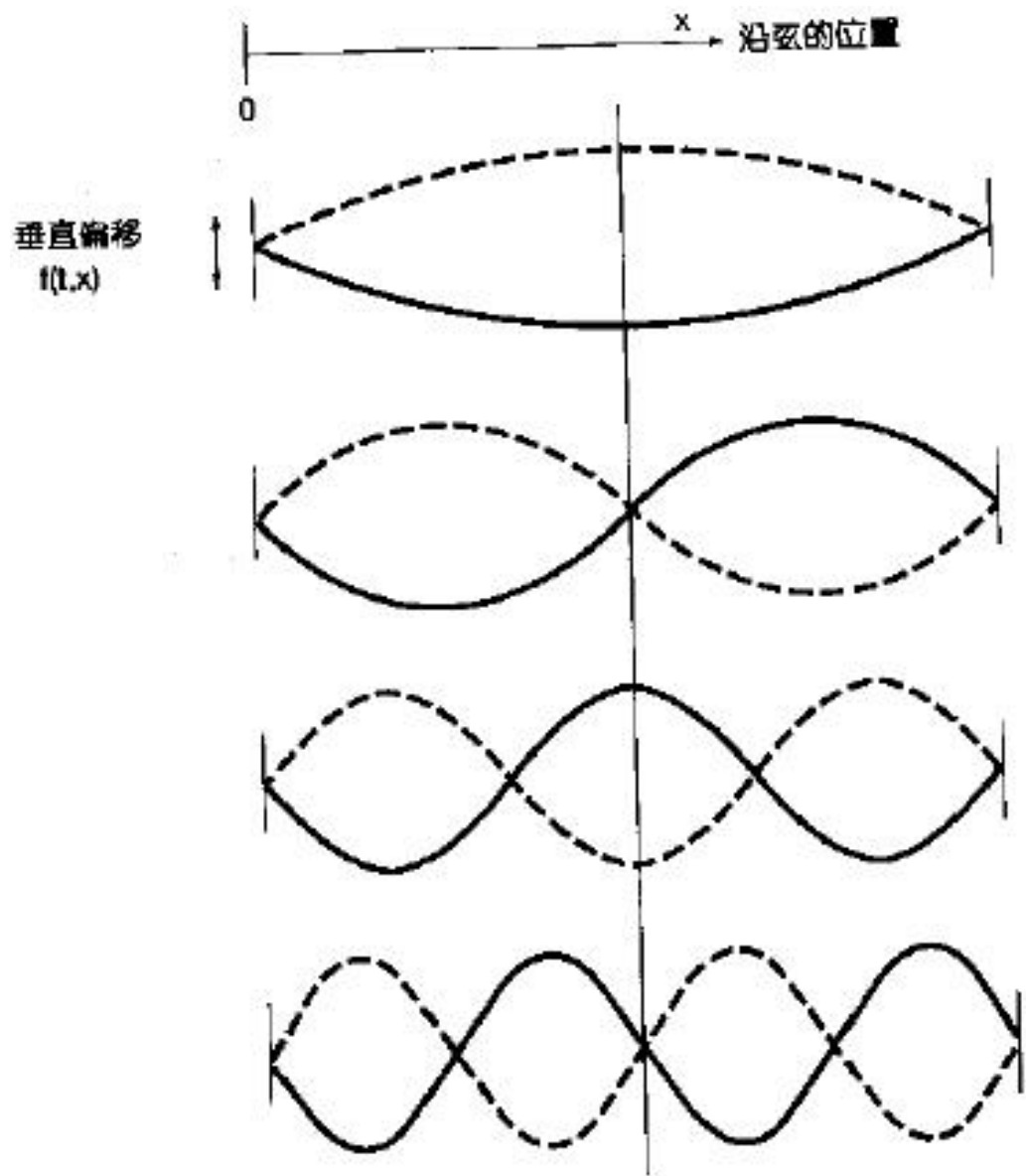


图 3.1 振动弦的标准振荡模(实线是在某一瞬时 t ，每一个振荡模的波形)

- ❖ 欧拉的结论：如果在某一时刻振动弦的形状是这些标准振荡模的线性组合，那么在其后任何时刻，振动弦的形状也都是这些振荡模的线性组合。另外，欧拉还证明了在该线性组合中，其后面的时间的加权系数可以直接从前面的加权系数中导出。
- ❖ 具体地说，就是：如果一个LTI系统的输入可以表示为周期复指数信号或正弦信号的线性组合，则输出也一定能表示成这种形式；并且输出线性组合中的加权系数是直接和输入中对应的系数有关。
- ❖ 伯努利、欧拉，最后都放弃了三角级数的想法。甚至拉格朗日在1759年还曾强烈批评使用三角级数来研究弦振动的想法。

❖ 傅里叶

❖ 1807年，
《热的传播》
发表时，



加入了这场三角级数的论战中

傅里叶向巴黎科学院递交了《热论文》，在研究热的传播和扩散现象时，他发现表示一个物体的温度分布

时，其解函数可以由三角函数的级数形式表示。他断言：“任何”周期信号都可以用成谐波关系的正弦函数来表示?!

❖ 评审《热的传播》论文，4名著名的数学家，其中3位即拉克劳克斯、孟济、拉普拉斯赞成发表傅里叶的论文，但第四位评委拉格朗日仍然顽固地坚持他50年前就已经提出过的关于拒绝接受三角级数的论点。由于拉格朗日的强烈反对，这份论文从未公开露面过，直到1822年《热的分析理论》一书才出现这一研究成果，并为法兰西研究院所接受。

- ❖ 但是，傅里叶的数学证明并不完善。直到1829年，狄里赫利才给出了精确的数学证明，并得出：在某些条件下，一个周期信号才可以用三角函数的级数（傅里叶级数）表示。
- ❖ 因此，傅里叶本人实际上对傅里叶级数的数学理论并没有作出什么大的贡献，但他的确洞察出这个级数表示法的潜在威力，并且在很大程度上，正是由于他的工作和断言，才大大激励和推动了傅里叶级数问题的深入研究。

3.1 历史的回顾



傅里叶 1768—1830

- ❖ 1768年生于法国
- ❖ 1807年提出“任何周期信号都可以用正弦函数的级数来表示”
- ❖ 拉格朗日反对发表
- ❖ 1822年首次发表“热的分析理论”
- ❖ 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件
- ❖

傅里叶的两个最重要的贡献

- ❖ “周期信号都可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”——傅里叶的第一个主要论点
- ❖ “非周期信号都可以用正弦信号的加权积分来表示”——傅里叶的第二个主要论点

❖ 正弦信号（从而傅里叶级数和变换）在科学和工程中有大量的实际应用领域，如前面欧拉研究过的振动问题，傅里叶研究的热传导问题。在自然界中，描述行星运动和反映地球气候的周期性变化中，很自然地会出现正弦信号。

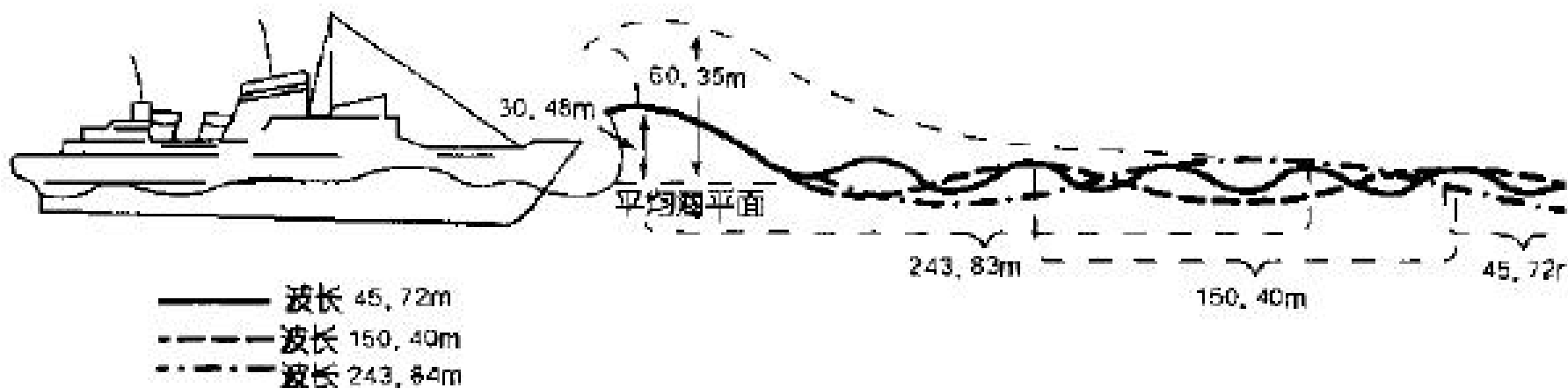


图 3.3 遭遇到三种波列叠加袭击的船只。这三种波各有不同的波长，当这些波处于互相增强的情况时，可以形成一个很大的波浪。在更为严峻的海浪下，可以形成由图中虚线指出的一个巨大的波浪。这种情况是否出现决定于这些分量的相对相位

- ❖ 傅里叶和他的同伴们在数学物理方面的最初研究都是集中在连续时间内的现象。与此同时，对于离散时间信号与系统的傅里叶分析方法却有着自己不同的历史渊源。
- ❖ 离散时间概念和方法是数值分析这门学科的基础，用于处理离散点集以产生数值近似的有关内插（例如螺旋CT成像的数学算法就是内插法）、积分和微分等方面的公式在17世纪的牛顿时代就研究过。
- ❖ 在已知一组天体观察数据序列下，预测某一天体运动的问题在18和19世纪曾吸引了高斯在内的众多科学家和数学家从事时间序列的研究（高斯《天体运动理论》，谷神星的准确预测发现）。

- ❖ 分析离散时间信号（变量），20世纪60年代，发现了快速傅里叶变换（FFT）算法，运算时间比常规傅里叶变换运算所需的时间减少了几个数量级。

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

- ❖ 在LTI系统中，将信号表示成基本信号的线性组合，这些基本信号应具有以下两个性质：
 1. 由这些基本信号能够构成应用相当广泛的一类信号
 2. LTI系统对每一个基本信号的响应应该十分简单，以使得系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。
- 💣 对于连续时间复指数信号 e^{st} 和离散时间复指数信号 z^n ，其中 s 和 z 都是复数，都具备上面两个性质。
- 💣 本节讨论集中在第二个性质上，并以此说明在LTI系统中为什么要应用傅里叶级数和傅里叶变换。

- ❖ 在研究LTI系统时，复指数信号的重要性在于：一个LTI系统对复指数信号的响应也是同样一个复指数信号，不同的只是在幅度上的变化。

连续时间： $e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$

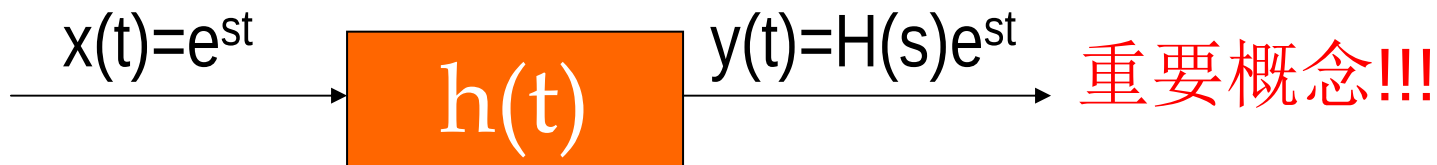
离散时间： $z^n \rightarrow H(z)z^n$

这里 $H(s)$ 和 $H(z)$ 是一个复振幅因子，一般说来是复变量 s 和 z 的函数。

- 💣 一个信号，若系统对该信号的输出响应仅是一个常数（可能是复数）乘以输入，则称该信号为系统的特征函数，而幅度因子称为系统的特征值。

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

(1) 连续时间 LTI 系统



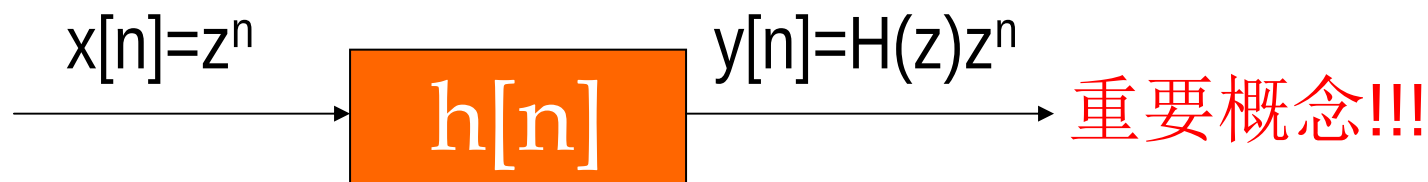
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \quad y(t) \neq x(t)H(s)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{s(t-\tau)}h(\tau)d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= e^{st}H(s) \end{aligned} \quad e^{st} \text{ (特征函数)}$$

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \quad H(s) \text{ (特征值)}$$

若一个LTI系统的输出响应仅是其输入信号乘以一个常数（可能是复常数），则称该输入信号为系统的特征函数，而幅度因子 $H(s)$ 称为特征值。

(2) 离散时间LTI系统



$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[n-k]h[k] \quad y[n] \neq x[n]H(z)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{(n-k)} h[k] = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^{-k} h[k]$$

$$= z^n H(z)$$

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

z^n (特征函数)

$H(z)$ (特征值)

(3) 如果输入是复指数的线性组合

❖ 只有复指数函数才能成为一切LTI系统的特征函数。

连续时间 LTI系统：

$$x(t) = \sum_{k=1}^N a_k e^{s_k t} \xrightarrow{LTI} y(t) = \sum_{k=1}^N a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

离散时间 LTI系统：

$$x[n] = \sum_{k=1}^N a_k z_k^n \xrightarrow{LTI} y[n] = \sum_{k=1}^N a_k H(z_k) z_k^n$$

❖ 欧拉在振动弦问题的研究中发现的正是这一事实，高斯及其他学者在时间序列分析中所用的也是这一点。这就促使傅里叶及其后的其他人考虑这样一个问题：究竟有多大范围的信号可以用复指数的线性组合来表示？！

- ❖ 一般说来，前面式中的 s 和 z 都可以是任意复数，但傅里叶分析仅限于这些变量的特殊形式。
- ❖ 连续时间下仅涉及 s 的纯虚部值，即 $s=j\omega$ ，因此仅考虑形式 $e^{j\omega t}$ 的复指数。
- ❖ 类似地，离散时间下， $z=e^{j\omega n}$ 形式的复指数

例3.1：已知输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 是一个延时为3的LTI系统，即 $y(t) = x(t-3)$ ，若输入复指数信号 $x(t)=e^{j2t}$
求：系统特征值 $H(j2)$

P₁₃₀ 例题 3.1

已知： $x(t) \xrightarrow{LTI} y(t) = x(t-3)$

问：

$$(1) \quad x(t) = e^{j2t} \xrightarrow{LTI} y(t) = ?$$

$$(2) \quad x(t) = \cos 4t + \cos 7t \xrightarrow{LTI} y(t) = ?$$

3.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

3.3.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

(1) 一般形式

成谐波关系的复指数信号集:

$$\Phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

基波周期: T

基波频率: $\omega_0 = 2\pi / T$

$e^{j\omega_0 t}, e^{-j\omega_0 t}$: 基波分量（一次谐波分量）

$e^{j2\omega_0 t}, e^{-j2\omega_0 t}$: 二次谐波分量

$e^{jN\omega_0 t}, e^{-jN\omega_0 t}$: N次谐波分量

因此，一个由谐波关系的复指数线性组合成的信号：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

该级数就是傅里叶级数，
 a_k 称为傅里叶级数的系数。

连续时间周期信号可以分解成无数多个复指数谐波分量

例1:

$$x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$$

显然该信号中，有两个谐波分量， $a_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ 为相应分量的加权因子，即傅里叶系数。

例2: $x(t) = \cos \omega_0 t + 2 \cos 3\omega_0 t$

$$= \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}$$

在该信号中，有四个谐波分量，即 $k = \pm 1, \pm 3$ ，时对应的谐波分量。

P₁₃₁ 例题3.2

$$\text{已知: } x(t) = x(t+T) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

$$a_0 = 1, a_1 = a_{-1} = \frac{1}{4}, a_2 = a_{-2} = \frac{1}{2}, a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3}$$

则,将具有相同谐波分量合在一起,可重新写成:

$$x(t) = ?$$

例3.2 有一周期信号 $x(t)$ 其基波频率为 2π ，写出3.25式的形式为

$$x(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k e^{jk2\pi t}$$

其中 $a_0=1$ ， $a_1=a_{-1}=1/4$ ， $a_2=a_{-2}=1/2$ ， $a_3=a_{-3}=1/3$
将具有同一基波频率的谐波分量合在一起，得

$$x(t) = 1 + \frac{1}{4}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t}) + \frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}) + \frac{1}{3}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})$$

再用欧拉公式， $x(t)$ 可写成

$$x(t) = 1 + \frac{1}{2} \cos 2\pi t + \cos 4\pi t + \frac{2}{3} \cos 6\pi t \quad \text{式3.28}$$

式3.28是实周期信号傅里叶级数的另一种表现形式。

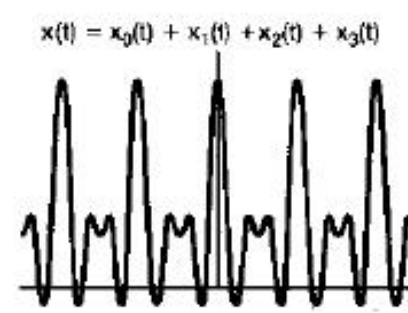
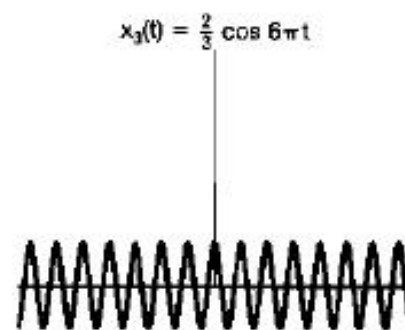
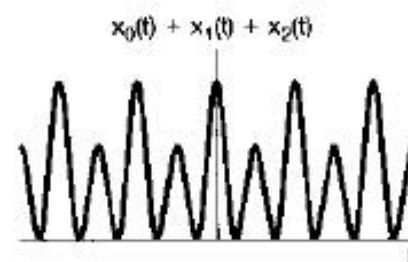
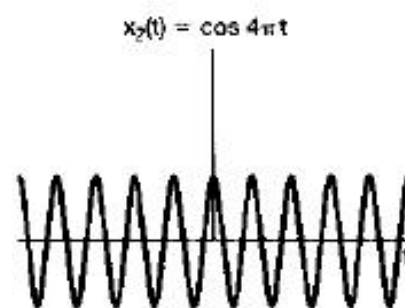
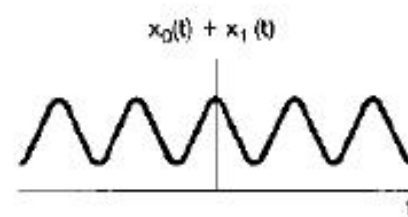
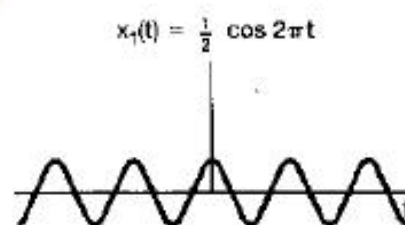
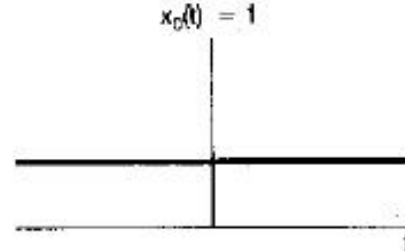


图 3.4 例 3.2 中的 $x(t)$ 作为成谐波关系的正弦信号的线性组合来构成的图解说明

❖ 若 $x(t)$ 是一个实信号，而且能表示成(3.25)式的形式，那么因为 $x^*(t)=x(t)$ ，即共轭，有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t}$$

在该求和式中，以 $-k$ 代替 k ，则

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t}$$

和(3.25)式比较，则要求 $a_k = a_{-k}^*$ ，或者

$$a_k^* = a_{-k} \quad \text{式3.29}$$

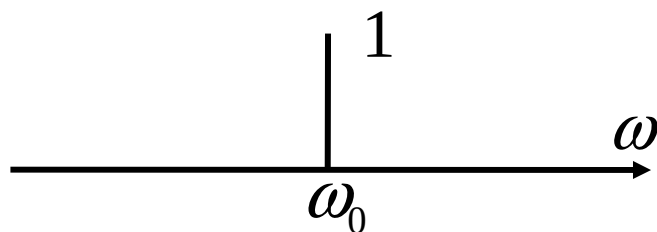
例3.2就属于这种情况，在那里 a_k 还是实数，且有 $a_k = a_{-k}$

补充：频谱（Spectral）的概念

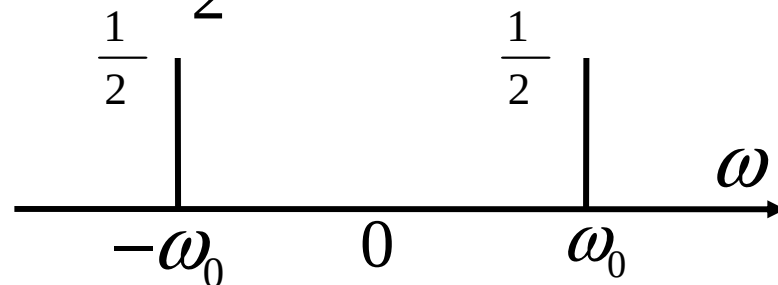
信号集 $\Phi_k(t)$ 中的每一个信号，除了成谐波关系外，每个信号随时间 t 的变化规律都是一样的，差别仅仅是频率不同。

在傅里叶级数中，各个信号分量（谐波分量）间的区别也仅仅是幅度（可以是复数）和频率不同。因此，**可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率。**

分量 $e^{j\omega_0 t}$ 可表示为

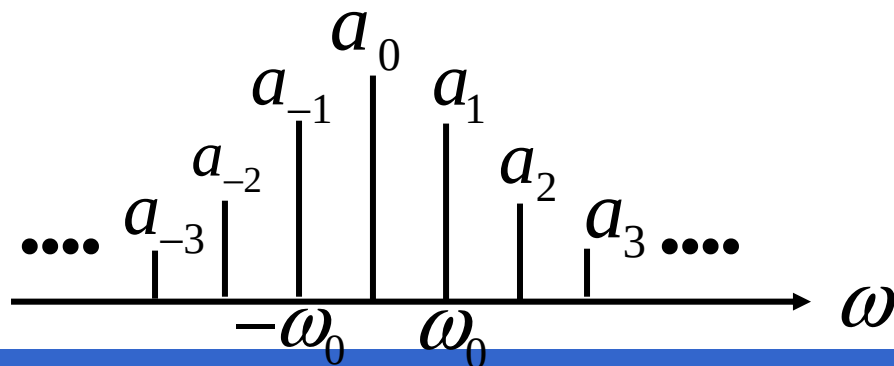


$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$ 表示为



因此，当把周期信号 $x(t)$ 表示为傅里叶级数

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 时，就可以将 $x(t)$ 表示为



这样绘出的图
称为**频谱图**

频谱图其实就是将 a_k 随频率的分布表示出来，即 $a_k \sim \omega$ 的关系。由于信号的频谱完全代表了信号，研究它的频谱就等于研究信号本身。因此，这种表示信号的方法称为频域表示法。

幅度谱： $|a_k|$ 反映谐波分量的幅值随谐波频率的变换。

相位谱：
$$\varphi_k = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\operatorname{Im}(a_k)}{\operatorname{Re}(a_k)} \right)$$

反映谐波分量相位随谐波频率的变换情况。

傅里叶级数的其它形式 (1)

若 $x(t)$ 是实信号, 则有 $x(t) = x^*(t)$, 于是

$$x^*(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^* e^{-jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{-k}^* e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$\therefore a_k = a_{-k}^* \quad \text{或} \quad a_k^* = a_{-k}$$

例3.2就属于这种情况, 在那里 a_k 还是实数, 且有 $a_k = a_{-k}$

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_{-k} e^{-jk\omega_0 t}] = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + (a_k e^{jk\omega_0 t})^*] \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2\operatorname{Re}[a_k e^{jk\omega_0 t}] \end{aligned}$$

若将以 a_k 极坐标形式给出

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}$$

傅里叶级数的其它形式 (2)

若令 $a_k = A_k e^{j\theta_k}$, 则 a_0 为实数。于是

$$a_k e^{jk\omega_0 t} = A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}[a_k e^{jk\omega_0 t}] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re}[A_k e^{j(k\omega_0 t + \theta_k)}]$$

$$\therefore x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k)$$

——傅里叶级数的三角函数表示式

傅里叶级数的其它形式 (3)

若令 $a_k = B_k + jC_k$ 则

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} 2 \operatorname{Re}[a_k e^{jk\omega_0 t}] = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} \operatorname{Re}[(B_k + jC_k)(\cos k\omega_0 t + j \sin k\omega_0 t)]$$

$$\therefore x(t) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{+\infty} [B_k \cos k\omega_0 t - C_k \sin k\omega_0 t]$$

——傅里叶级数的另一种三角函数形式

3.3.2 连续时间周期信号傅里叶级数表示的确定



如何确定 a_k

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \cdots + a_{-1} e^{-j\omega_0 t} + a_0 + a_1 e^{j\omega_0 t} + \cdots$$

分析过程:两边同乘 $e^{-jn\omega_0 t}$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

$$\therefore \int_{\langle T \rangle} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \begin{cases} T, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} = T \cdot \delta[k - n]$$

$$\therefore \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{\langle T \rangle} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = a_n T$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

周期连续信号的傅里叶级数:

$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} & (\text{综合公式}) \\ a_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt & (\text{分析公式}) \end{cases}$$

简写为: $x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$

a_k : 傅里叶级数 (频谱系数)

- ❖ 上述过程归纳如下：如果 $x(t)$ 有一个傅里叶级数表达式（即 $x(t)$ 能表示成一组成谐波关系的复指数信号的线性组合），那么傅里叶级数中的系数就由3.37式确定。定义一个连续时间周期信号的傅里叶级数：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \quad \text{式3.38}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt \quad \text{式3.39}$$

❖ 式3.38和式3.39正是18世纪中叶欧拉和拉格朗日所研究的，然而，他们两人都放弃了这条分析途径，没有去研究这样一个问题：**究竟有多大一类的周期信号可以表示成这种形式？**在讨论这个问题之前，我们先看看几个例子来说明傅里叶级数的展开。

例3.3 考虑信号 $x(t) = \sin \omega_0 t$ ，展开成傅里叶级数

例3.4 信号 $x(t) = 1 + \sin \omega_0 t + 2 \cos \omega_0 t + \cos(2\omega_0 t + \pi/4)$ ，
展开成傅里叶级数

P₁₃₅ 例题3.3

已知： $x(t) = \sin(\omega_0 t)$

将 $x(t)$ 展成 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 的形式, 并确定 a_k

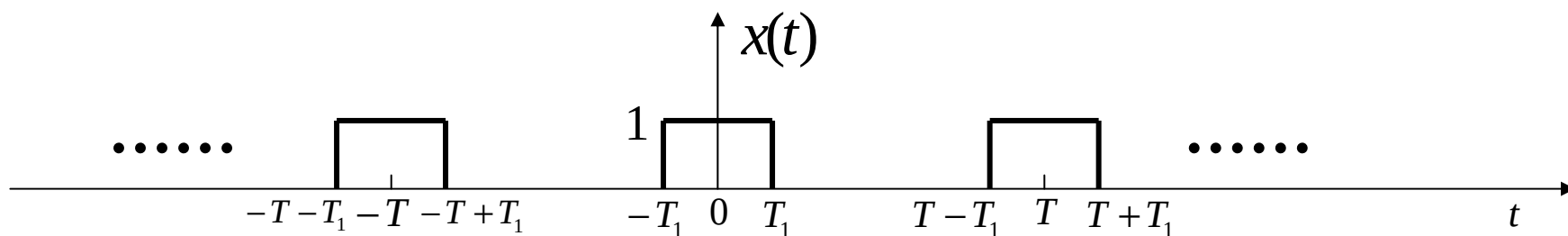
P₁₃₅ 例题 3.4

已知: $x(t) = 1 + \sin(\omega_0 t) + 2\cos(\omega_0 t) + \cos(2\omega_0 t + \frac{\pi}{4})$

将 $x(t)$ 展成 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 的形式, 并确定 a_k .

P₁₃₅ 例题3.5

已知： $x(t) = x(t + T)$, 且 $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < \frac{T}{2} \end{cases}$



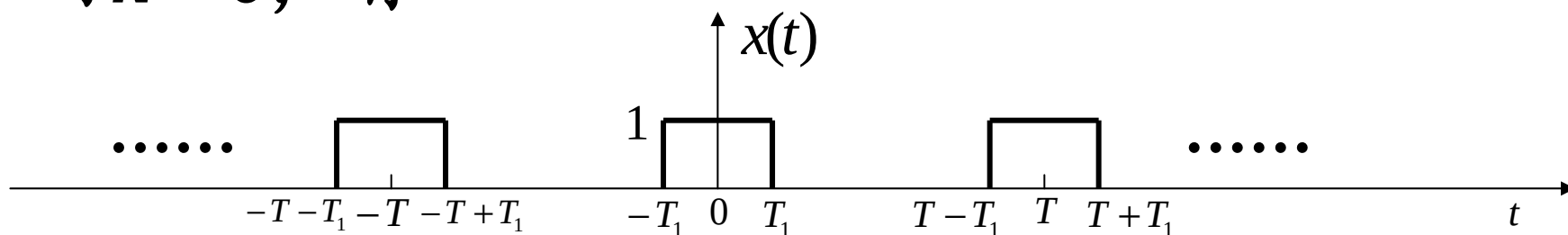
将 $x(t)$ 展成 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 的形式, 并确定 a_k .

结论非常重要!

例3.5 解：由于 $x(t)$ 对于 $t=0$ 是对称的，因此在一个周期内积分取积分区间 $-T/2 \leq t \leq T/2$ 最方便。
首先对 $k=0$ 有

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} dt = \frac{2T_1}{T}$$

- 对 $k \neq 0$, 有



$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T}$$

$$= \frac{2T_1}{T} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} = \frac{2T_1}{T} \text{Sa}(k\omega_0 T_1)$$

其中 $\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$

❖ 特别地，当 $T=4T_1$ 时， $x(t)$ 是一个一半为0，一半为1的方波，这时

$$a_0 = \frac{1}{2}$$

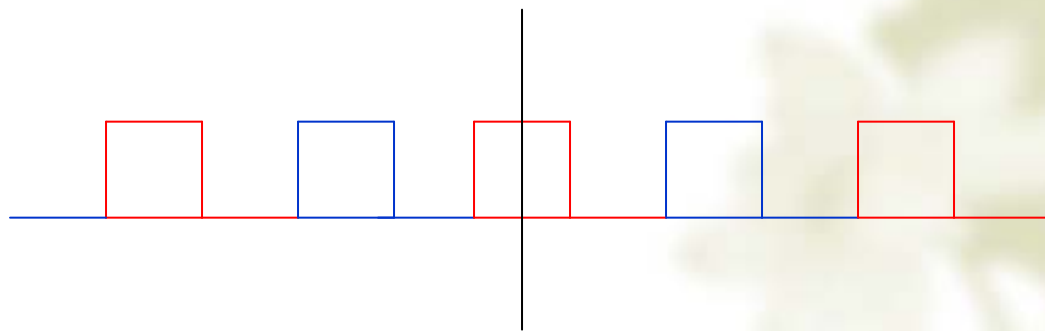
$$a_k = \frac{\sin(k\pi/2)}{k\pi}, \quad k \neq 0$$

当 k 为偶数（不为0）时， $a_k=0$ ；

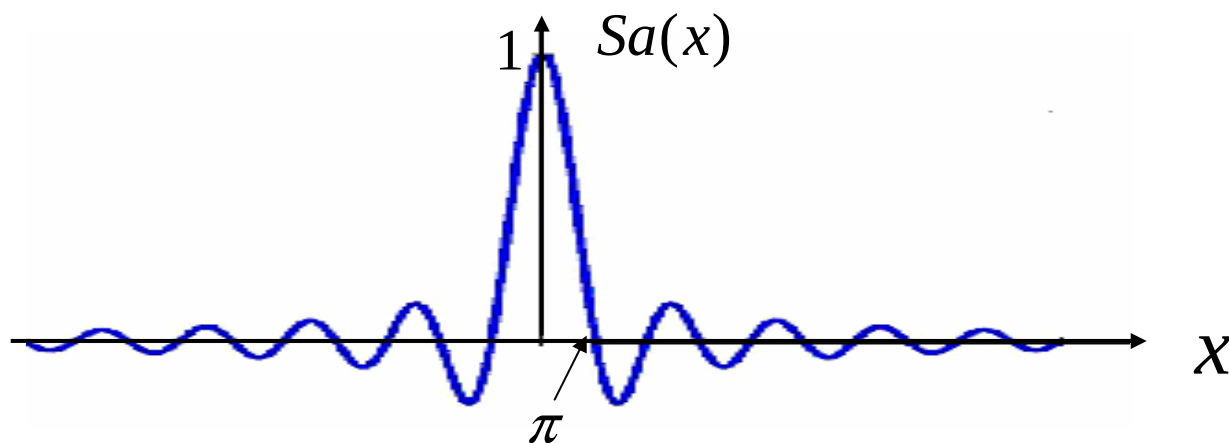
k 为奇数时， $\sin(k\pi/2)$ 相继在 ± 1 之间交替变化。

因此 $a_0 = \frac{1}{2}$,

$$a_1 = a_{-1} = \frac{1}{\pi}, \quad a_3 = a_{-3} = \frac{1}{3\pi}, \quad a_5 = a_{-5} = \frac{1}{5\pi}, \dots$$

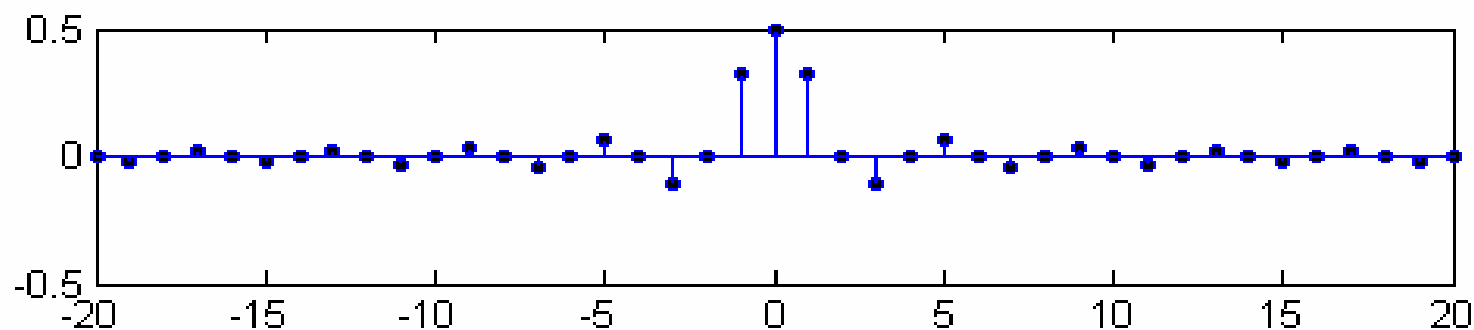


周期性矩形脉冲信号的频谱

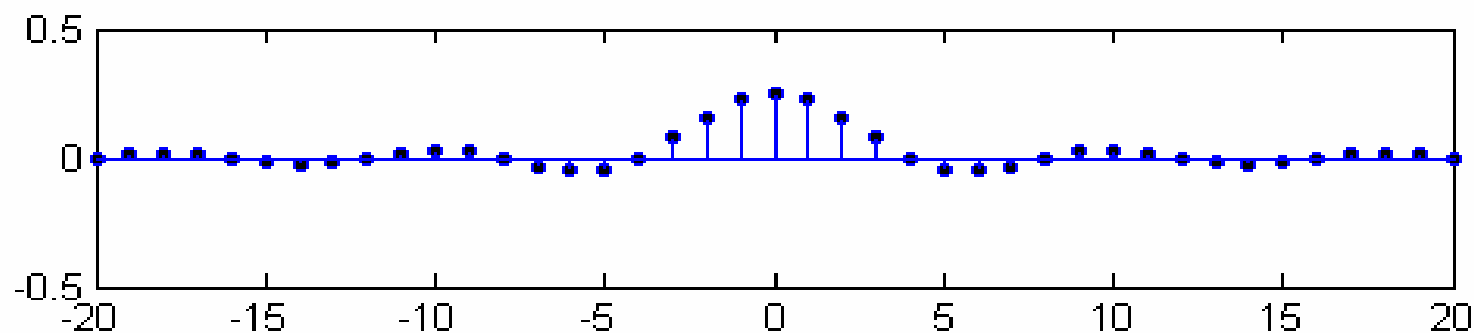


根据 a_k 可绘出 $x(t)$ 的频谱图。 $\frac{2T_1}{T}$ 称为占空比

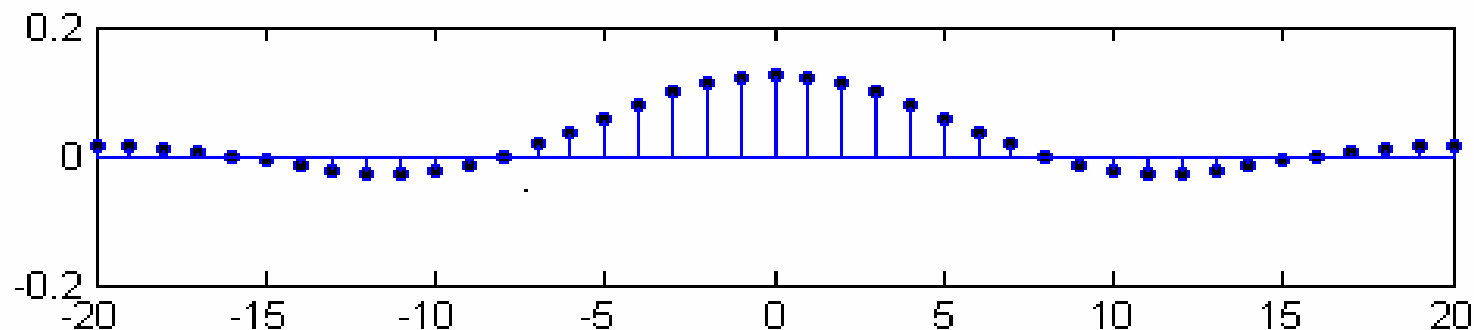
T 不变 $T_1 \downarrow$ 时



$$\frac{2T_1}{T} = \frac{1}{2}$$



$$\frac{2T_1}{T} = \frac{1}{4}$$



$$\frac{2T_1}{T} = \frac{1}{8}$$

作业

➤ 3.1 3.21 3.22(d)(e)

3.4 傅里叶级数的收敛

- ❖ 欧拉和拉格朗日对例3.3和例3.4的结果都很满意，但他们都反对例3.5的情况。因为例3.5中 $x(t)$ 是不连续的，而每个谐波分量却是连续的。另一方面，傅里叶也研究了同一个例子，认为方波的傅里叶级数表示也是对的。事实上，傅里叶坚持的是任何周期信号都能用傅里叶级数表示！
- ❖ 傅里叶的“任何”论并不完全正确。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

❖ 这一节来研究用傅氏级数表示周期信号的普遍性问题，即满足什么条件的周期信号可以表示为傅里叶级数。

一. 傅里叶级数是对信号的最佳近似

二、傅里叶级数的收敛

三.Gibbs现象

❖ 当利用式3.39来求得傅里叶级数的系数时

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk(2\pi/T)t} dt$$

有可能积分不收敛，从而导致系数 a_k 无穷大。所以，能够用傅里叶级数来表示的一类周期信号 $x(t)$ 是它在**一个周期内能量有限的信号**，即

$$\int_T |x(t)|^2 dt < \infty$$

当这一条件满足时，就能保证用3.39式求得的系数是 a_k 有限值。

一. 傅里叶级数是对信号的最佳近似

用有限个谐波分量近似 $x(t)$ 时, 有

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

误差为 $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} - \sum_{k=-N}^{+N} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{|k|>N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

在均方误差最小的准则下, 要使 $\lim_{N \rightarrow \infty} \int_T |e_N(t)|^2 dt$ 最小可以证明, 此时 a_k 应满足:

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \text{——这就是傅氏级数的系数}$$

结论: 在均方误差最小的准则下, 傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

- ❖ 由此得到：如果 $x(t)$ 能展开傅里叶级数，那么用成谐波关系的有限项复指数是近似这一无穷级数 $x(t)$ 的最佳近似。随着 N 的增大， E_N 减小，那么

$$N \rightarrow \infty, E_N \rightarrow 0$$

- ❖ 如果定义一个误差函数为

$$e(t) = x(t) - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

那么就有 $\int_T |e(t)|^2 dt = 0$ 式3.54

一个周期内误差能量为零，并不意味着信号 $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示 $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$ 在每一个 t 值上都相

等，而只表示两者没有任何能量上的差别。

❖ 当 $x(t)$ 在一个周期内具有有限能量就保证收敛，这时3.54式所代表的是 $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示之间没有能量上的差别。因为实际系统都是对信号能量作出响应，从这个观点出发， $x(t)$ 和它的傅里叶级数表示就是不可区分的了。

二、傅里叶级数的收敛

傅里叶级数收敛的两层含义：

① a_k 是否存在？

② 级数是否收敛于 $x(t)$ ？

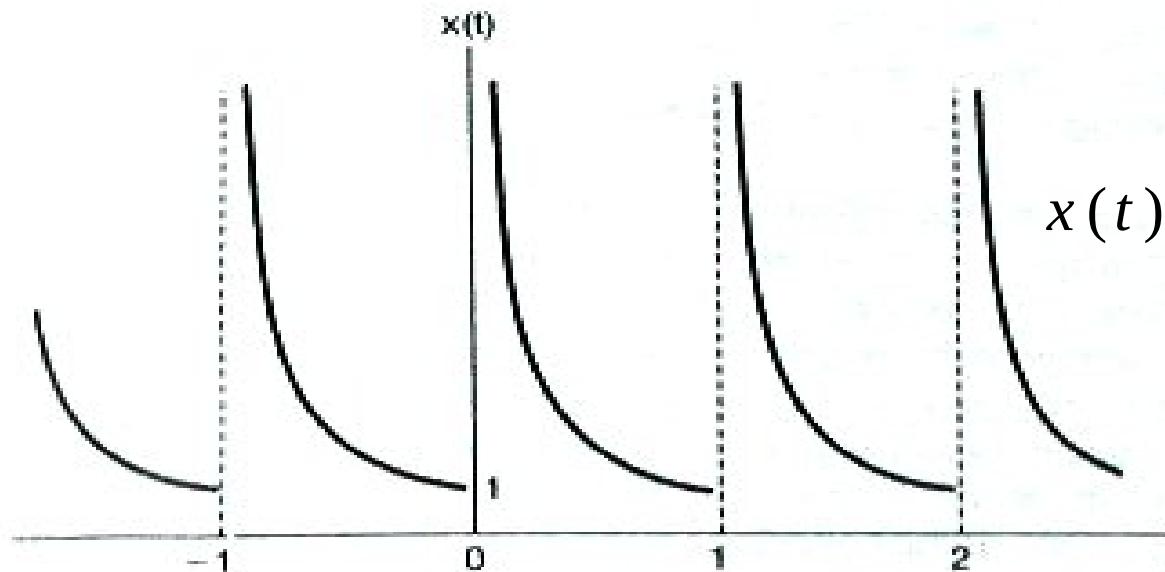
Dirichlet条件狄里赫利条件

条件1: 绝对可积 在任何周期内, $x(t)$ 必须

绝对可积, 即

$$\int_T |x(t)| dt < \infty$$

与周期内能量条件相同, 这一条件保证了每一系数 a_k 都是有限值。



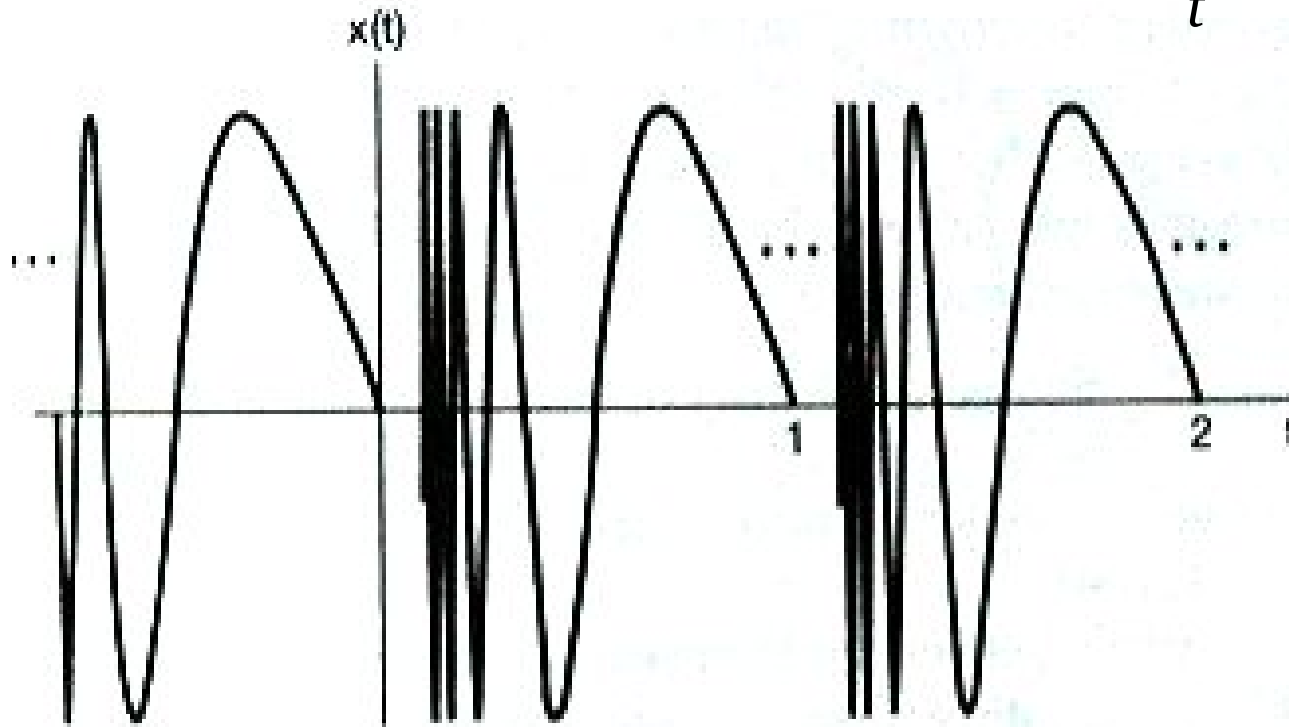
$$x(t) = \frac{1}{t}, 0 < t \leq 1$$

纠正错误 P_{139}

$$|a_k| \leq \frac{1}{T} \int_T |x(t) e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |x(t)| dt$$

条件2: 单个周期内, $x(t)$ 的最大最小值的数目有限

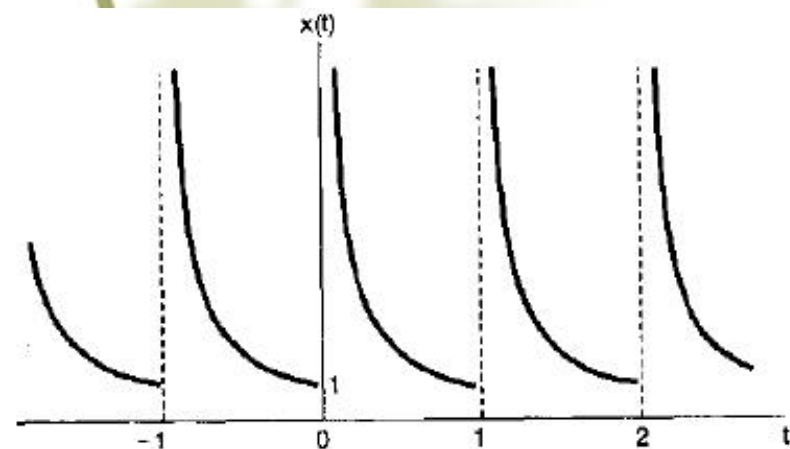
$$x(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), 0 < t \leq 1$$



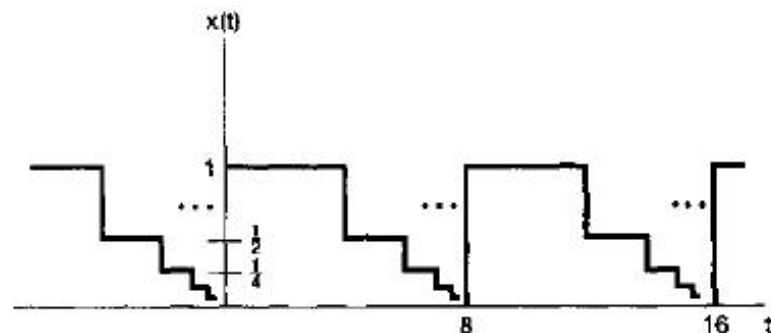
条件3:只有有限个不连续点,而且在这些不连续点上,函数是有限值。



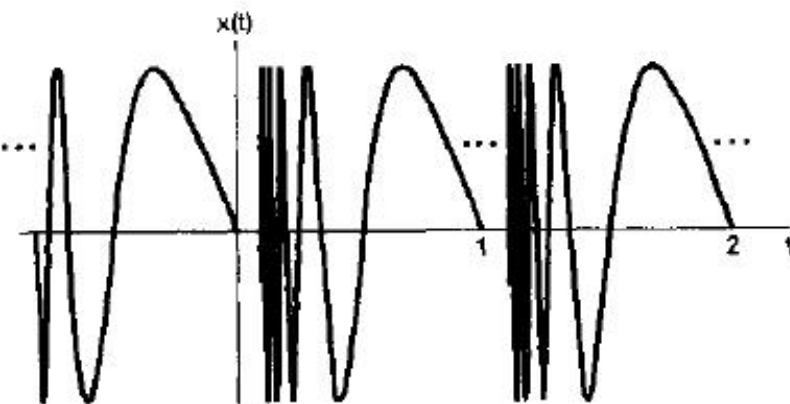
❖ 不满足狄里赫利条件的信号



(a)



(c)



(b)

图 3.8 不满足狄里赫利条件的信号：

- (a) 信号 $x(t) = 1/t, 0 < t \leq 1$ 。周期为 1 (该信号违反狄里赫利第一条件)；
- (b) 由 (3.57) 式定义的周期信号，它不满足第二条件；
- (c) 周期为 8 的一个周期信号，它不满足第三条件 [该信号 $x(t)$ 的值在区间 $0 \leq t < 8$ 内，随着从 t 到 8 的距离减半， $x(t)$ 的值也减半，即 $x(t) = 1, 0 \leq t < 4; x(t) = 1/2, 4 \leq t < 6; x(t) = 1/4, 6 \leq t < 7; x(t) = 1/8, 7 \leq t < 7.5, \dots$ 等等]

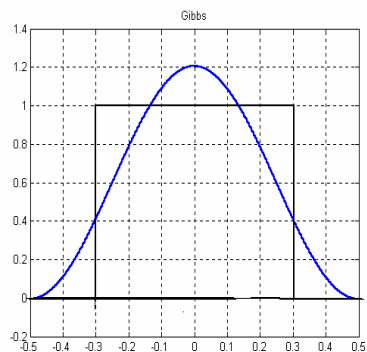
❖ 总结：

对于一个不存在任何间断点的周期信号而言，傅里叶级数收敛，并且在每一点（ t 值）上该级数都等于原来的信号 $x(t)$ 。

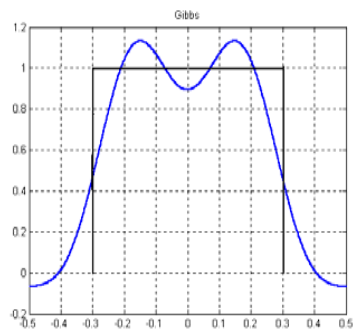
对于在一个周期内存在有限个间断点的周期信号而言，除开那些孤立的不连续点外，其余所有点上傅里叶级数都等于原来的 $x(t)$ ；而在那些间断点上，傅里叶级数收敛于不连续点处的值的平均值。这种情况下，原来信号和它的傅里叶级数表示之间没有任何能量上的差别，两者仅仅是在那些孤立点处有差异，而在任意区间内的积分是一样的。

三.Gibbs现象

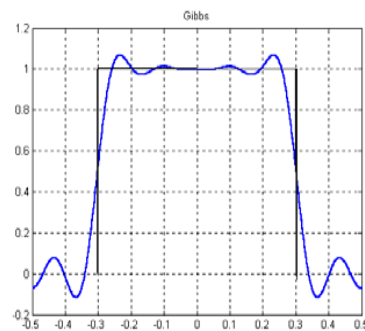
满足 **Dirichlet** 条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于 $x(t)$ 的。特别当 $x(t)$ 具有间断点时，在间断点附近，如何收敛于 $x(t)$ ？



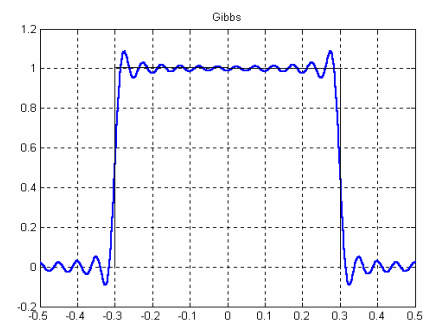
$N = 1$



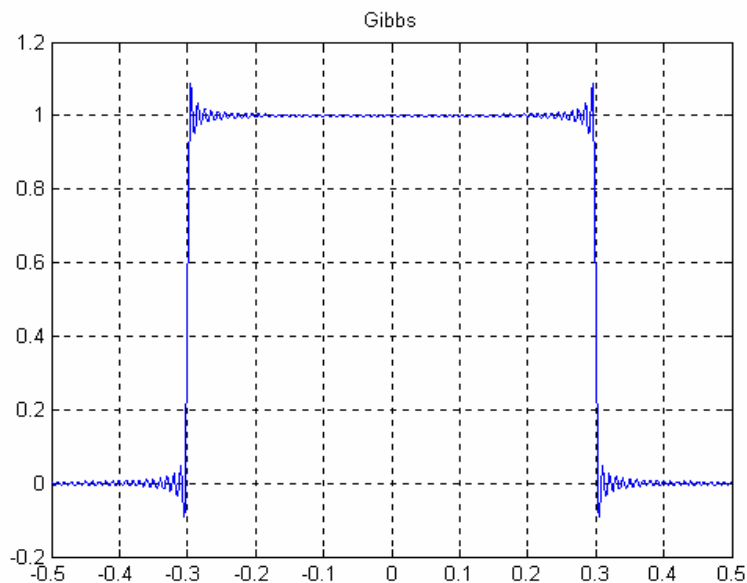
$N = 3$



$N = 7$



$N = 19$



$N = 100$

动画演示

Gibbs现象表明：

用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近不可避免的会出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

3.5 连续时间傅里叶级数 (CFS) 的性质

Continuous-Time Fourier Series

学习这些性质，有助于
对概念的理解和对信号进
行级数展开。

- ✓ 线性
- ✓ 时移
- ✓ 反转
- ✓ 尺度变换
- ✓ 相乘
- ✓ 共轭及共轭对称
- ✓ 帕斯瓦尔定理

3.5.1 线性

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{CFST} b_k$$

$$\text{令 } z(t) = Ax(t) + By(t)$$

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{CFST} Aa_k + Bb_k$$

3.5.2 时移

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$$

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{CFST} e^{-jk\omega_0 t_0} a_k = e^{-jk(2\pi/T)t_0} a_k$$

这个性质一个结果就是：当一个周期信号在时间上移位时，它的傅里叶级数系数的 模 保持不变，即

$$|b_k| = |a_k|$$

3.5.3 时间反转

当一个周期信号 $x(t)$ 经过时间反转后，其周期 T 仍然保持不变，现确定 $y(t)=x(-t)$ 的傅里叶级数的系数

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t}$$

作变量置换 $k = -m$ 得

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_{-m} e^{jm\omega_0 t}$$

上式的右边就具有傅里叶级数的展开形式，所以

$$b_k = a_{-k}$$

❖ 也就是说，若 $x(t) \xrightarrow{CFST} a_k$

那么 $x(-t) \xrightarrow{CFST} a_{-k}$

换句话说，就是时间反转的连续时间周期信号所对应的傅里叶级数系数就是原信号傅里叶级数系数序列的时间反转。

❖ 时间反转性质的一种结果就是：若 $x(t)$ 是偶函数，即 $x(t)=x(-t)$ ，则其傅里叶级数系数也为偶，即 $a_k=a_{-k}$ ；若 $x(t)$ 是奇函数，即 $-x(t)=x(-t)$ ，则其傅里叶级数系数也为偶，即 $-a_k=a_{-k}$ 。

3.5.4 时域尺度变换

一般说来，这种运算会改变受到变换的信号周期的，若 $x(t)$ 是周期的，周期为 T ，那么 $x(at)$ ， a 为一正实数，就是一个周期为 T/a 的周期信号，且

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

- ❖ 虽然傅里叶级数的系数没有变化，但由于基波频率变化了，傅里叶级数表示改变了。

❖ 3.5.5 相乘

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个周期为 T 的周期信号，且有

$$x(t) \xrightarrow{CFST} a_k$$

$$y(t) \xrightarrow{CFST} b_k$$

因为乘积也是周期为 T 的，展开成傅里叶级数，其系数 h_k 可以用 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的傅里叶系数表示

$$x(t)y(t) \xrightarrow{CFST} h_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

❖ 上式右边的和式可以看作是 $x(t)$ 的傅里叶系数序列与 $y(t)$ 的傅里叶系数序列的**离散时间卷积**。

3.5.3 反转

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$$

$$x(-t) \xleftrightarrow{CFST} a_{-k}$$

3.5.4 时域尺度变换

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$$

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t}$$

3.5.5 相乘

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{CFST} b_k$$

$$x(t)y(t) \xleftrightarrow{CFST} h_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$$

3.5.6 共轭及共轭对称性

将一个周期信号 $x(t)$ 取它的复数共轭，其傅里叶级数系数有

$$x(t) \xrightarrow{CFST} a_k$$

$$x^*(t) \xrightarrow{CFST} a_{-k}^*$$

- ❖ 对于 $x(t)$ 是实函数，就有 $x(t)=x^*(t)$ ，那么傅里叶级数系数就一定也是共轭的，即 $a_k^*=a_{-k}$ ，因此 a_0 就为实数，且有 $|a_k|=|a_{-k}|$ ；若 $x(t)$ 同时还是偶函数，则 $a_k^*=a_{-k}=a_k$ ，这就是说，若 $x(t)$ 为**实且为偶函数**，那么它的傅里叶级数系数也为**实且为偶函数序列**。类似地，若 $x(t)$ 为**实且为奇函数**，那么它的傅里叶级数系数也为**纯虚数且为奇函数序列**，并有 $a_0=0$ 。

3.5.7 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理

❖ 帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

上式的左边是周期信号 $x(t)$ 在一个周期内的平均功率，而同时有

$$\frac{1}{T} \int_T |a_k e^{jk\omega_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T} \int_T |a_k|^2 dt = |a_k|^2$$

所以 $|a_k|^2$ 就是 $x(t)$ 中第 k 次谐波的平均功率。

❖ 帕斯瓦尔定理所说的就是：一个周期信号的总平均功率就等于它的全部谐波分量的平均功率之和。

3.5.6 共轭及共轭对称性

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k \quad x^*(t) \xleftrightarrow{CFST} a_{-k}^*$$

3.5.7 连续时间周期信号的帕斯瓦尔定理

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

表明：一个周期信号的平均功率就等于它所有谐波分量的平均功率之和。

微积分性质

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k$$

$$x^{(n)}(t) \xleftrightarrow{CFST} (jk\omega_0)^n \cdot a_k$$

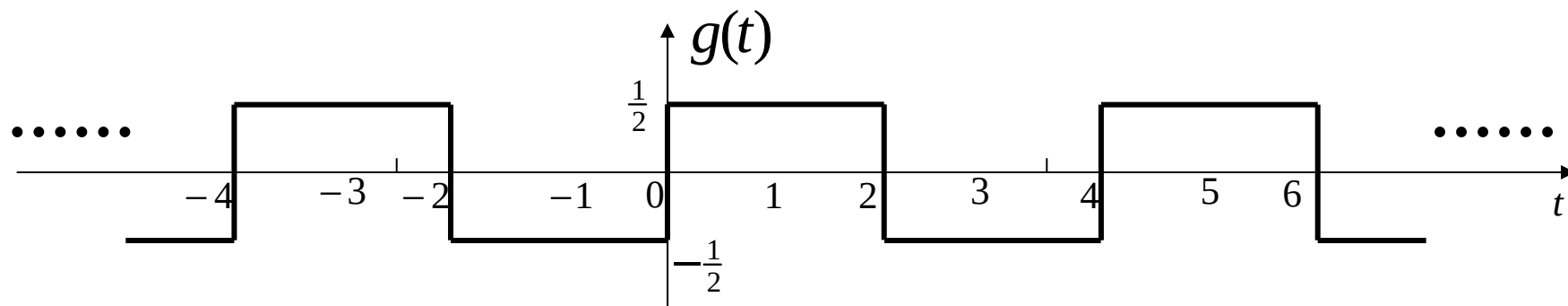
$$x^{(-1)}(t) \xleftrightarrow{CFST} (jk\omega_0)^{-1} \cdot a_k$$

要求: $x^{(-1)}(t) = x^{(-1)}(t+T)$, 且 $a_0 = 0$.

重要 掌握表3.1

P₁₄₇ 例题 3.6

已知： $g(t)$ 波形.其中：基波周期 $T = 4$.求： $g(t) \xleftrightarrow{CFST} d_k$.



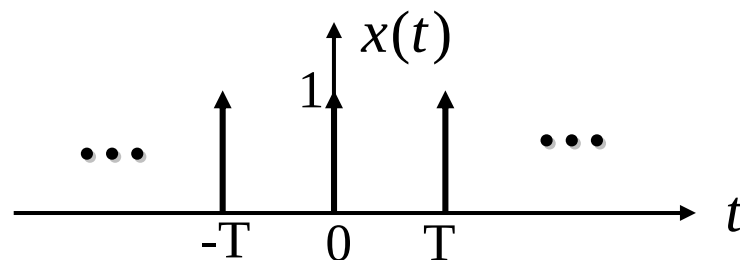
分析：与例3.5比较, $g(t) = x(t-1) - \frac{1}{2}$ ($T_1 = 1, T = 4$)

$$x(t) \xleftrightarrow{CFST} a_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi} = \frac{\sin(\pi k/2)}{k\pi}$$

利用线性和时移性, 可求. $d_k = \begin{cases} a_k e^{-j\frac{k\pi}{2}}, & k \neq 0 \\ a_0 - \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}$

$$d_k = b_k + c_k$$

例2(3-8): $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$

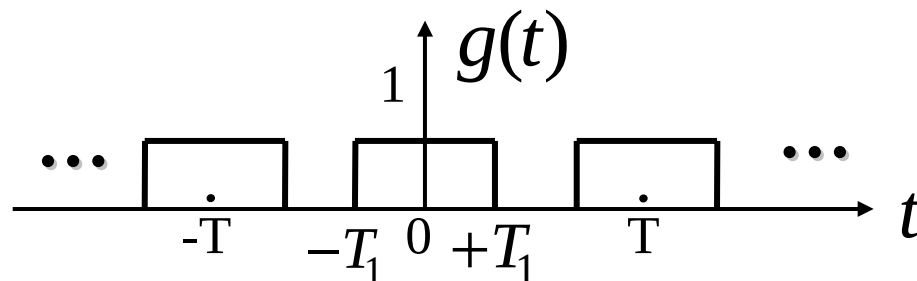


$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

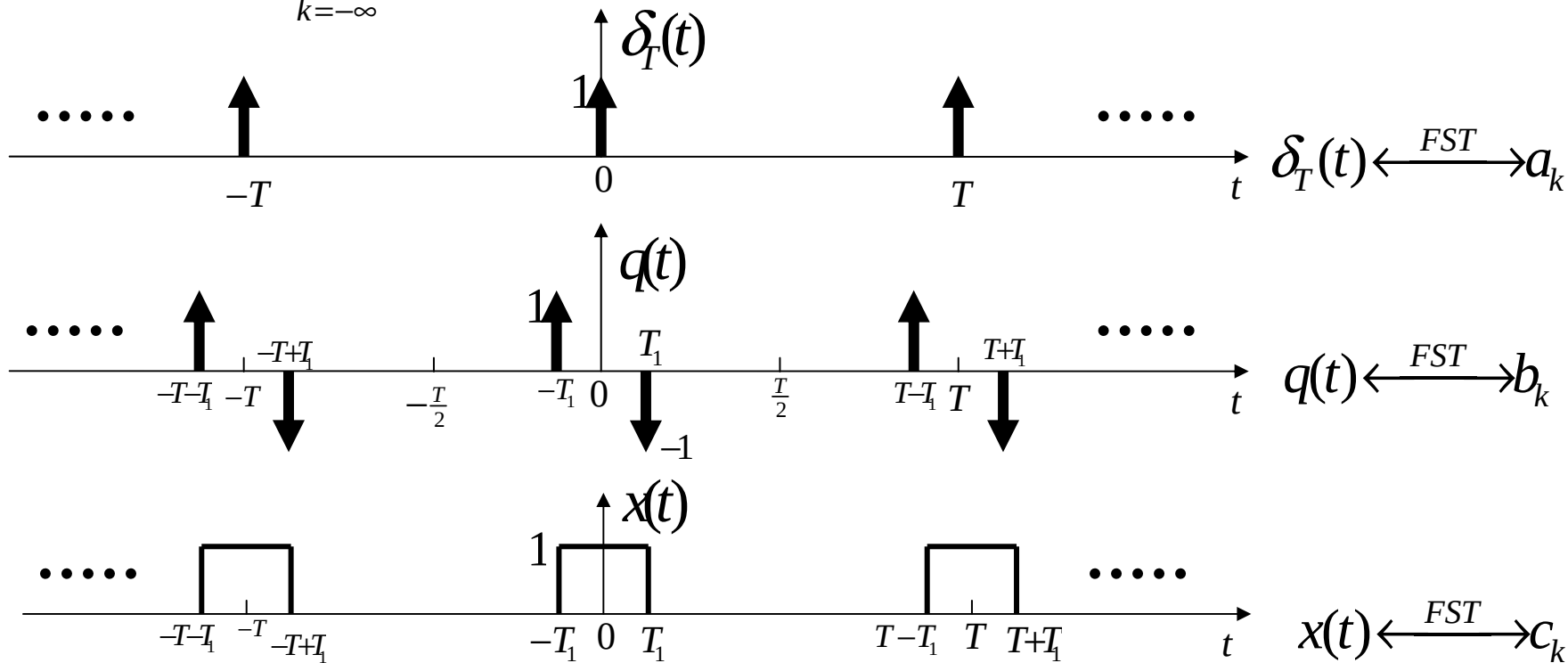
$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T} e^{-jk\omega_0 0} = \frac{1}{T} \end{aligned}$$

如何用例2表示周期方波？



P₁₄₈ 例题 3.8

已知: $\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$. 求: $\delta_T(t) \xleftrightarrow{FST} d_k$.



$$a_k = \frac{1}{T} \quad b_k = a_k (e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1}) = \frac{j2\sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

$$b_k = jk\omega_0 \cdot c_k \Rightarrow c_k = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$

利用傅里叶级数性质,就可以计算出 $q(t)$ 和 $g(t)$ 的傅里叶级数系数,而勿需经由傅里叶级数分析公式去直接计算。首先,根据时移性质和线性性质,由(3.77)式, $q(t)$ 的傅里叶级数系数 b_k 可以用 $x(t)$ 的傅里叶系数 a_k 表示为

$$b_k = e^{jk\omega_0 T_1} a_k - e^{-jk\omega_0 T_1} a_k \quad \left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right]$$

式中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 。利用(3.76)式,就有

$$b_k = \frac{1}{T} [e^{-jk\omega_0 T_1} - e^{jk\omega_0 T_1}] = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{T}$$

最后,因为 $q(t)$ 是 $g(t)$ 的导数,所以由表 3.1 的微分性质,直接写出

$$b_k = jk\omega_0 c_k \quad (3.78)$$

式中 c_k 是 $g(t)$ 的傅里叶级数系数。于是

$$c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2j\sin(k\omega_0 T_1)}{jk\omega_0 T} = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}, \quad k \neq 0 \quad (3.79)$$

式中用到 $\omega_0 T = 2\pi$ 。注意,(3.79)式对 $k \neq 0$ 成立,因为由(3.78)式,对 $k=0$ 不能解得 c_0 。然而, c_0 就是 $g(t)$ 在一个周期内的平均值,由图 3.12(b)凭直观就可求出为

$$c_0 = \frac{2T_1}{T} \quad (3.80)$$

(3.80)式和(3.79)式分别与在例 3.5 中导出的(3.42)式和(3.44)式是一样的。

例 3.9 假设关于某一信号 $x(t)$ 给出下列条件:

1. $x(t)$ 是一个实信号。
2. $x(t)$ 是周期的, 周期为 $T=4$, 它的傅里叶级数系数是 a_k 。
3. $a_k=0, |k|>1$ 。
4. 傅里叶系数为 $b_k = e^{-jk\pi/2} a_{-k}$ 的信号是奇信号。
5. $\frac{1}{4} \int_4 |x(t)|^2 dt = 1/2$

现在要证明, 以上所给条件, 除了一个正负号可供选择外, 足以将信号 $x(t)$ 确定。根据条件 3, $x(t)$ 至多只有三个非零的傅里叶系数 a_k, a_0, a_1 和 a_{-1} 。然后, 因为 $x(t)$ 的基波频率 $\omega_0 = 2\pi/4 = \pi/2$, 于是

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + a_{-1} e^{-j\pi t/2}$$

又由条件 1, $x(t)$ 为实信号, 利用表 3.1 中的对称性质可得 a_0 为实数, 且 $a_1 = a_{-1}^*$ 。这样就有

$$x(t) = a_0 + a_1 e^{j\pi t/2} + (a_1 e^{j\pi t/2})^* = a_0 + 2\Re\{a_1 e^{j\pi t/2}\} \quad (3.81)$$

现在来确定由条件 4 给出的具有傅里叶系数为 b_k 的信号。根据表 3.1 的时间反转性质, a_{-k} 就对应于信号 $x(-t)$ 。另外, 时移性质又指出, 第 k 次傅里叶系数乘以 $e^{-jk\pi/2} = e^{-j\omega_0 k}$ 就相应于信号向右移 1 (也即, 以 $t-1$ 代替 t)。这样就可得出, 系数 b_k 对应于信号 $x(-(t-1)) = x(-t+1)$; 又根据条件 4, 它必须为奇信号。因为 $x(t)$ 为实, $x(-t+1)$ 也必须为实信号。根据表 3.1, $x(-t+1)$ 的傅里叶系数一定为纯虚数, 而且为奇函数, 于是 $b_0=0$ 和 $b_{-1} = -b_1$ 。由于时间反转和时移运算都不可能改变每个周期内的平均功率, 所以条件 5 即使在 $x(t)$ 被 $x(-t+1)$ 替代后仍然成立, 即

$$\frac{1}{4} \int_4 |x(-t+1)|^2 dt = \frac{1}{2} \quad (3.82)$$

现在利用帕斯瓦尔定理可得

$$|b_1|^2 + |b_{-1}|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.83)$$

在(3.83)式中以 $b_1 = -b_{-1}$ 代入, 可得 $|b_1| = 1/2$ 。因为已知 b_1 也为纯虚数, 所以 b_1 一定为 $j/2$, 或者 $-j/2$ 。

现在可以把加在 b_0 和 b_1 上的这些条件转移到加在 a_0 和 a_1 上的等效条件。首先, 因为 $b_0 = 0$, 由条件 4, 就意味着 $a_0 = 0$; $k=1$ 时, 这一条件就意味着 $a_1 = e^{-j\pi/2} b_{-1} = -jb_{-1} = jb_1$ 。据此, 若取 $b_1 = j/2$, 那么 $a_1 = -1/2$, 由(3.81)式, $x(t) = -\cos(\pi t/2)$; 若取 $b_1 = -j/2$, 那么 $a_1 = 1/2$, $x(t) = \cos(\pi t/2)$ 。

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

- ❖ 一个离散时间周期信号的傅里叶级数是有限项级数，而不是在连续时间周期信号情况下是一个无穷级数；其结果就是在离散条件下。就不存在3.4节所讨论的数学上的收敛问题。

3.6.1 成谐波关系的复指数信号的线性组合

$$\phi_k[n] = e^{jk\omega_0 n} = e^{jk(2\pi/N)n}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

所有离散时间复指数信号的集合都是周期的，且周期为 N 。 $\phi_k[n]$ 中的全部信号，其基波频率都是 $2\pi/N$ 的倍数，因此它们之间是成谐波关系的。

- ❖ 信号集 $\phi_k[n]$ 中只有 N 个信号是不同的，这是由于离散时间复指数信号在频率相差 2π 的整数倍都是一样的(1.3.3节)。也就是说 $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ ，以及一般关系为 $\phi_k[n] = \phi_{rN+k}[n]$

$$\phi_{rN+k}[n] = e^{j(2\pi/N)(rN+k)n} = e^{j2\pi rn} e^{jk(2\pi/N)n} = e^{jk(2\pi/N)n} = \phi_k[n]$$

- ❖ 我们希望用序列 $\phi_k[n]$ 的线性组合来表示一个离散时间周期信号，如下形式：

$$x[n] = \sum_k a_k \phi_k[n] = \sum_k a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_k a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

- ❖ 因为序列 $\phi_k[n]$ 只在 k 的 N 个相继值的区间上是不同的，因此上式的求和仅仅需要包括 N 项，求和限表示成 $k=\langle N \rangle$ ，即

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

也就是说， k 即可以取 $k=0,1,2,\dots,N-1$ ，也可以取 $k=1,2,3,\dots,N$ 等等。上式称为离散时间级数。

3.6 离散时间周期信号的傅里叶级数表示

3.6.1 离散时间傅里叶级数 (DFS)

Discrete-Time Fourier Series

离散周期信号 : $x[n]=x[n+N]$ ❖

成谐波关系的复指数信号

$$\{\Phi_k[n]\} = \{e^{jk\omega_0 n}\} = \{e^{jk(2\pi/N)n}\}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

这个级数就称为离散时间傅里叶级数 (DFS) ,

其中 a_k 也称为周期信号 $x[n]$ 的频谱。

3.6.2 周期信号傅里叶级数表示的确定

傅里叶级数 $x[n]$:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$$

如何求傅里叶系数 a_k ，过程推导:

$$\begin{aligned} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \\ \sum_{n=\langle N \rangle} x[n]e^{-jr(2\pi/N)n} &= \sum_{n=\langle N \rangle} \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \\ &= \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \sum_{n=\langle N \rangle} e^{j(k-r)(2\pi/N)n} \\ &= a_r \cdot N \end{aligned}$$

$$\therefore a_r = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jr(2\pi/N)n}$$

离散时间傅里叶级数对:

$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{cases}$$

简写为: $x[n] \xleftrightarrow{DFS} a_k$

以周期N周期性重复, a_k 也必然以周期N周期性重复。现举例说明这一点。

P₁₅₂ 例题 3.10

已知: $x[n] = x[n + N] = \sin \omega_0 n$, 将其展成 $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$ 形式.

分析: $\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$ 时, $x[n]$ 为周期信号, 基波 $= \frac{2\pi}{N}$

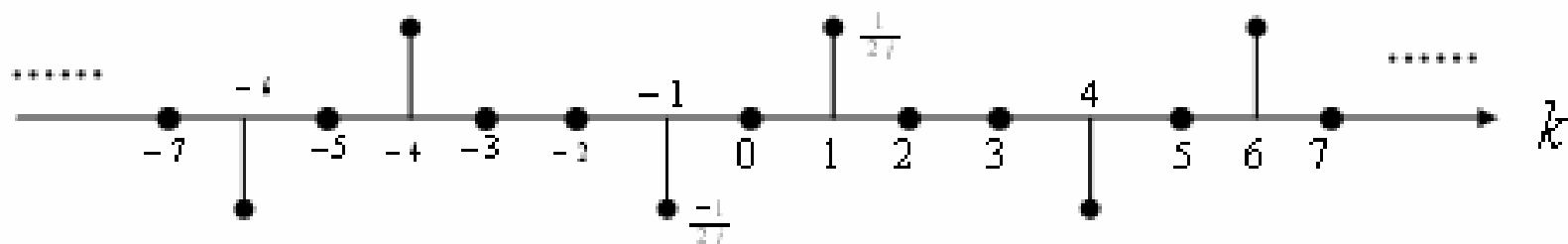
$$\text{当 } m = 1 \text{ 时, 基波 } = \frac{2\pi}{N} = \omega_0$$
$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{j\frac{2\pi}{N}n} - e^{-j\frac{2\pi}{N}n}) \xleftrightarrow{\text{DFS}} a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = 1 + rN \\ \frac{-1}{2j}, & k = -1 + rN \\ 0, & \text{other } k \end{cases}$$

$$\text{当 } m \neq 1 \text{ 时, 基波 } = \frac{2\pi}{N} = \frac{\omega_0}{m}$$
$$x[n] = \frac{1}{2j} (e^{jm\frac{2\pi}{N}n} - e^{-jm\frac{2\pi}{N}n}) \xleftrightarrow{\text{DFS}} a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = m + rN \\ \frac{-1}{2j}, & k = -m + rN \\ 0, & \text{other } k \end{cases}$$

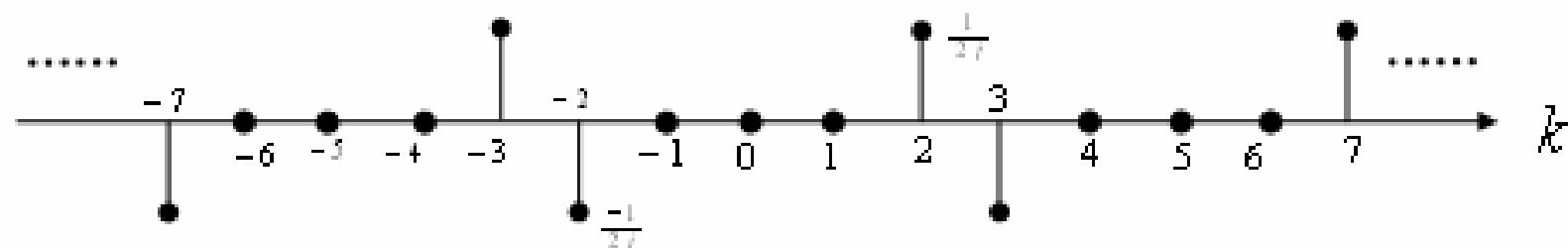
P₁₅₂ 例题 3.10(续)

$$x[n] = x[n + N] = \sin \omega_0 n \xleftrightarrow{DFS} a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, k = m + rN \\ \frac{-1}{2j}, k = -m + rN \\ 0, \text{ other } k \end{cases}$$

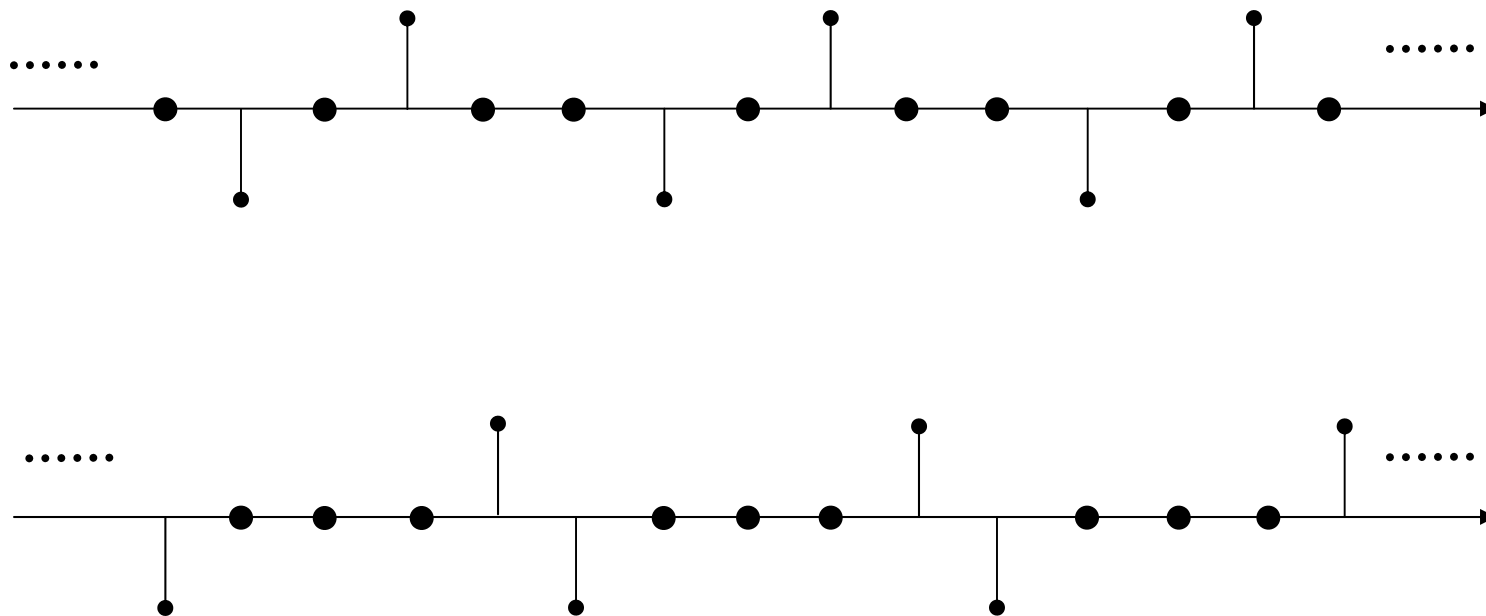
$N = 5, m = 1$ 时, a_k 波形图:



$N = 5, m = 2$ 时, a_k 波形图:

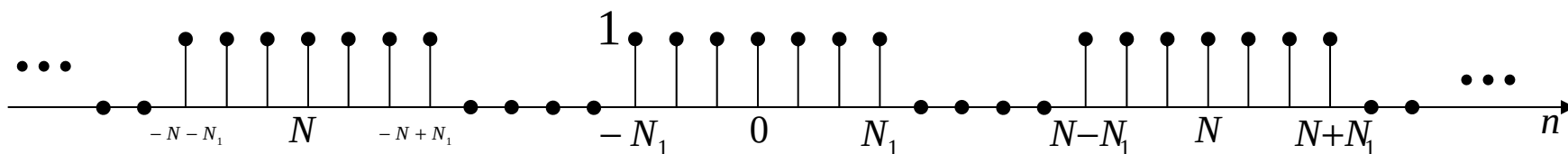


P_{152} 例题 3.10(续)



P₁₅₄ 例题3.12

已知： $x[n] = x[n + N]$, 且 $x[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq N_1 \\ 0, & N_1 < |n| < \frac{N}{2} \end{cases}$



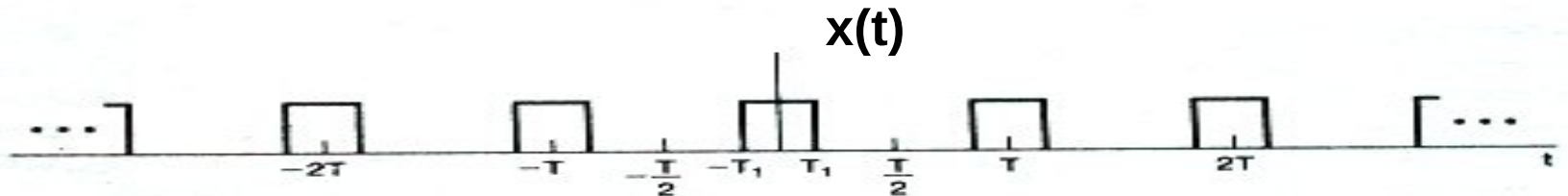
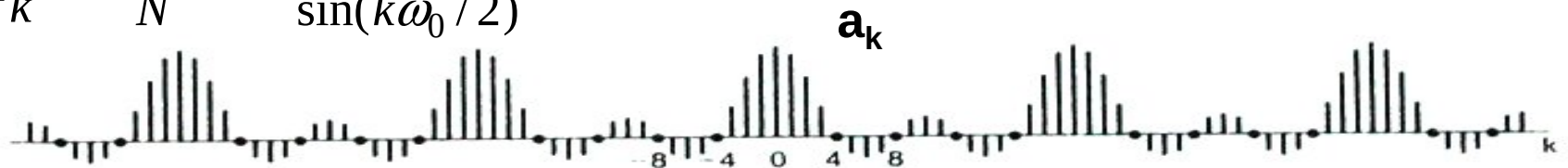
将 $x[n]$ 展成 $x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk\omega_0 n}$ 的形式, 并确定 a_k .

解得： $a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin[k\omega_0 (N_1 + 1/2)]}{\sin(k\omega_0 / 2)}$

$x[n] \xleftrightarrow{DFS} a_k$ 与 $x(t) \xleftrightarrow{CFS} a_k$ 的比较.



$$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin[k\omega_0 (N_1 + 1/2)]}{\sin(k\omega_0 / 2)}$$



DFS的收敛

DFS 是一个有限项的级数，确定 a_k 的关系式也是有限项的和式，因而不存在收敛问题，也不会产生**Gibbs**现象。

3.7 离散傅里叶级数性质

- ❖ 离散时间和连续时间傅里叶级数性质有很大的相似性。如表3.2所示。
- ❖ 需要注意的是：相乘性质、一次差分

3.7.1 相乘

我们知道，两个周期为 T 的连续时间信号的乘积，其傅里叶级数系数序列就是被乘的这两个信号的傅里叶级数系数序列的卷积。

❖ 在离散时间情况下，设周期为 N 的信号

$$\begin{array}{l} x[n] \xrightarrow{\text{FS}} a_k \\ y[n] \xrightarrow{\text{FS}} b_k \end{array} \quad \text{则乘积} \quad x[n]y[n] \xrightarrow{\text{FS}} d_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l}$$

除了求和变量现在要限制在 N 个连续的样本区间外，上式就类似于卷积的定义。

❖ 我们把在求和变量在相继 N 个值上的运算，称之为两个周期的傅里叶系数序列之间的周期卷积，而把求和变量从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 的这种卷积称之为非周期卷积。

3.7.2 一次差分

与连续时间傅里叶级数的微分性质相并列的是离散时间序列的一次差分运算，其定义为 $x[n]-x[n-1]$ 。

❖ 一次差分的傅里叶系数

$$x[n] - x[n-1] \xrightarrow{\mathfrak{S}} (1 - e^{-jk(2\pi/N)})a_k$$

3.7.3 离散时间周期信号的帕斯瓦尔定理

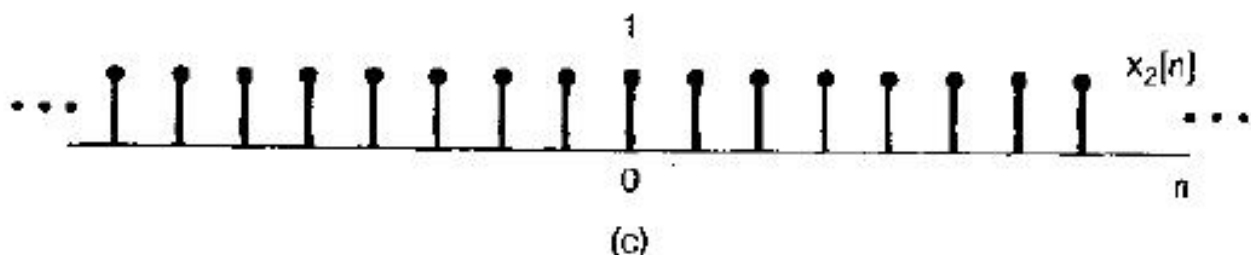
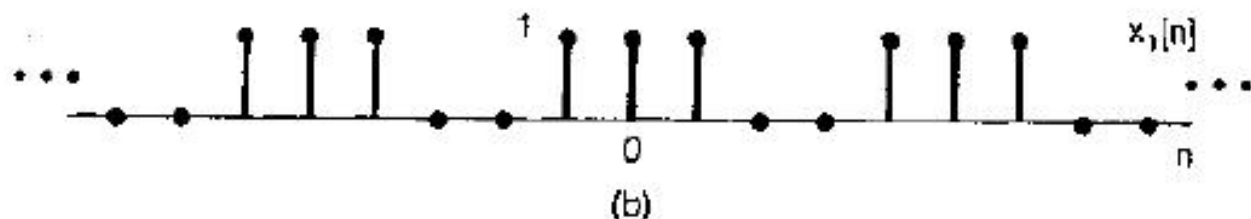
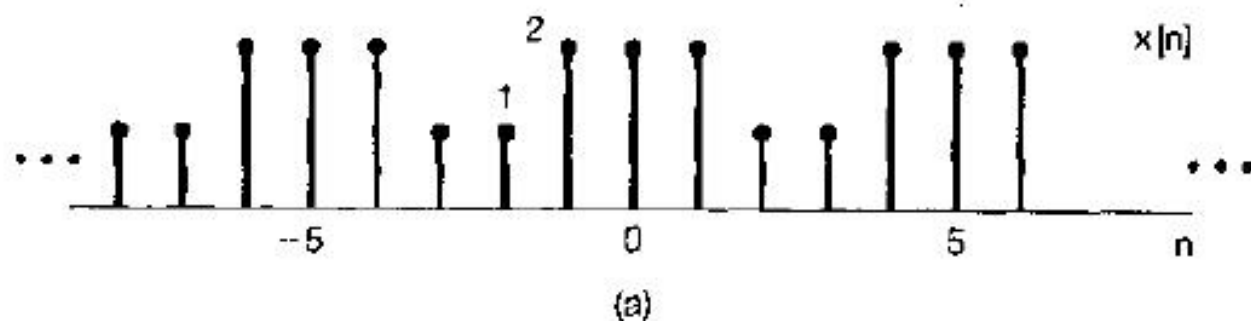
一个周期信号的平均功率等于它的所有谐波分量的平均功率之和。

$$\frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \sum_{n=\langle N \rangle} |a_k|^2$$

例 3.13 现在来考虑求图 3.19(a)的 $x[n]$ 的傅里叶级数系数问题。该序列有一个基波周期为 5。由图可看出 $x[n]$ 可以看成是由图 3.19(b) 的方波序列 $x_1[n]$ 与图 3.19(c) 的直流序列 $x_2[n]$ 之和。现将 $x_1[n]$ 的傅里叶级数系数记为 b_k , $x_2[n]$ 的傅里叶级数系数记作 c_k , 利用表 3.2 的线性性质可以得出

$$a_k = b_k + c_k \quad (3.111)$$

由例 3.12(相当于这里 $N_1 = 1$ 和 $N = 5$), 相应于 $x_1[n]$ 的 b_k 可以表示为



$$b_k = \begin{cases} \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{3}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (3.112)$$

序列 $x_2[n]$ 仅有一个直流值，它由零次傅里叶级数系数表示为

$$c_0 = \frac{1}{5} \sum_{n=0}^4 x_2[n] = 1 \quad (3.113)$$

因为离散时间傅里叶级数系数是周期的，所以当 k 为 5 的整倍数时， $c_k = 1$ 。 $x_2[n]$ 其余的系数都必须为 0，因为 $x_2[n]$ 仅包含一个直流分量。将 b_k 和 c_k 的表示式代入(3.111)式就求得

$$a_k = \begin{cases} b_k = \frac{1}{5} \frac{\sin(3\pi k/5)}{\sin(\pi k/5)}, & k \neq 0, \pm 5, \pm 10, \dots \\ \frac{8}{5}, & k = 0, \pm 5, \pm 10, \dots \end{cases} \quad (3.114)$$

3.8 傅里叶级数与LTI系统

- ❖ 从前面几节已经看出，傅里叶级数表示可以用来构造任何离散时间周期信号，以及在实际上具有重要意义的几乎所有连续时间周期信号。
- ❖ 在3.2节也看到，一个LTI系统对一组复指数信号的线性组合的响应具有特别简单的形式。即，在连续时间情况下，若 $x(t)=e^{st}$ 是一个连续时间LTI系统的输入，那么其输出就为 $y(t)=H(s)e^{st}$ ，其中

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau} d\tau$$

3.8 傅里叶级数与LTI系统

LTI系统对复指数信号所起的作用只是给输入信号加权了一个相应的特征值。

重要概念!!!

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) \quad y(t) = H(s) e^{st}$$
$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

如果 $s = j\omega$ 则 $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$

$H(j\omega)$ 被称为连续时间LTI系统的频率响应

$$z^n \longrightarrow \boxed{h(n)} \longrightarrow y(n) \quad y[n] = H(z) z^n$$
$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

如果 $z = e^{j\omega}$ 则 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) e^{-j\omega n}$

$H(e^{j\omega})$ 称为离散时间LTI系统的频率响应

- ❖ 利用系统的频率响应来表示一个LTI系统对（连续时间）或（离散时间）这种形式的复指数信号的响应是特别简单的；再者，LTI系统的叠加性质，因此一个LTI系统对复指数信号的线性组合的响应也同样简单。

❖ 设连续时间周期信号 $x(t)$ ，其傅里叶级数为

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

将该信号加入单位冲激响应为 $h(t)$ 的LTI系统作为输入，那么其输出就是

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

因为： $x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$ ， $s_k = jk\omega_0$

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

❖ 因此，若 $\{a_k\}$ 是输入 $x(t)$ 的一组傅里叶级数系数，那么 $\{a_k H(jk\omega_0)\}$ 就是输出 $y(t)$ 的一组傅里叶级数系数；这就是说，LTI系统的作用就是通过乘以相应频率点上的频率响应值来逐个改变输入信号的每一个傅里叶级数系数。

例 3.16 假设在例 3.2 中讨论的周期信号 $x(t)$ 是某个 LTI 系统的输入信号, 该系统的单位冲激响应是

$$h(t) = e^{-t}u(t)$$

为了计算输出 $y(t)$ 的傅里叶级数系数, 就是首先求频率响应

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt \quad H(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{1+j\omega} e^{-\tau} e^{-j\omega\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{1+j\omega} \quad (3.125)$$

利用(3.124)式和(3.125)式, 考虑到本例中 $\omega_0 = 2\pi$, 因此可得

$$\omega = k\omega_0$$

$$y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} a_k H(jk\omega_0) e^{-jk\omega_0 t} \quad y(t) = \sum_{k=-3}^{+3} b_k e^{jk2\pi t} \quad (3.126)$$

由于 $b_k = a_k H(jk2\pi)$, 所以

$$b_0 = 1$$

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1+j2\pi} \right), & b_{-1} &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{1-j2\pi} \right) \\ b_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+j4\pi} \right), & b_{-2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-j4\pi} \right) \\ b_3 &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1+j6\pi} \right), & b_{-3} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-j6\pi} \right) \end{aligned} \quad (3.127)$$

❖ 在离散时间情况下，与连续时间情况相类似。设 $x[n]$ 是一周期信号，其傅里叶级数是

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n}$$

将该信号加入单位冲激响应为 $h[t]$ 的LTI系统作为输入，那么其输出就是

$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j2\pi k/N}) e^{jk(2\pi/N)n}$$

因为：

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n, \quad z_k = e^{jk(2\pi/N)}$$

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{jk2\pi/N}) e^{jk(2\pi/N)n}$$

例 3.17 考虑一 LTI 系统, 其单位脉冲响应 $h[n] = \alpha^n u[n]$, $-1 < \alpha < 1$, 输入为

$$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \quad (3.132)$$

和例 3.10 相同, $x[n]$ 能写成傅里叶级数形式

$$x[n] = \frac{1}{2} e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} e^{-j(2\pi/N)n}$$

同时, 由(3.122)式

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] e^{-j\omega n} \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha e^{-j\omega})^n \quad (3.133)$$

利用习题 1.54 的结果, 该几何级数收敛为

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \alpha e^{-j\omega}} \quad \omega = k\omega_0 \quad (3.134)$$

利用(3.131)式, 得到输出的傅里叶级数为

$$\begin{aligned} y[n] &= \frac{1}{2} H(e^{j2\pi/N}) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} H(e^{-j2\pi/N}) e^{-j(2\pi/N)n} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{-j2\pi/N}} \right) e^{j(2\pi/N)n} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \alpha e^{j2\pi/N}} \right) e^{-j(2\pi/N)n} \end{aligned} \quad (3.135)$$

$$y[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} a_k H(e^{jk\omega_0}) e^{jk\omega_0 n}$$

总结

如果一个LTI系统输入周期性信号 $x(t)$ 或 $x[n]$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \longrightarrow \boxed{h(j\omega)} \longrightarrow y(t)$$

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \longrightarrow \boxed{h(e^{j\omega})} \longrightarrow y[n]$$

则

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$$

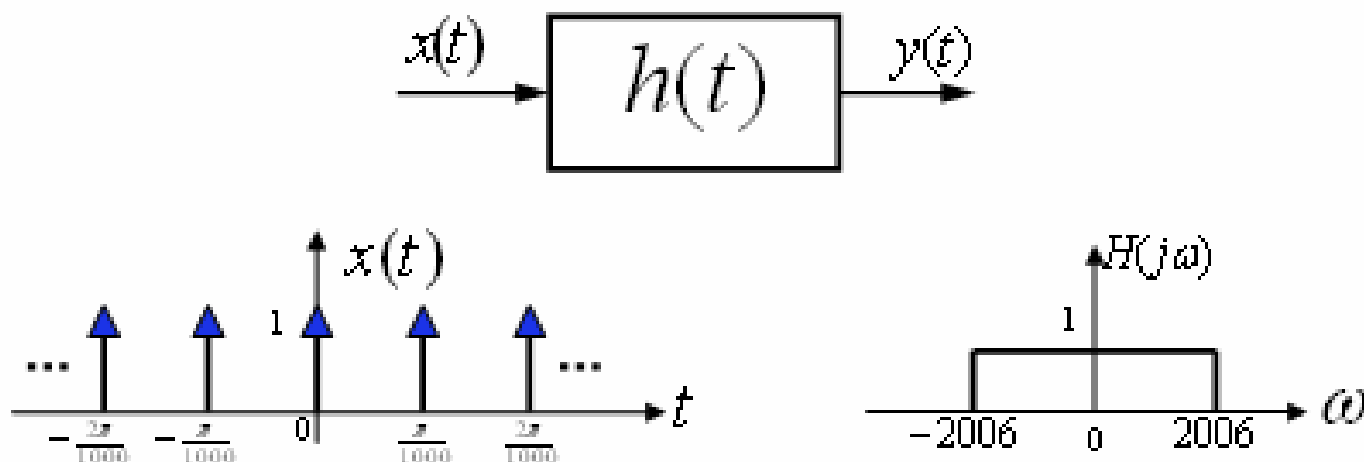
$$y[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k H(e^{j\frac{2\pi}{N}k}) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

* 可见，LTI系统对周期信号的响应仍是一个周期信号，LTI系统的作用是对各个谐波频率的信号分量进行不同的加权处理。

* LTI系统的作用就是通过乘以相应频率点上的频率响应值来逐个地改变输入信号的每一个傅里叶系数，也就是改变每个频率分量的大小。

例:

已知: 一连续时间 LT 系统, 如图示输入信号为 $x(t)$, 系统的频率响应为 $H(j\omega)$



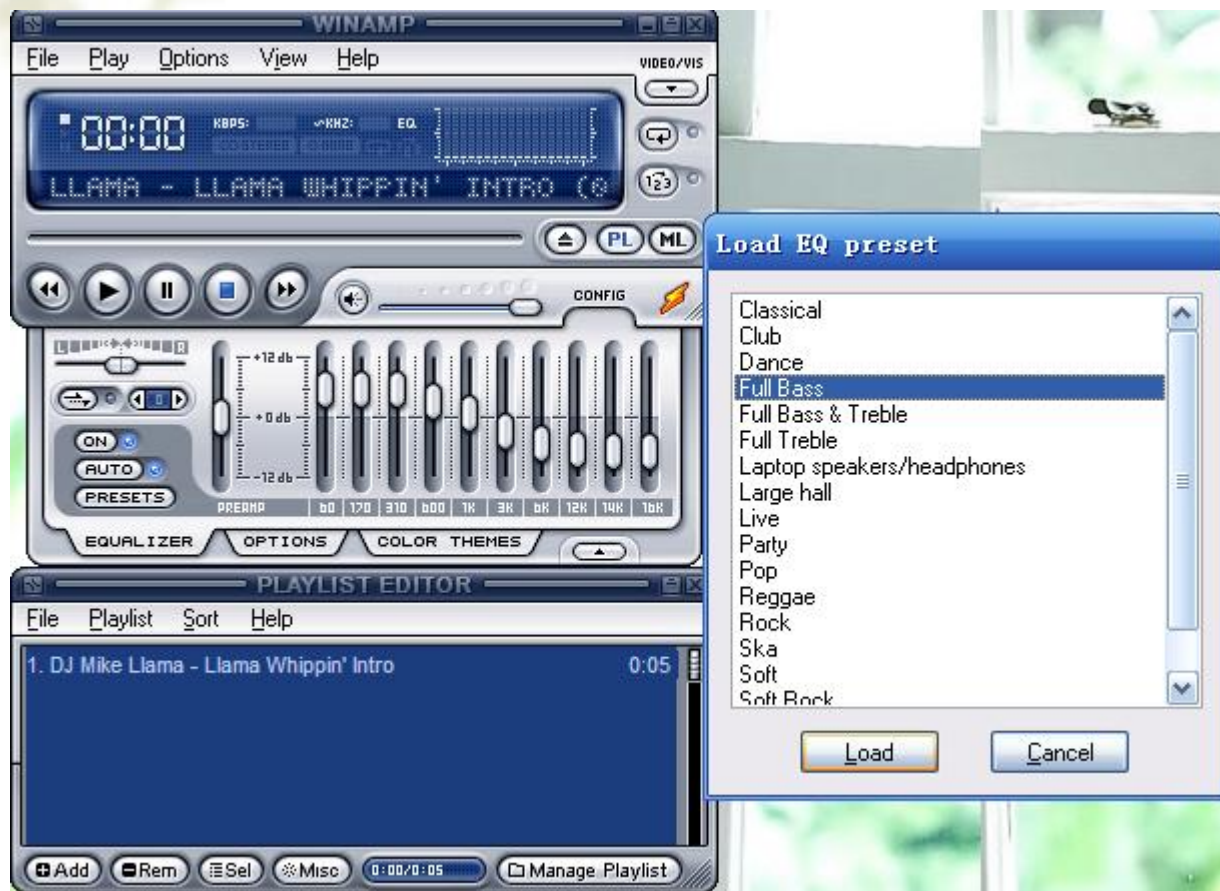
- 求:
- (1) 将 $x(t)$ 写成傅里叶级数表达式
 - (2) 该系统的输出 $y(t)$.

3.9滤波 Filtering

- ❖ 滤波：改变一个信号中各频率分量的相对大小，或者全部消除某些频率分量的过程。
- ❖ 频率成形滤波器：用于改变频谱形状的线性时不变系统。
- ❖ 频率选择性滤波器：基本无失真的通过某些频率，而显著地衰减掉或消除掉另一些频率的系统。
- ❖

3.9.1 频率成形滤波器

经常遇到的频率成形滤波器的应用场合是在音响系统中。在这类系统中一般都包含有LTI滤波器，以让听众可以改变声音中高低频分量的相对大小。



$$\text{dB} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$



Load EQ preset

- Classical
- Club
- Dance
- Full Bass
- Full Bass & Treble
- Full Treble
- Laptop speakers/headphones
- Large hall
- Live
- Party
- Pop
- Reggae
- Rock
- Ska
- Soft
- Soft Rock

Load

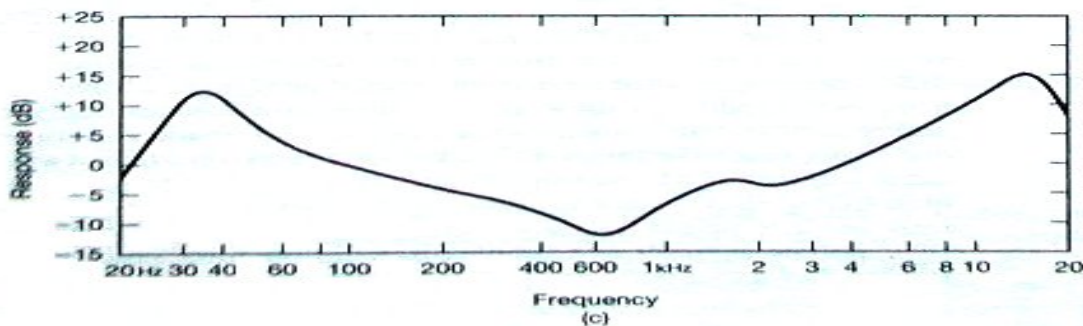
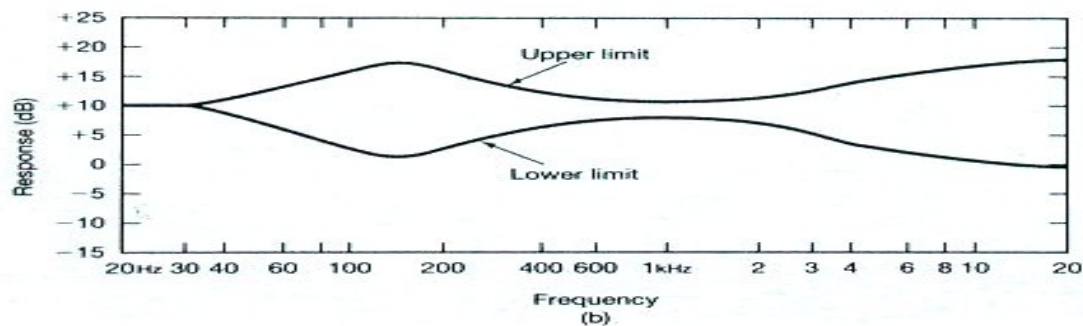
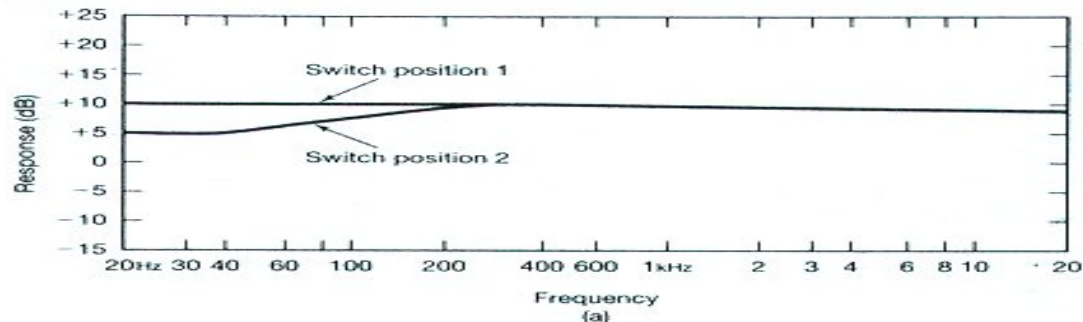
Cancel

3.9 滤波 Filtering

3.9.1 频率成形滤波器

例题1:

音响系统中，让听众可改变声音中高低频分量的相对大小。



❖ 常常遇到的另一类频率滤波器是输出为输入的导数，即 $y(t)=dx(t)/dt$ 。这一类滤波器称为微分滤波器，经常应用于图像处理中的边缘的增强（边缘检测）。

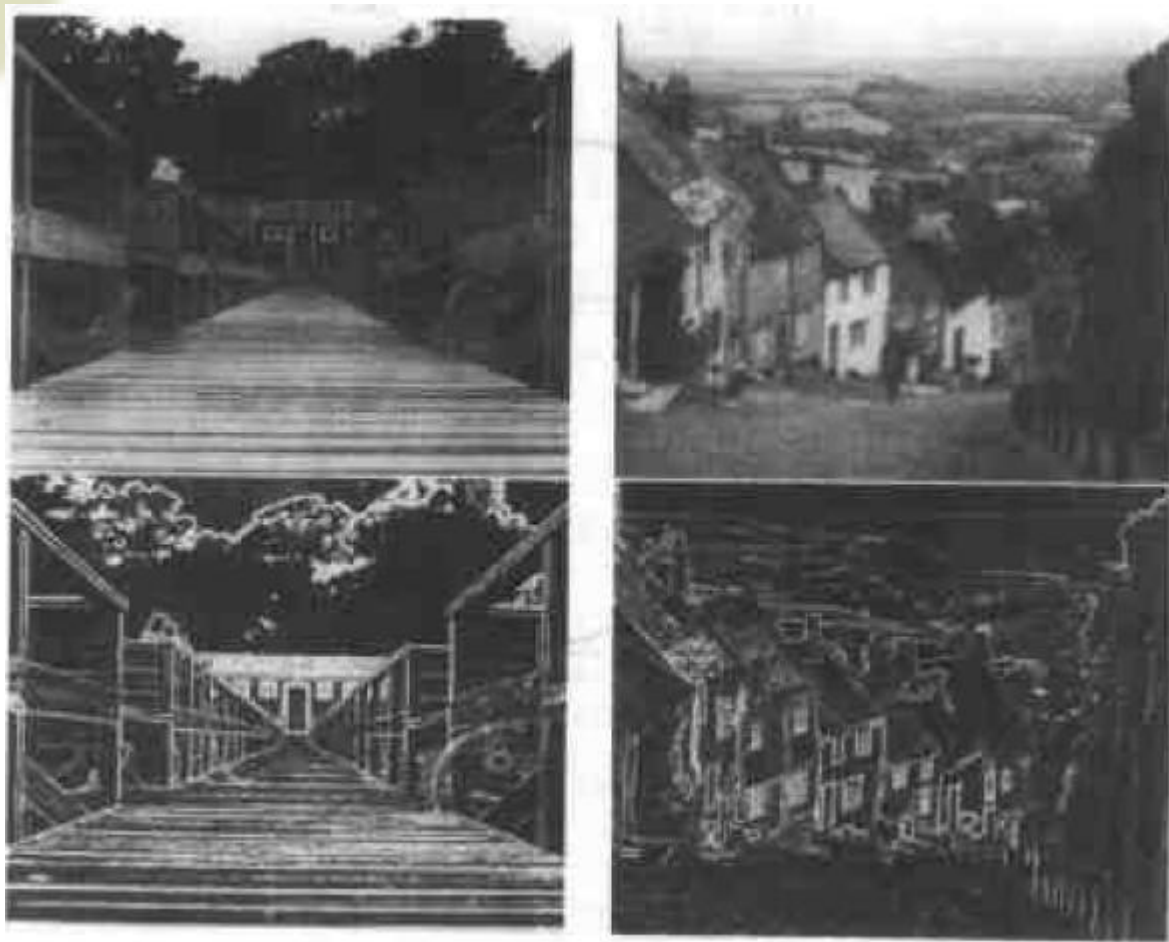
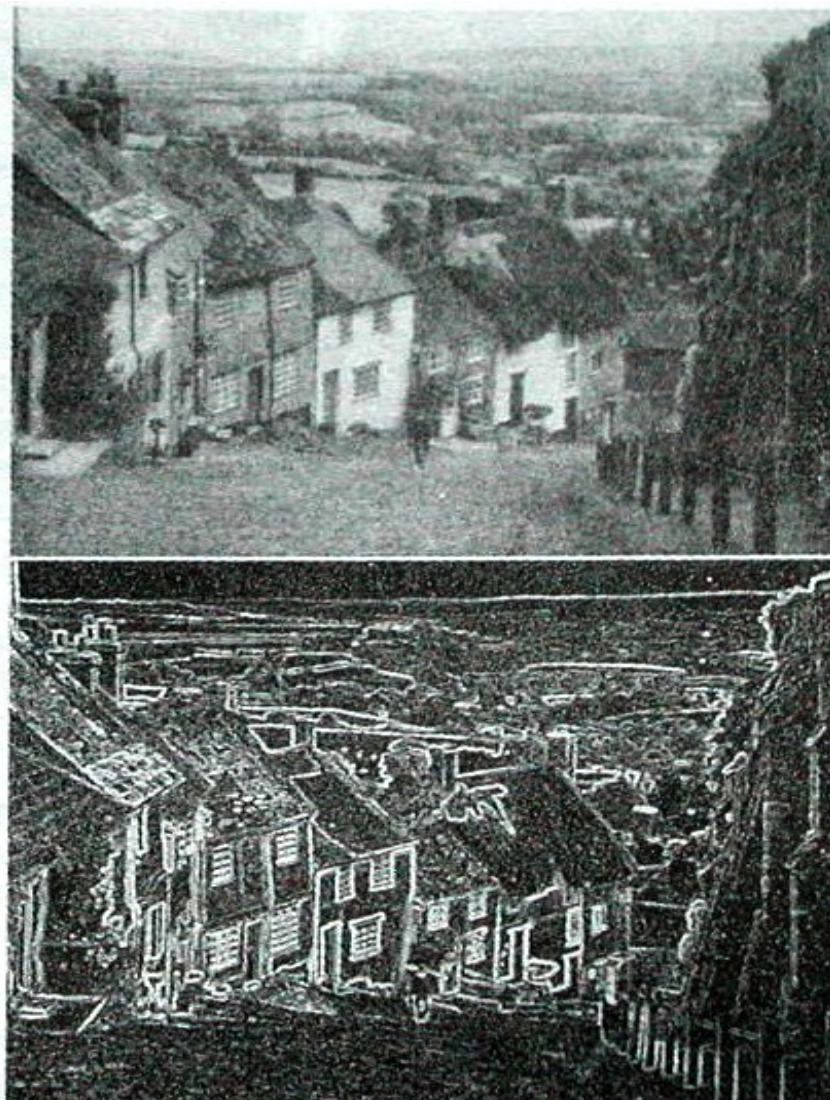
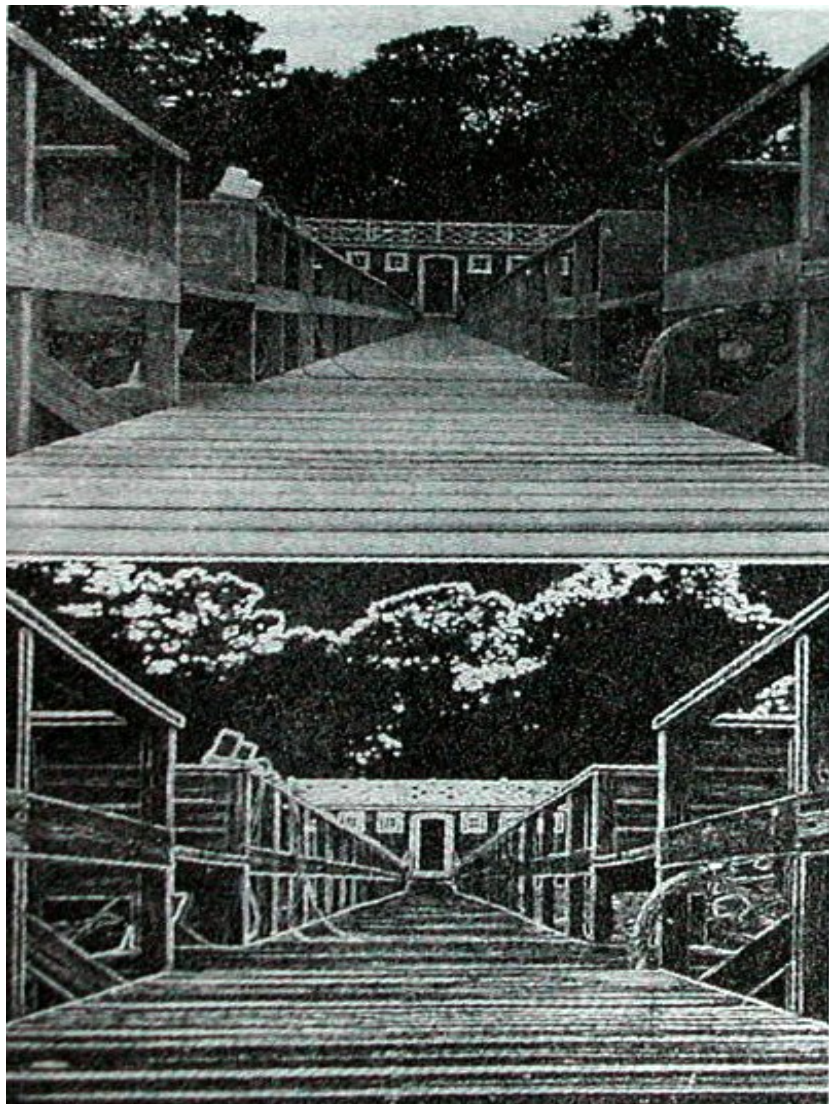


图 3.24 微分滤波器在一幅图像上的效果；

(a)两幅原始图像；(b)用微分滤波器处理该原始图像的结果

例题2: 图像滤波 (边缘检测)



3.9.2 频率选择滤波器

滤波器类型：

- (1) 低通滤波器
- (2) 高通滤波器
- (3) 带通滤波器
- (4) 带阻滤波器

3.9.2 频率选择性滤波器

❖ **低通滤波器**：通过低频（即在 $\omega=0$ 附近的频率），而衰减或阻止较高频率的滤波器。

一个连续时间理想低通滤波器的**频率响应**是：

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

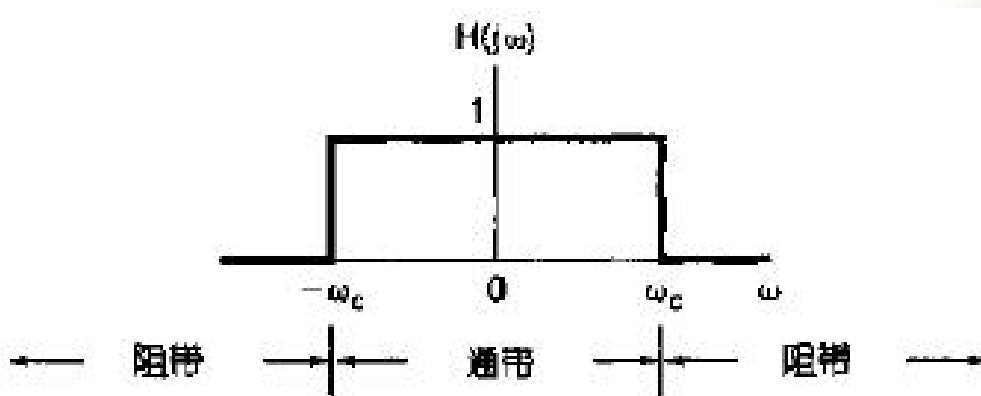


图 3.26 理想低通滤波器的频率响应

❖ 高通滤波器

❖ 带通滤波器

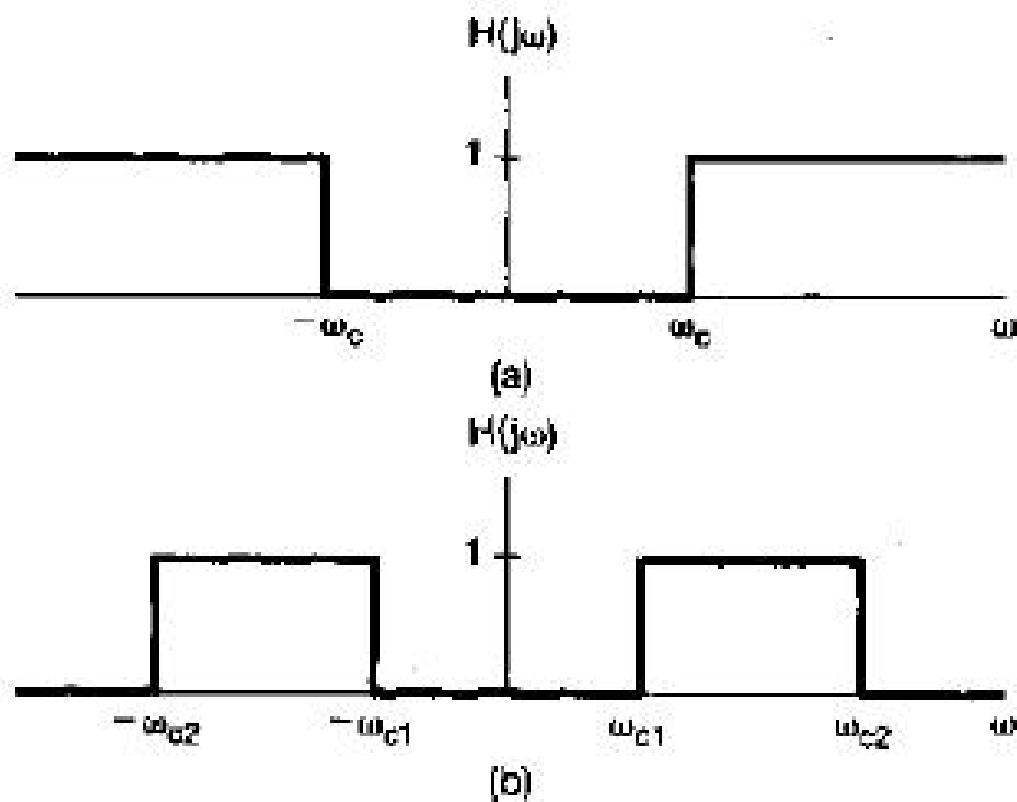
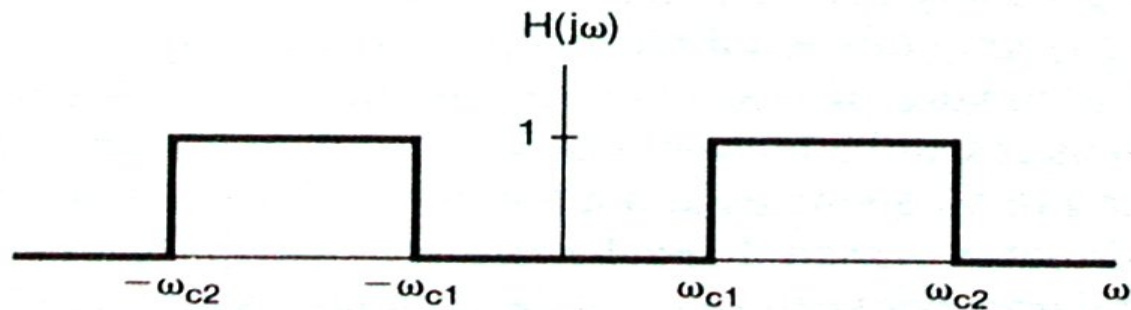
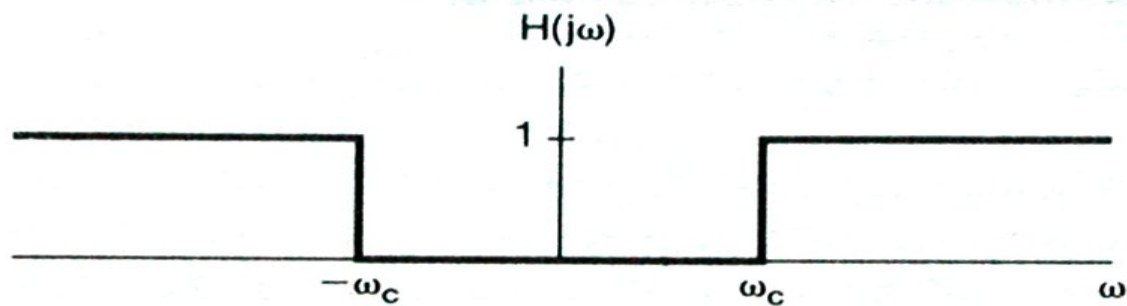
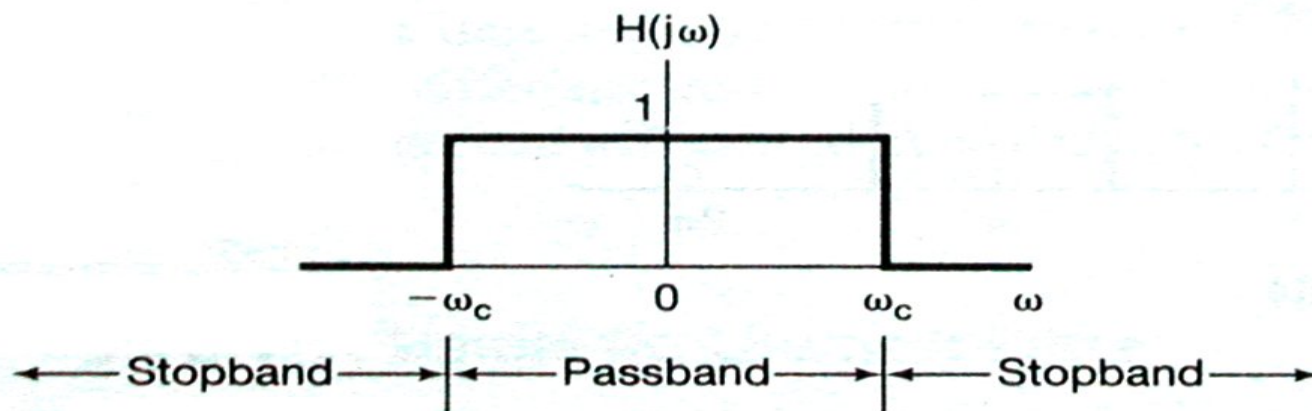
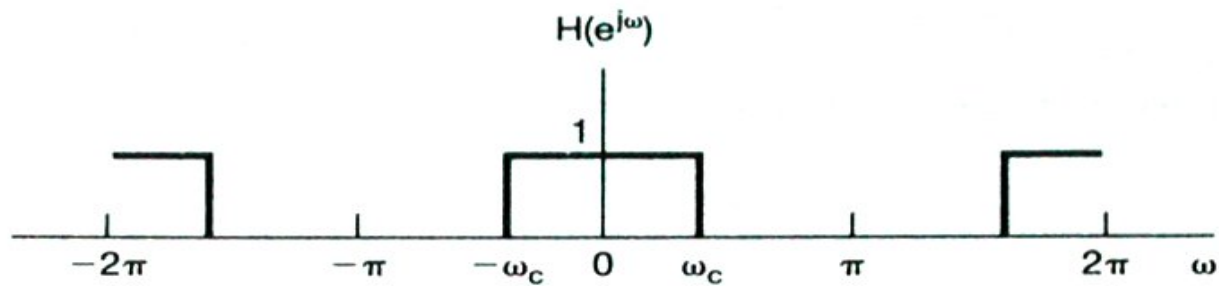


图 3.27 (a)理想高通滤波器的频率响应;
(b)理想带通滤波器的频率响应

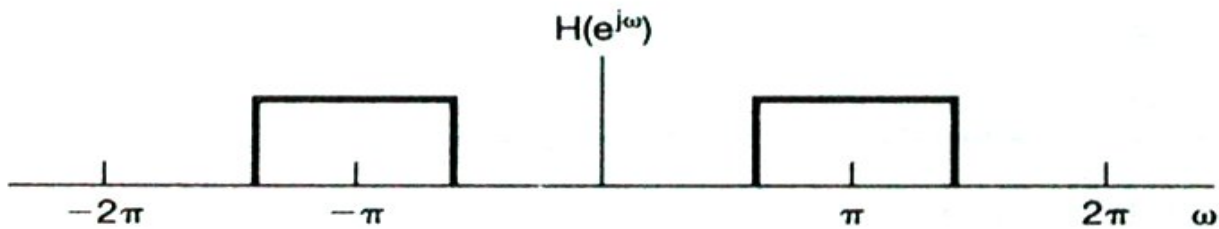
连续时间



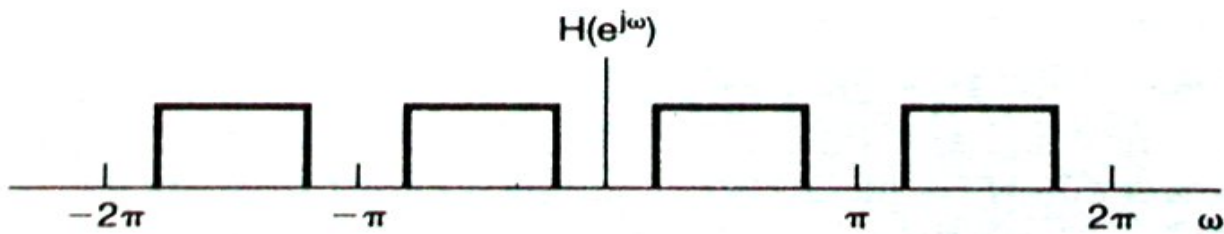
离散时间



(a)



(b)



(c)

3.10 用微分方程所描述的连续时间滤波器举例

- ❖ 在许多应用中，频率选择性滤波器是用线性常系数微分方程或差分方程所描述的LTI系统来实现的。
- ❖ 在本节和下一节将研究几个例子，用以说明利用微分和差分方程来实现连续时间和离散时间频率选择性滤波器。

3.10.1 简单RC低通滤波器

电路被广泛用作实现连续时间滤波功能。其中最简单的一个例子就是如图3.29所示的一阶RC电路，图中电压源 $v_s(t)$ 是系统的输入。这个电路既可以实现低通滤波，又能实现高通滤波，这取决于以什么作为输出信号。

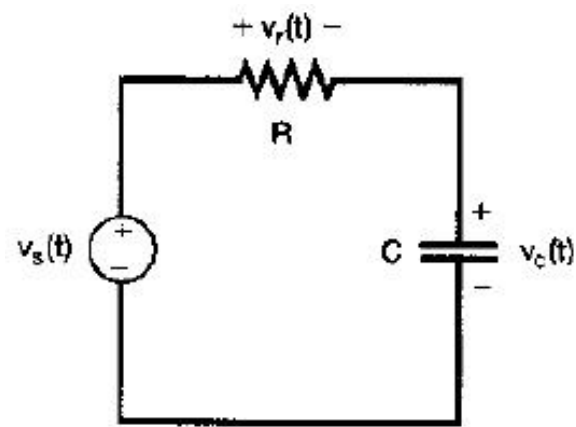


图 3.29 一阶 RC 滤波器

❖ 电容器上的电压 $v_c(t)$ 作为输出，这时输出电压与输入电压就由线性常系数微分方程所关联：

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_s(t) \quad \text{式3.141}$$

假定系统为最初松弛的，则上式所描述的系统就是LTI系统。

❖ 为了确定频率响应 $H(j\omega)$ ，由定义在输入电压 $v_s(t) = e^{j\omega t}$ 时，输出电压一定是 $v_c(t) = H(j\omega)e^{j\omega t}$ ，代入式3.141，可得

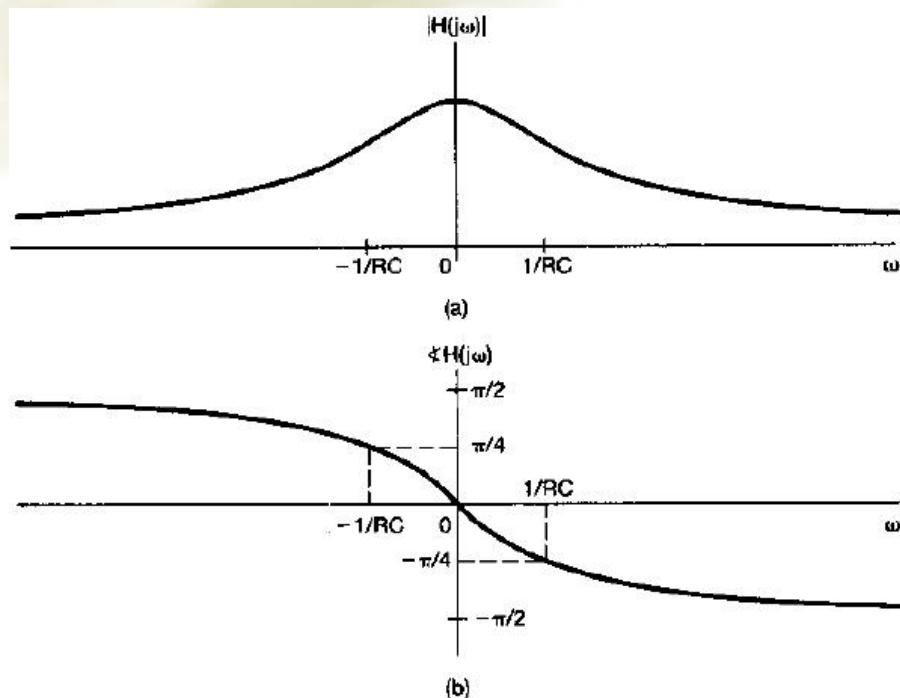
$$RC \frac{d}{dt}[H(j\omega)e^{j\omega t}] + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

$$RCj\omega H(j\omega)e^{j\omega t} + H(j\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t}$$

❖ 由此直接得到

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega}$$

❖ 频率响应 $H(j\omega)$ 的模和相位如图 3.30 所示



3.30 (a)和(b)分别是图 3.29 的 RC 电路以 $v_c(t)$ 作为输出时的频率响应的模和相位图

我们注意到，在频率 $\omega=0$ 附近， $|H(j\omega)| \approx 1$ ；而在较大的 ω 值时(正值或负值)， $|H(j\omega)|$ 显著较小，事实上就是随着 $|\omega|$ 的增加而平缓地减小。因此，这一简单的 RC 滤波器，在以 $v_c(t)$ 作为输出时，就是一个非理想的低通滤波器。

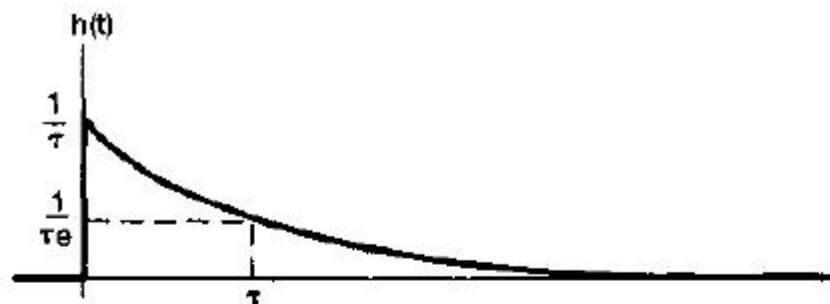
❖ 为了给在滤波器设计中涉及到的一些折衷和权衡等问题提供一个初步的接触，我们分析一下该电路的时域特性，式3.141描述的系统单位冲激响应是

$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-t/RC} u(t)$$

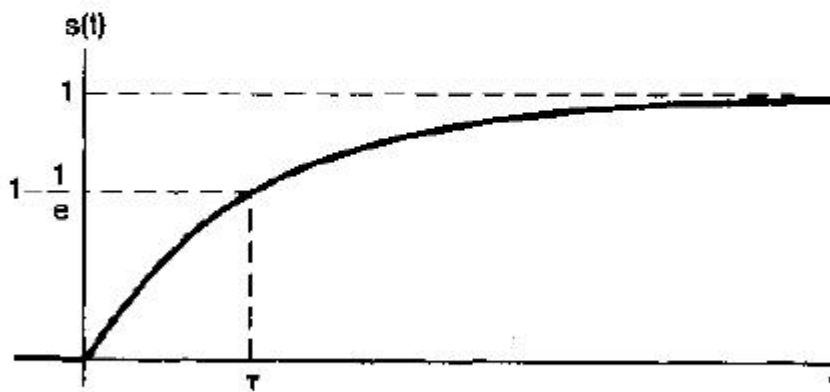
它的单位阶跃响应是

$$s(t) = [1 - e^{-t/RC}] u(t)$$

两者都示于图3.31中，图中 $\tau = RC$ ，与图3.30比较，可以看到一种基本的折衷。



(a)



(b)

图 3.31 (a) $\tau = RC$ 的一阶 RC 低通滤波器的单位冲激响应；(b) 它的阶跃响应

- ❖ 假如希望让滤波器仅仅通过很低的一些频率，那么由图3.30(a)，就意味着 $1/RC$ 要小，即 RC 要大。而由图3.31(b)可知， RC 一旦变大，阶跃响应就得用较长的时间才能达到它的长期稳定值1。也就是说该系统对阶跃输入的响应是缓慢。
- ❖ 相反，如果希望有较快的阶跃响应，那么就需要较小的 RC 值，而这又意味着该滤波器将通过较高的频率。
- ❖ 这种在频域和时域特性之间的折衷是LTI系统和滤波器的分析和设计中出现的典型问题。

3.10.2 简单RC高通滤波器

将RC电路的输出选为电阻两端的电压，微分方程是

$$RC \frac{dv_r(t)}{dt} + v_r(t) = RC \frac{dv_s(t)}{dt}$$

该系统的频率响应 $G(j\omega)$ 和前面讨论的情况一样，即若输入 $v_s(t) = e^{j\omega t}$ ，那么一定有输出 $v_r(t) = G(j\omega)e^{j\omega t}$ ，带入上式得

$$G(j\omega) = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$$

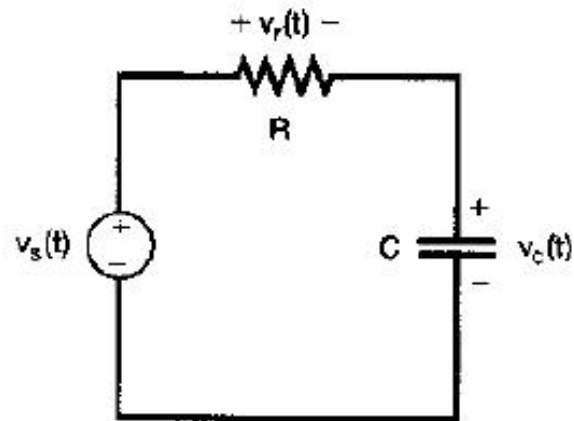
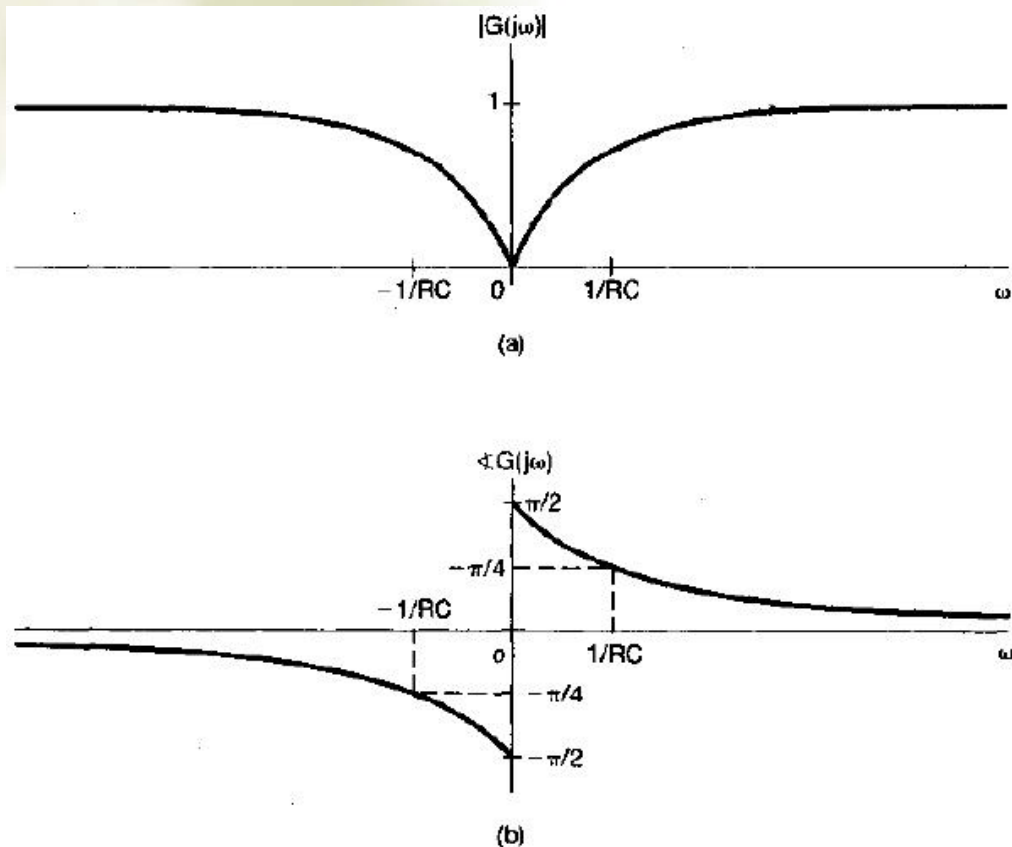


图 3.29 一阶 RC 滤波器

❖ 该系统频率响应 $G(j\omega)$ 的模和相位如图 3.32 所示



由图可见，该系统衰减掉较低的频率，而让较高的频率通过；也就是对于 $|\omega| \ll 1/RC$ 的频率有最小的衰减。所以该系统是一个非理想的高通滤波器。

图 3.32 (a)和(b)分别是图 3.29 以 $v_o(t)$ 作为输出的 RC 电路频率响应的模和相位图

❖ 和低通滤波器时一样，电路参数 RC 即控制了该高通滤波器的频率响应，又控制了它的时间响应特性。
该高通滤波器的阶跃响应是

$$s(t) = e^{-t/RC} u(t)$$

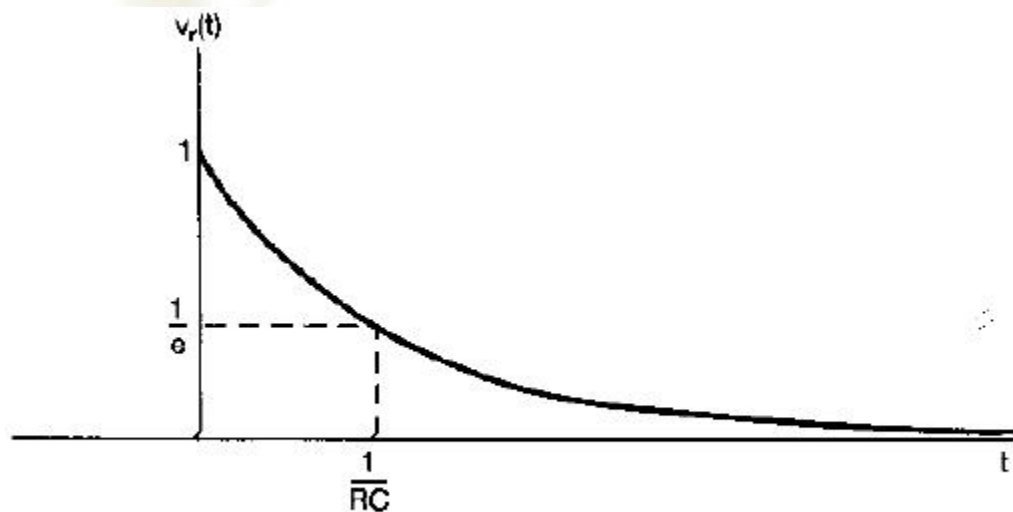


图 3.33 $\tau = RC$ 的一阶 RC 高通滤波器的阶跃响应

随着 RC 的增加，响应变得更为迟钝。也就是说阶跃响应要用较长的时间才能达到它的长期稳定值0。

3.11 用差分方程描述的离散时间滤波器举例

- ❖ 由于离散时间系统能有效地用专用或通用数字系统来实现，由差分方程描述的滤波器在实际中被广泛地采用。
- ❖ 由差分方程描述的离散时间LTI系统可以是递归的，从而具有无限长单位脉冲响应（IIR系统）；又能是具有有限长单位脉冲响应（FIR系统）。前者与上节讨论的由微分方程描述的连续时间系统相对应的。

3.11.1 一阶递归离散时间滤波器

一阶差分方程描述的LTI系统

$$y[n] - ay[n-1] = x[n]$$

根据复指数信号的特征函数性质知道，若 $x[n] = e^{j\omega n}$ ，则 $y[n] = H(e^{j\omega})e^{j\omega n}$ ，这里 $H(e^{j\omega})$ 是该系统的频率响应，带入上式得

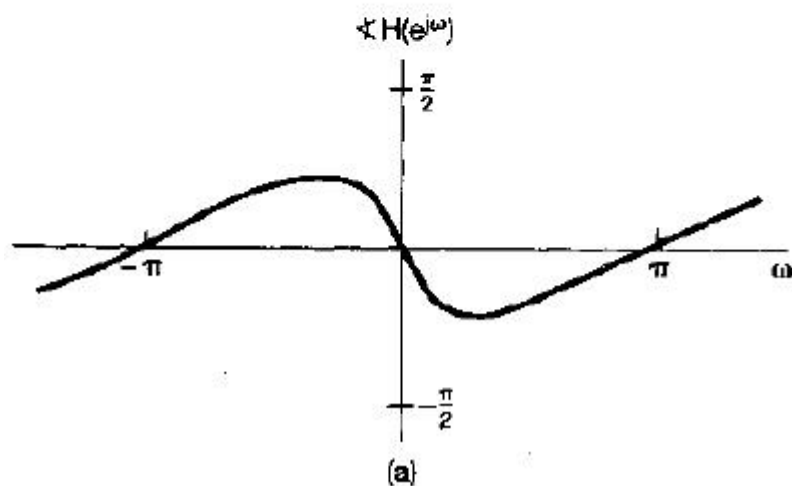
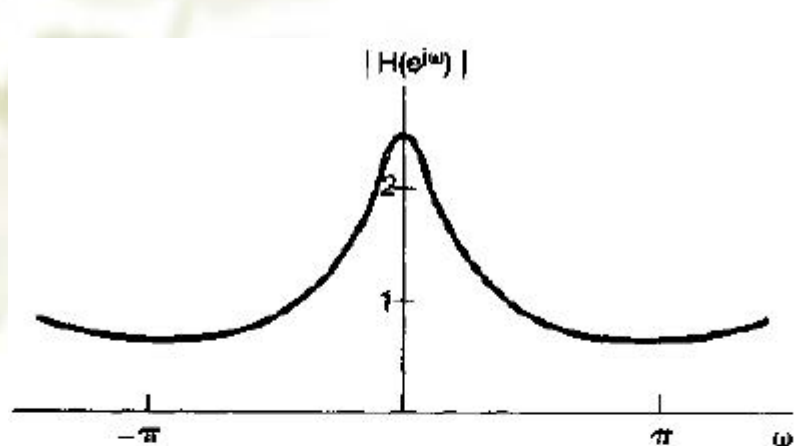
$$H(e^{j\omega})e^{j\omega n} - aH(e^{j\omega})e^{j\omega(n-1)} = e^{j\omega n}$$

$$[1 - ae^{-j\omega}]H(e^{j\omega})e^{j\omega n} = e^{j\omega n}$$

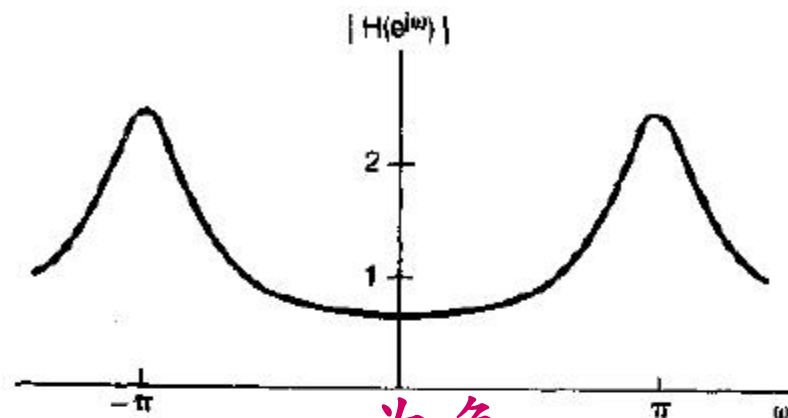
❖ 于是

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

❖ 对 $a=0.6$ 和 $a=-0.6$ 时的模和相位如图3.34



a 为正
低通滤波器



a 为负
高通滤波器

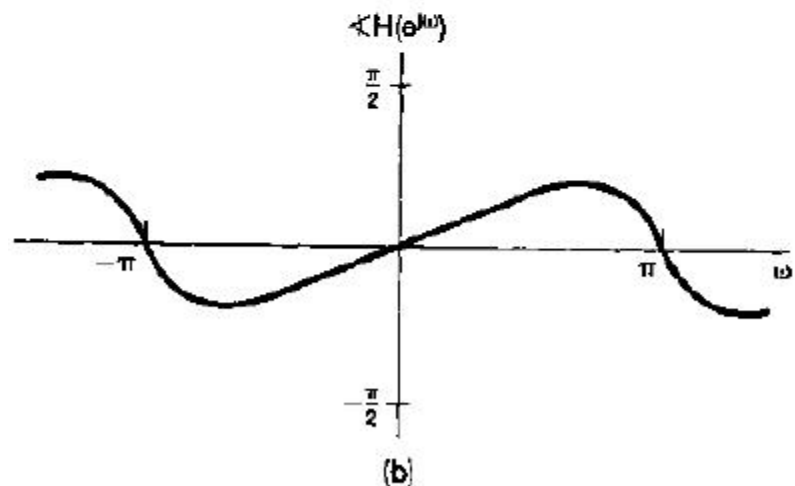


图 3.34 (3.151)式一阶递归离散时间滤波器的频率响应：
(a) $a=0.6$; (b) $a=-0.6$

本章作业



➤ 3.1 3.21 3.22(d)(e)

➤ 3.34 3.35

➤ 第3章总结

小结(1)

➤ 复指数函数是一切LTI系统的特征函数。

➤
$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] z^{-k}$$

➤ 建立了用傅里叶级数表示周期信号的方法，实现了对周期信号的频域分解。

➤
$$\begin{cases} x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T} \int_{\langle T \rangle} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{cases}$$

➤
$$\begin{cases} x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k e^{jk(2\pi/N)n} \\ a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x[n] e^{-jk(2\pi/N)n} \end{cases}$$

小结(2)

- 在对信号分析的基础上，研究了LTI系统的频率响应及LTI系统对周期信号的响应。

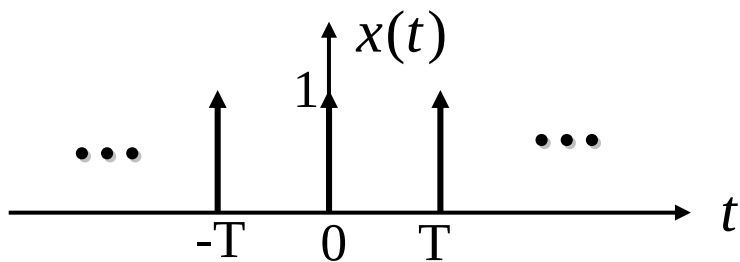
频率响应

如果 $s = j\omega$ 则 $H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$

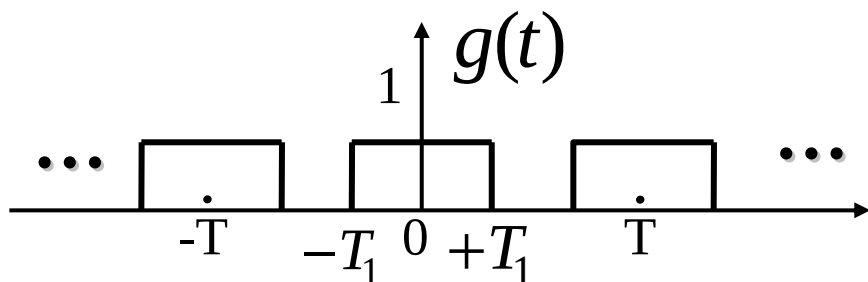
如果 $z = e^{j\omega}$ 则 $H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$

- * LTI系统的作用就是通过乘以相应频率点上的频率响应值来逐个地改变输入信号的每一个傅里叶系数，也就是改变每个频率分量的大小。

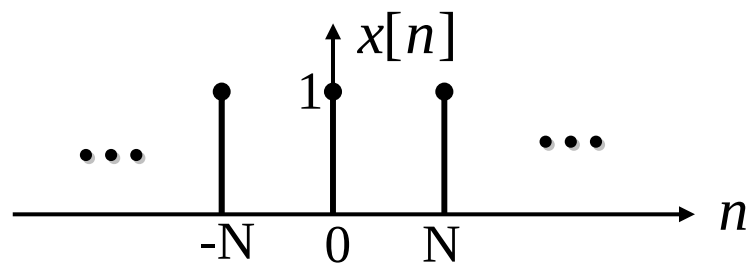
小结 (3)



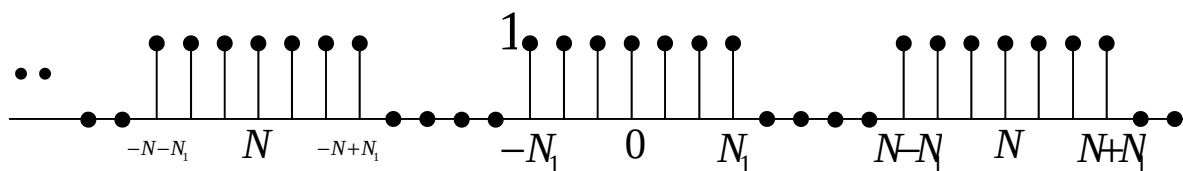
$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$



$$a_k = \frac{2T_1}{T} \text{Sa}(k\omega_0 T_1) = \frac{\sin(k\omega_0 T_1)}{k\pi}$$



$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$



$$a_k = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin[k\omega_0 (N_1 + 1/2)]}{\sin(k\omega_0/2)}$$