



第9章

拉普拉斯变换



9.0 引言

前面几章已经看到，傅里叶分析工具在研究涉及信号和 LTI 系统的很多问题中是极为有用的。这在很大程度上是由于相当广泛的一类信号都能用周期复指数信号的线性组合来表示，而复指数信号又是 LTI 系统的特征函数的缘故。连续时间傅里叶变换提供了将信号表示成形如 e^{st} , $s = j\omega$ 的复指数信号的线性组合；然而，由 3.2 节引入的特征函数性质及其它的很多结果对任意 s 值都是适用的，而并不是将它仅限于纯虚数的情况。这样的看法就导致了连续时间傅里叶变换的推广，称之为拉普拉斯变换，这就是本章要进行讨论的。下一章将建立对应的离散时间的推广，称之为 z 变换。

将会看到，拉普拉斯变换和 z 变换都有很多使傅里叶变换成为如此有用的那些性质。然而，这些变换不仅仅是对那些能用傅里叶变换进行分析的信号与系统提供了另一种分析工具和另一种分析的角度，而且在一些傅里叶变换不能应用的重要方面，它们也能够应用。例如：拉普拉斯变换和 z 变换能用于许多不稳定系统的分析，这样就在系统的稳定性或不稳定性的研究中起着重要的作用。这一事实再与拉普拉斯变换和 z 变换与傅里叶变换共有的代数性质组合在一起，就形成了一整套重要的系统分析工具，尤其是在第 11 章要讨论的反馈系统分析中更是如此。

9.1 拉普拉斯变换

在第3章已经知道, 一个单位冲激响应为 $h(t)$ 的线性时不变系统, 对 e^{st} 复指数输入信号的响应 $y(t)$ 是

$$y(t) = H(s)e^{st} \quad (9.1)$$

这里

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt \quad (9.2)$$

若 s 为虚数(即 $s = j\omega$), (9.2)式的积分就对应于 $h(t)$ 的傅里叶变换。对一般的复变量 s 来说, (9.2)式就称为单位冲激响应 $h(t)$ 的拉普拉斯变换。

一个信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换定义如下^①:

$$X(s) \triangleq \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (9.3)$$

当复变量 s 不为纯虚数时，拉普拉斯变换与傅里叶变换也有一个直接的关系。为了看出这一点，将(9.3)式 $X(s)$ 中的 s 表示成 $s = \sigma + j\omega$ ，则有

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-(\sigma + j\omega)t} dt \quad (9.7)$$

或者

$$X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x(t) e^{-\sigma t}] e^{-j\omega t} dt \quad (9.8)$$

我们可以把(9.8)式的右边看作 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换。这就是说， $x(t)$ 的拉普拉斯变换可以看成是 $x(t)$ 在乘以一个实指数信号以后的傅里叶变换。这个实指数 $e^{-\sigma t}$ 在时间上可以是衰减的，或者是增长的，这决定于 σ 是正还是负。

例 9.1 设信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$, 由例 4.1, 它的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 在 $a > 0$ 时收敛, 且为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt = \int_0^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega + a}, \quad a > 0 \quad (9.9)$$

根据(9.3)式, 其拉普拉斯变换为

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \quad (9.10)$$

或者, 用 $s = \sigma + j\omega$

$$X(\sigma + j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-(\sigma+a)t}e^{-j\omega t}dt \quad (9.11)$$

将(9.11)式与(9.9)式相比较, 可以看出(9.11)式就是 $e^{-(\sigma+a)t}u(t)$ 的傅里叶变换, 于是有

$$X(\sigma + j\omega) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\omega}, \quad \sigma + a > 0 \quad (9.12)$$

因为 $s = \sigma + j\omega$ 和 $\sigma = \Re\{s\}$, 又可等效为

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.13)$$

这就是

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s + a}, \quad \Re\{s\} > -a \quad (9.14)$$

例如, 若 $a = 0$, $x(t)$ 就是单位阶跃函数, 其拉普拉斯变换为 $X(s) = 1/s$, $\Re\{s\} > 0$ 。

从这个例子应该特别注意到，正如傅里叶变换不是对所有信号都收敛一样，拉普拉斯变换也可能对某些 $\Re\{s\}$ 值收敛，而对另一些 $\Re\{s\}$ 则不收敛。在(9.13)式中，该拉普拉斯变换仅对 $\sigma = \Re\{s\} > -a$ 收敛，如果 a 为正值，那么， $X(s)$ 就能在 $\sigma=0$ 求值，而得到

$$X(0 + j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (9.15)$$

如(9.6)式所指出的，对于 $\sigma=0$ ，拉普拉斯变换就等于傅里叶变换，这只要将(9.9)式和(9.15)式比较一下就能看出。如果 a 是负的或为零，拉普拉斯变换仍然存在，但傅里叶变换却不存在。

例 9.2 为了与例 9.1 相比较, 现考虑第二个例子。信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = -e^{-at}u(-t) \quad (9.16)$$

那么

$$\begin{aligned} X(s) &= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} e^{-at} u(-t) dt \\ &= -\int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt \end{aligned} \quad (9.17)$$

或者

$$X(s) = \frac{1}{s+a} \quad (9.18)$$

对这个例子, 为保证收敛, 则要求 $\Re\{s+a\} < 0$, 或者 $\Re\{s\} < -a$, 这就是说

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{x} \frac{1}{s+a}, \quad \Re\{s\} < -a \quad (9.19)$$

比较一下(9.14)式和(9.19)式可见,对例 9.1 和例 9.2 中的两个信号,它们的拉普拉斯变换代数表示式都是一样的;然而,这个代数表示式能成立的 s 域却是大不相同的。这就说明,在给出一个信号的拉普拉斯变换时,代数表示式和该表示式能成立的变量 s 值的范围都应该给出。一般把使积分(9.3)式收敛的 s 值的范围称为拉普拉斯变换的收敛域,特简记作 ROC。也就是说,ROC 是由这样一些 $s = \sigma + j\omega$ 组成的,对这些 s 来说, $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换收敛。随着我们深入讨论拉普拉斯变换的性质,关于 ROC 将有更多的话要说。

表示收敛域 ROC 的一个方便的办法是如图 9.1 所示。变量 s 是一个复数,在图 9.1 上展示出的复平面,一般就称为与这个复变量有关的 s 平面。沿水平轴是 $\Re\{s\}$ 轴,垂直轴是 $\Im\{s\}$ 轴,水平轴和垂直轴有时分别称为 σ 轴和 $j\omega$ 轴。图 9.1(a)的阴影部分就是对应于例 9.1 的收敛域;而图 9.1(b)的阴影部分指出了例 9.2 的收敛域。

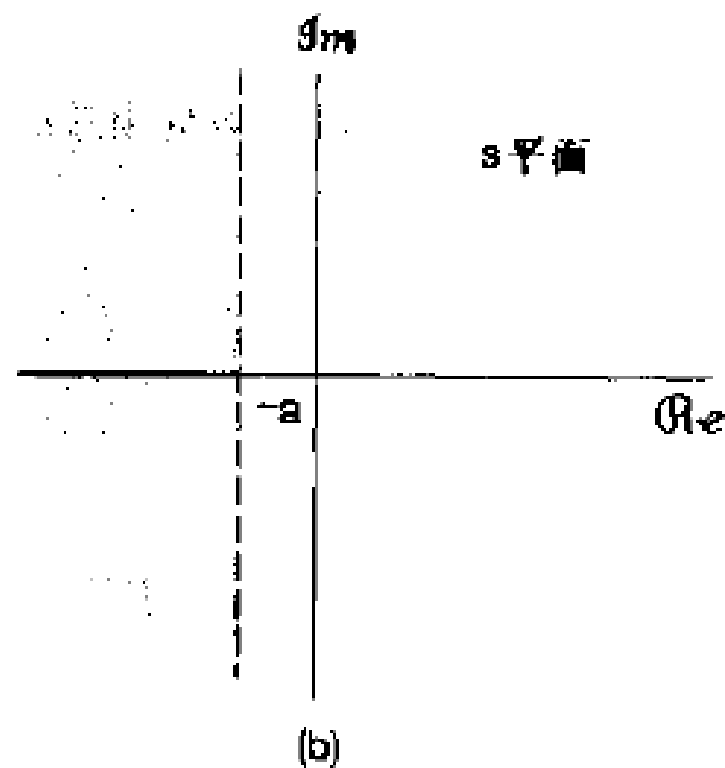
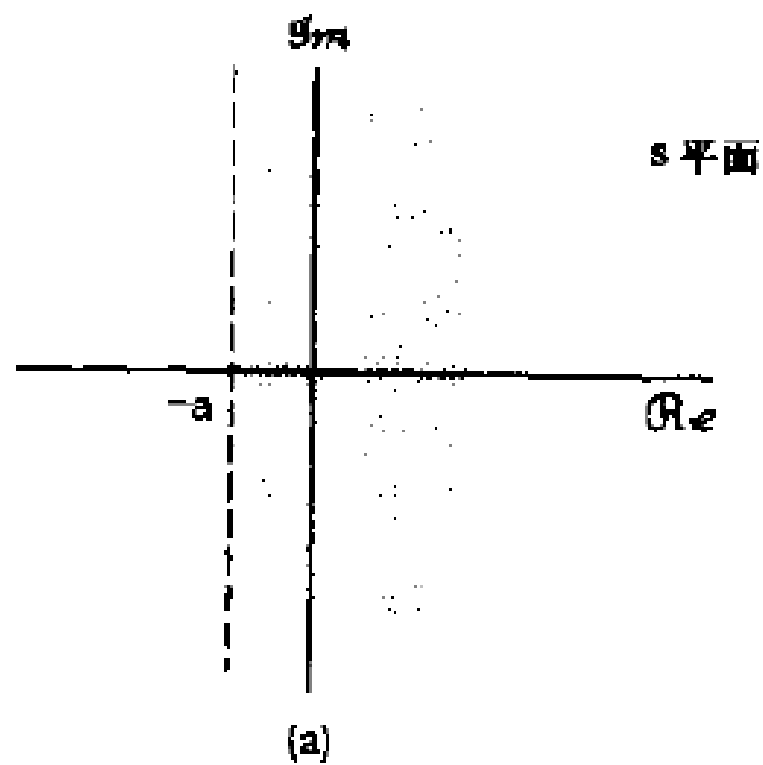


图 9.1 (a)例 9.1 的 ROC; (b)例 9.2 的 ROC

例 9.3 本例考虑的信号是两个实指数信号的和, 即

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \quad (9.20)$$

于是其拉普拉斯变换的代数表示式为

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} [3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)]e^{-st}dt \\ &= 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}e^{-st}u(t)dt - 2\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}e^{-st}u(t)dt \end{aligned} \quad (9.21)$$

(9.21)式中的每个积分式都与(9.10)式的积分式具有相同的形式, 这样就能利用例 9.1 的结果而得到

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} \quad (9.22)$$

为了确定它的 ROC, 我们注意到, 因为 $x(t)$ 是两个实指数信号的和, 而由(9.21)式可知, $X(s)$ 是单独每一项的拉普拉斯变换之和。第一项是 $3e^{-2t}u(t)$ 的拉普拉斯变换, 而第二项是 $-2e^{-t}u(t)$ 的拉普拉斯变换。由例 9.1 知道

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2$$

于是, 使这两项拉普拉斯变换都收敛的那些 $\Re\{s\}$ 值的集合就是 $\Re\{s\} > -1$, 这样把(9.22)式右边这两项合起来, 就得到

$$3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.23)$$

例 9.4 本例要考虑实指数和复指数之和的信号为

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}(\cos 3t)u(t) \quad (9.24)$$

利用欧拉关系, 可写为

$$x(t) = \left[e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \frac{1}{2}e^{-(1+3j)t} \right] u(t)$$

那么 $x(t)$ 的拉普拉斯变换就能表示成

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st}dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1-3j)t}u(t)e^{-st}dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(1+3j)t}u(t)e^{-st}dt \end{aligned} \quad (9.25)$$

(9.25)式中的每一个积分都代表了在例 9.1 中所遇到过的拉普拉斯变换, 即

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (9.26)$$

$$e^{-(1-3j)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+(1-3j)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.27)$$

$$e^{-(1+3j)t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+(1+3j)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.28)$$

为了使这三个拉普拉斯变换都同时收敛, 必须有 $\Re\{s\} > -1$, 因此, $x(t)$ 的拉普拉斯变换为

$$\frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+(1-3j)} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s+(1+3j)} \right), \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.29)$$

或者，合并为公共分母得

$$e^{-2t}u(t) + e^{-2t}(\cos 3t)u(t) \xleftrightarrow{z} \frac{2s^2 + 5s + 12}{(s^2 + 2s + 10)(s + 2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.30)$$

以上 4 个例子的每一个，其拉普拉斯变换式都是有理的，也即都是复变量 s 的两个多项式之比，具有如下形式：

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \quad (9.31)$$

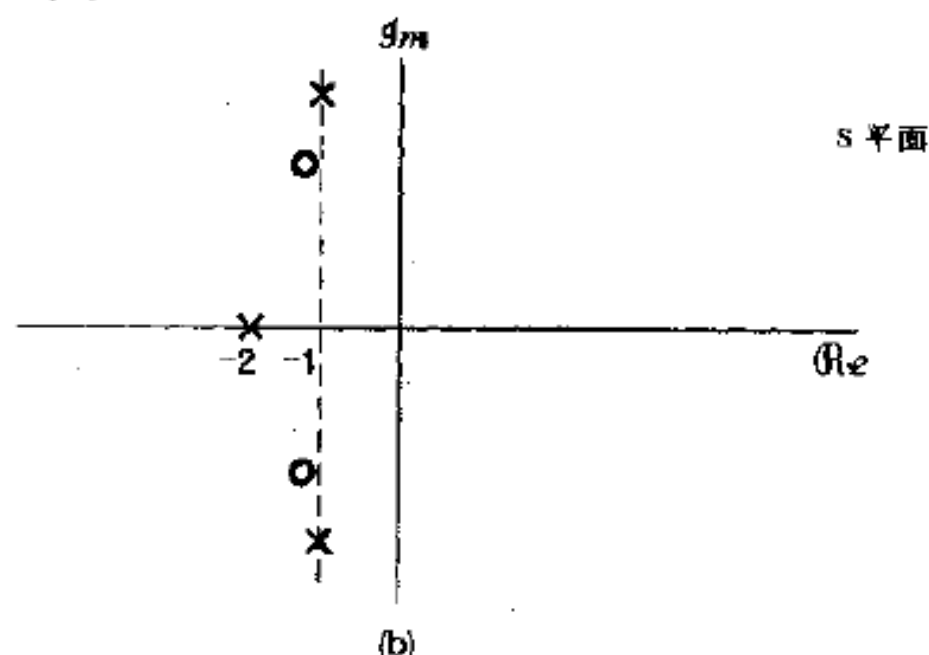
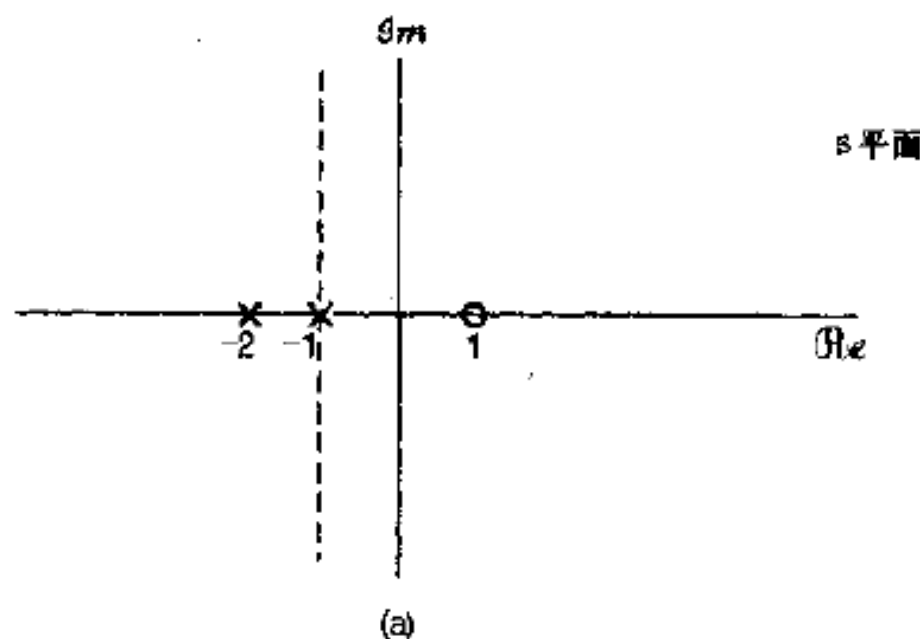


图 9.2 (a)和(b)分别为例 9.3 和例 9.4 的拉普拉斯变换的 s 平面表示。图中每一个 $\times$ 标出相应拉普拉斯变换的一个极点位置，也就是分母多项式一个根的位置。同理，每个 $\circ$ 标出一个零点，即分子多项式一个根的位置。ROC 用阴影区指出

例 9.5 设信号 $x(t)$ 为

$$x(t) = \delta(t) - \frac{4}{3}e^{-t}u(t) + \frac{1}{3}e^{2t}u(t) \quad (9.32)$$

(9.32) 式中右边第二和第三项的拉普拉斯变换都可由例 9.1 求出，而单位冲激函数的拉普拉斯变换可直接求出为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-st}dt = 1 \quad (9.33)$$

该结果对任何 s 值都成立。这就是说， $\mathcal{L}[\delta(t)]$ 的 ROC 是整个 s 平面。利用这个结果。再与(9.32)式其余两项一起就得出

$$X(s) = 1 - \frac{4}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (9.34)$$

或者

$$X(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)}, \quad \Re\{s\} > 2 \quad (9.35)$$

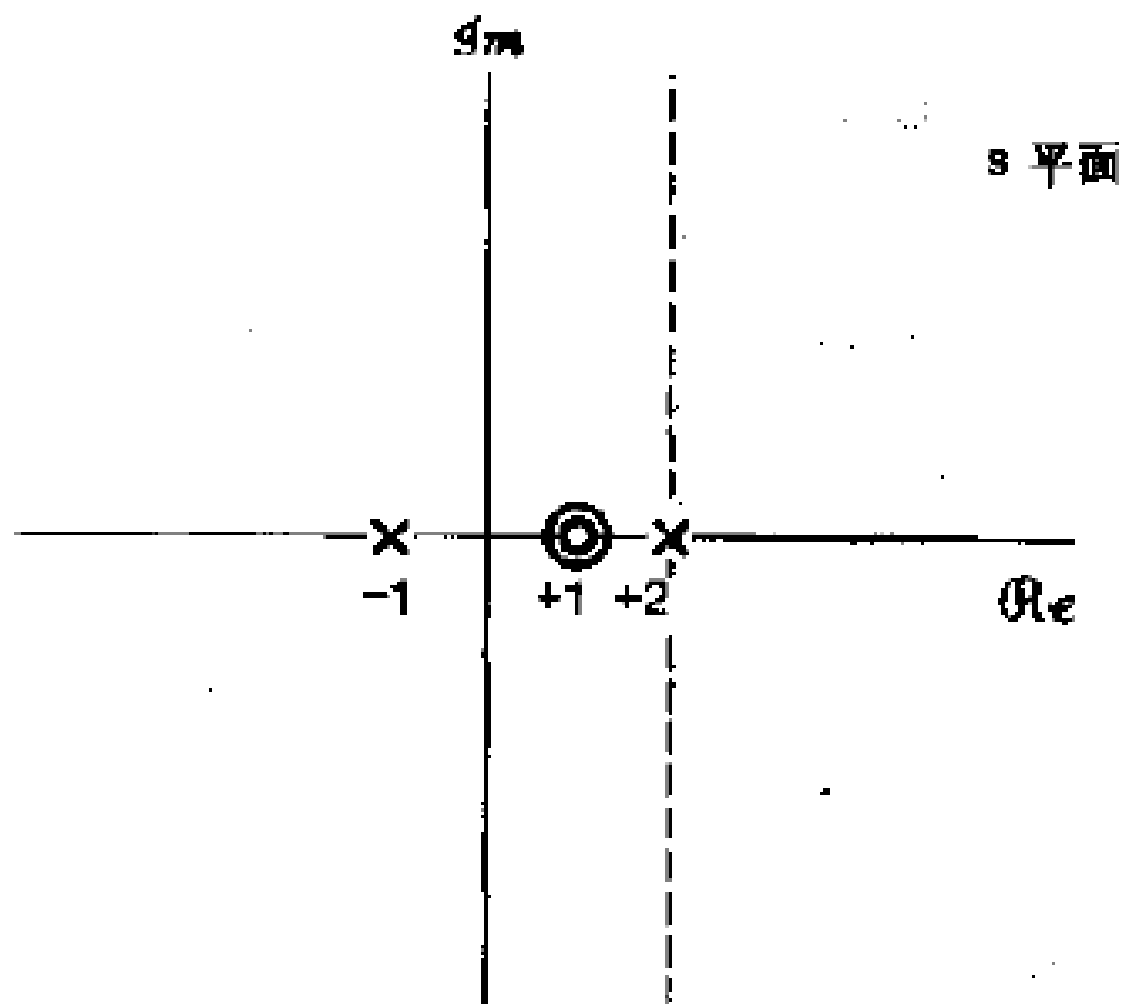


图 9.3 例 9.5 的零极点图和 ROC

9.2 拉普拉斯变换收敛域

从前面的讨论已经看到，拉普拉斯变换的全部特性不仅要求 $X(s)$ 的代数表示式，而且还应该伴随着收敛域的说明。这一点在例 9.1 和例 9.2 中体现得最为明显：两个很不相同的信号能够有完全相同的 $X(s)$ 代数表示式，因此它们的拉普拉斯变换只有靠收敛域才能区分。这一节将说明对各种信号在 ROC 上的某些具体限制。将会看到，理解了这些限制往往使我们仅仅从 $X(s)$ 的代数表示式和 $x(t)$ 在时域中某些一般特征就能明确地给出或构成收敛域 ROC。

性质 1: $X(s)$ 的 ROC 在 s 平面内由平行于 $j\omega$ 轴的带状区域所组成。

这一性质来自于这样一个事实: $X(s)$ 的 ROC 是由这样一些 $s = \sigma + j\omega$ 所组成, 在那里 $x(t)e^{-\sigma t}$ 的傅里叶变换收敛, 也就是说, $x(t)$ 的拉普拉斯变换的 ROC 是由这样一些 s 值组成的, 对于这些 s 值, $x(t)e^{-\sigma t}$ 是绝对可积的^①, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (9.36)$$

因为这个条件只与 σ , 即 s 的实部有关, 所以就得到性质 1。

性质 2: 对有理拉普拉斯变换来说, ROC 内不包括任何极点。

这个性质, 在到目前为止所研究的例子中都能很容易地看出。因为, 在一个极点处, $X(s)$ 为无限大, (9.3) 式的积分显然在极点处不收敛, 所以 ROC 内不能包括属于极点的 s 值。

性质 3: 如果 $x(t)$ 是有限持续期, 并且是绝对可积的, 那么 ROC 就是整个 s 平面。

这个结果背后的直观性由图 9.4 和图 9.5 可以想到。这就是, 一个有限持续期的信号具有这个性质, 它在某一有限区间之外都是零, 如图 9.4 所示。在图 9.5(a) 中画出了图 9.4 这样的 $x(t)$ 乘以一个衰减的指数函数, 而在图 9.5(b) 则画出同一类型的信号乘以一个增长的

指数函数。因为， $x(t)$ 为非零的区间是有限长的，所以指数加权永远不会无界，这样 $x(t)$ 的可积性不会由于这个指数加权而破坏就是合情合理的了。

性质 3 一个更加正规的证明如下：假设 $x(t)$ 是绝对可积的，所以有

$$\int_{T_1}^{T_2} |x(t)| dt < \infty \quad (9.37)$$

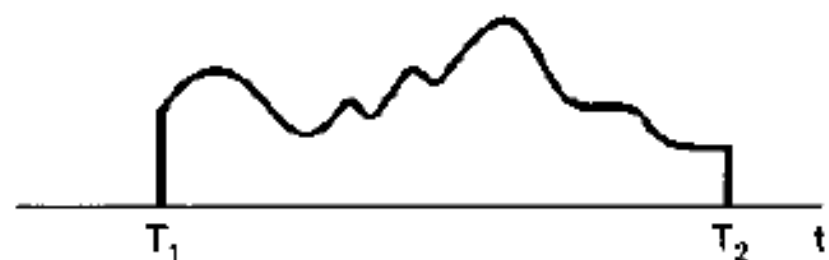
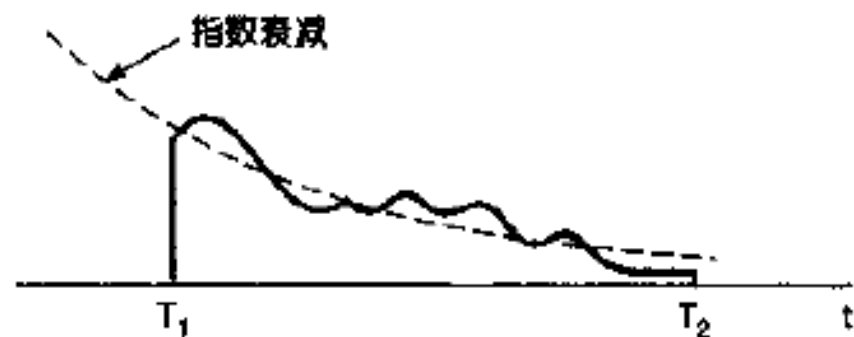
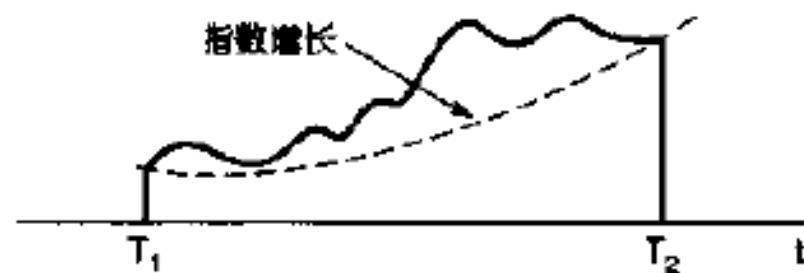


图 9.4 有限持续期信号



(a)



(b)

图 9.5 (a)有限持续期信号乘以衰减指数；(b)有限持续期信号乘以增长指数

例 9.6 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 < t < T \\ 0, & \text{其余 } t \end{cases} \quad (9.41)$$

那么其傅里叶变换 $X(s)$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} [1 - e^{-(s+a)T}] \quad (9.42)$$

在这个例子中, 因为 $x(t)$ 是有限长的, 由性质 3, 其 ROC 就是整个 s 平面。在 (9.42) 式中, 形式上好像 $X(s)$ 有一个极点在 $s = -a$, 而这个根据性质 3 与 ROC 由整个 s 平面所组成是不一致的。然而, 事实上 (9.42) 式的代数表示式中在 $s = -a$ 都是分子和分母的零点! 为了确定 $s = -a$ 处的 $X(s)$ 值, 可以应用罗比塔法则而得

$$\lim_{s \rightarrow -a} X(s) = \lim_{s \rightarrow -a} \left[\frac{\frac{d}{ds}(1 - e^{-(s+a)T})}{\frac{d}{ds}(s+a)} \right] = \lim_{s \rightarrow -a} T e^{-aT} e^{-sT}$$

$$X(-a) = T$$

性质 4: 如果 $x(t)$ 是右边信号, 而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内, 那么 $\Re\{s\} > \sigma_0$ 的全部 s 值都一定在 ROC 内。

若在某有限时间 T_1 之前, $x(t) = 0$, 则称该信号为右边信号, 如图 9.6 所示。对于这样一个信号, 有可能不存在任何 s 值, 使其拉普拉斯变换收敛。一个例子就是 $x(t) = e^{t^2} u(t)$ 。然而, 假如拉普拉斯变换对某一 σ 值收敛, 譬如说 σ_0 , 那么

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.44)$$

或者, 因为 $x(t)$ 是右边信号, 可等效为

$$\int_{T_1}^{+\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \quad (9.45)$$

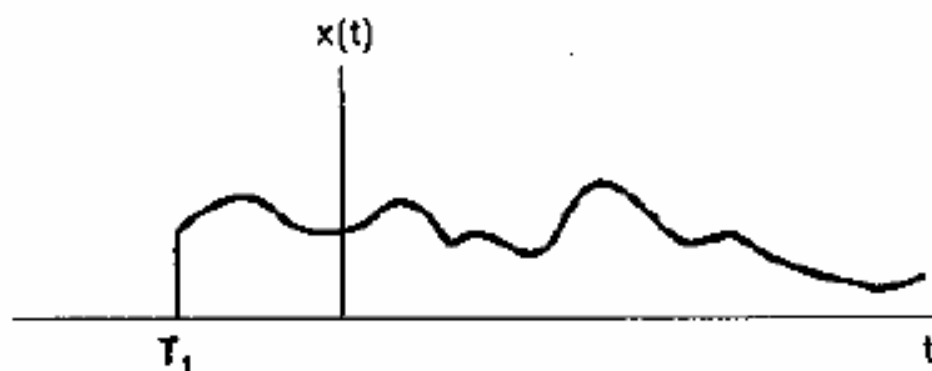


图 9.6 右边信号

如果 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，由于随 $t \rightarrow +\infty$ ， $e^{-\sigma_1 t}$ 衰减得比 $e^{-\sigma_0 t}$ 快，如图 9.7 所示，那么 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 也就一定绝对可积。正规一些，可以说，由于 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，而有

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\leq e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt \end{aligned} \quad (9.46)$$

因为 T_1 是有限值，根据(9.45)式，在(9.46)式不等式的右边就是有限的，所以 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 就是绝对可积的。

应该注意到，在以上的证明中明显地是依赖于这一事实： $x(t)$ 是右边信号。因而即使 $\sigma_1 > \sigma_0$ ，随着 $t \rightarrow -\infty$ ， $e^{-\sigma_1 t}$ 发散快于 $e^{-\sigma_0 t}$ ，但是由于 $t < T_1$ 时， $x(t) = 0$ ， $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ 在负的时间轴方向也不能无界地增长。同时，在这种情况下，如果有某一点 s 是在 ROC 内，那么所有位于这个 s 点右边的点，也就是所有具有更大实部的点，都在 ROC 内。为此，这时一般就说 ROC 是在右半平面。

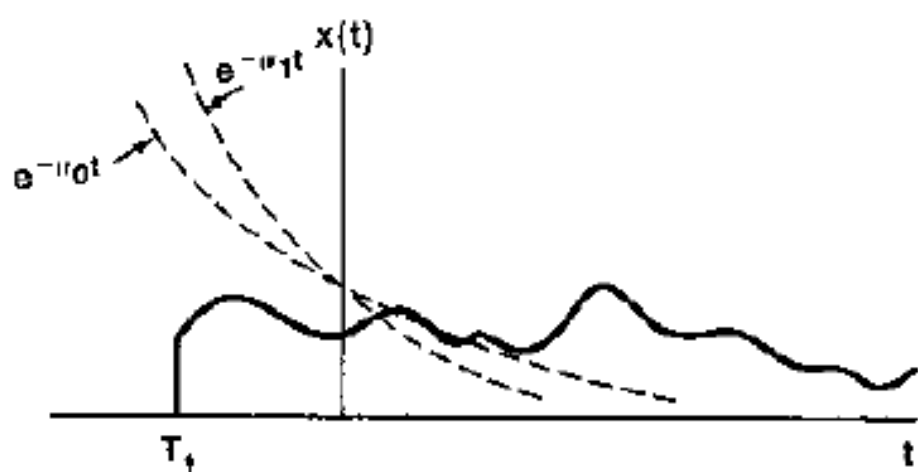


图 9.7 若 $x(t)$ 是右边信号，而 $x(t)e^{-\sigma_0 t}$ 是绝对可积的，那么 $x(t)e^{-\sigma_1 t}$ ， $\sigma_1 > \sigma_0$ 也一定绝对可积

性质 5: 如果 $x(t)$ 是左边信号, 而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内, 那么 $\Re\{s\} < \sigma_0$ 的全部 s 值也一定在 ROC 内。

若在某一有限时间 T_2 以后, $x(t) = 0$, 则称该信号为**左边信号**, 如图 9.8 所示。这个性质的证明和直观性完全和性质 4 所做的相类似。同时, 对于一个左边信号, 如果有某一点 s 是在 ROC 内, 那么所有位于这个 s 点左边的点也都在 ROC 内。因此一般就说 ROC 是在左半平面。

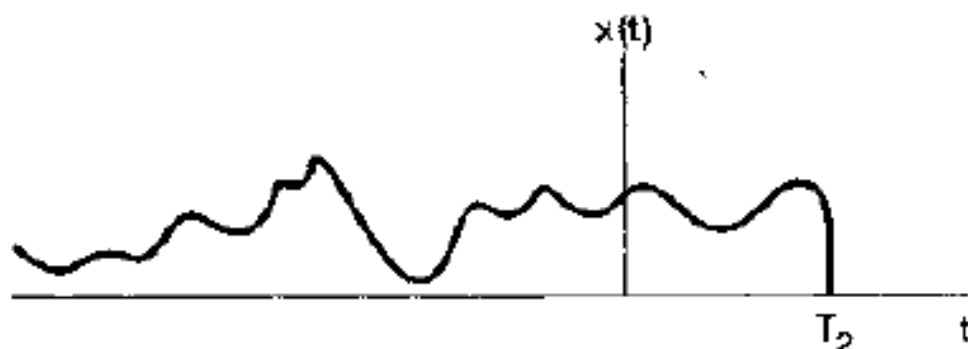
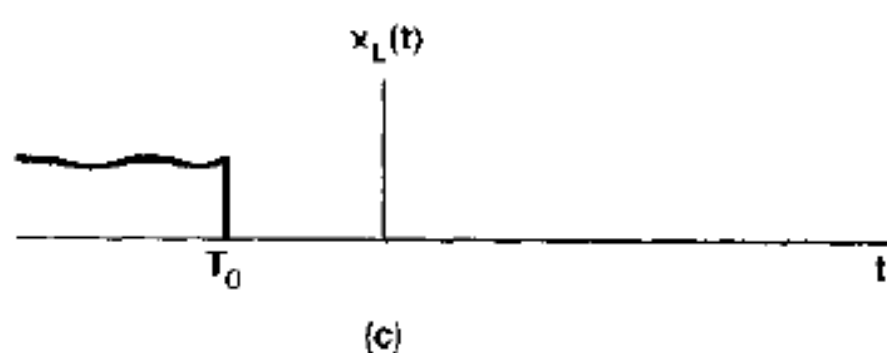
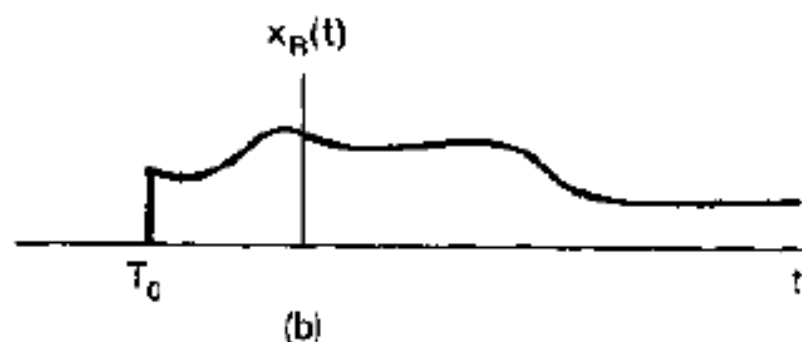
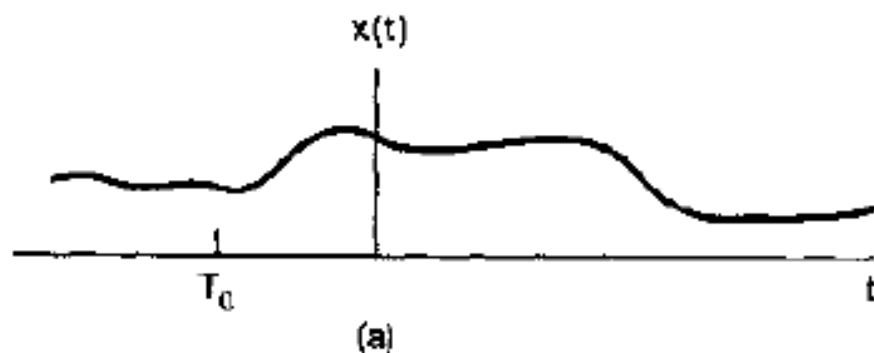
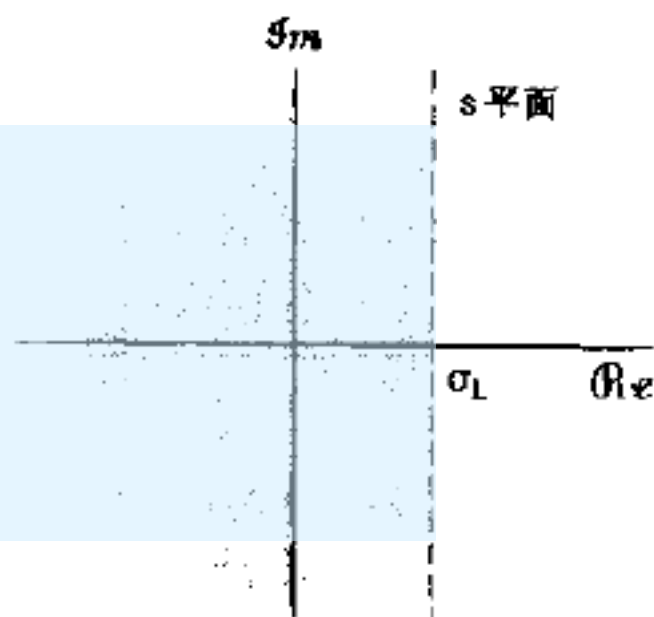
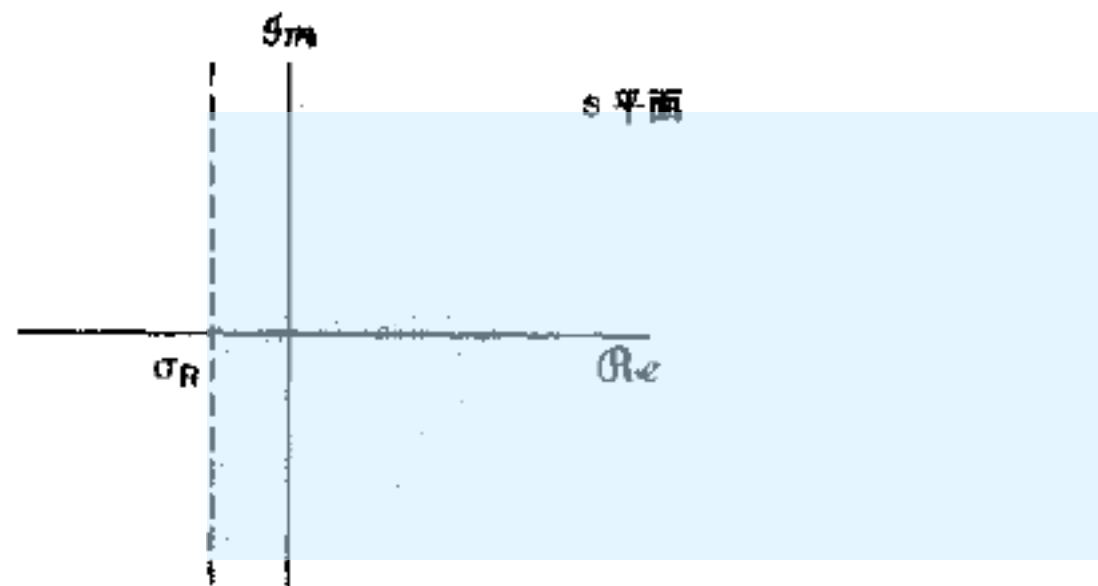


图 9.8 左边信号

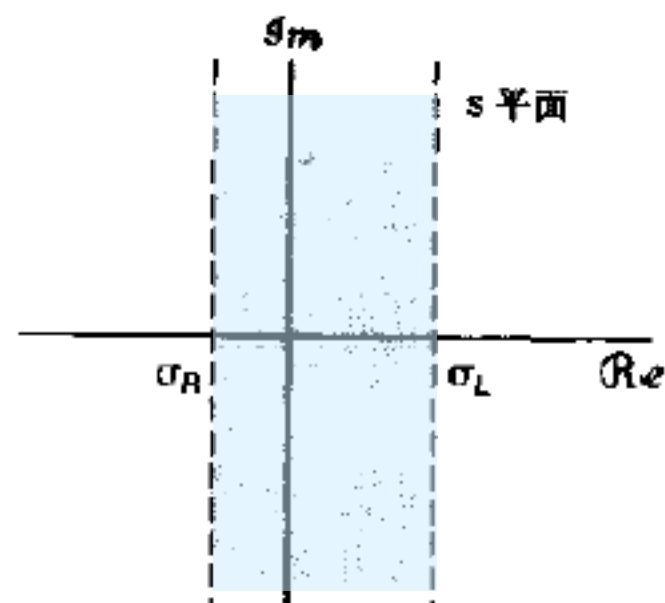
性质 6: 如果 $x(t)$ 是双边信号, 而且如果 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 这条线位于 ROC 内, 那么 ROC 就一定是由 s 平面的一条带状区域所组成, 直线 $\Re\{s\} = \sigma_0$ 位于带中。

一个双边信号就是对 $t > 0$ 和 $t < 0$ 都具有无限范围的信号, 如图 9.9(a) 所示。对于这样一个信号, 其收敛域 ROC 可以这样来求出: 选取任一时间 T_0 , 然后将 $x(t)$ 分成右边信号





(b)



(c)

例 9.7 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-b|t|} \quad (9.47)$$

对于 $b > 0$ 和 $b < 0$ 均如图 9.11 所示。因为这是一个双边信号，可将它分为右边信号和左边信号之和，即

$$x(t) = e^{-b}u(t) + e^{+b}u(-t) \quad (9.48)$$

由例 9.1 有

$$e^{-b}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+b}, \quad \Re\{s\} > -b \quad (9.49)$$

由例 9.2 有

$$e^{+b}u(-t) \leftrightarrow \frac{-1}{s-b}, \quad \Re\{s\} < +b \quad (9.50)$$

虽然，(9.48) 式中每一单独项的拉普拉斯变换都有一个收敛域，但如果 $b \leq 0$ ，就没有公共的收敛域，

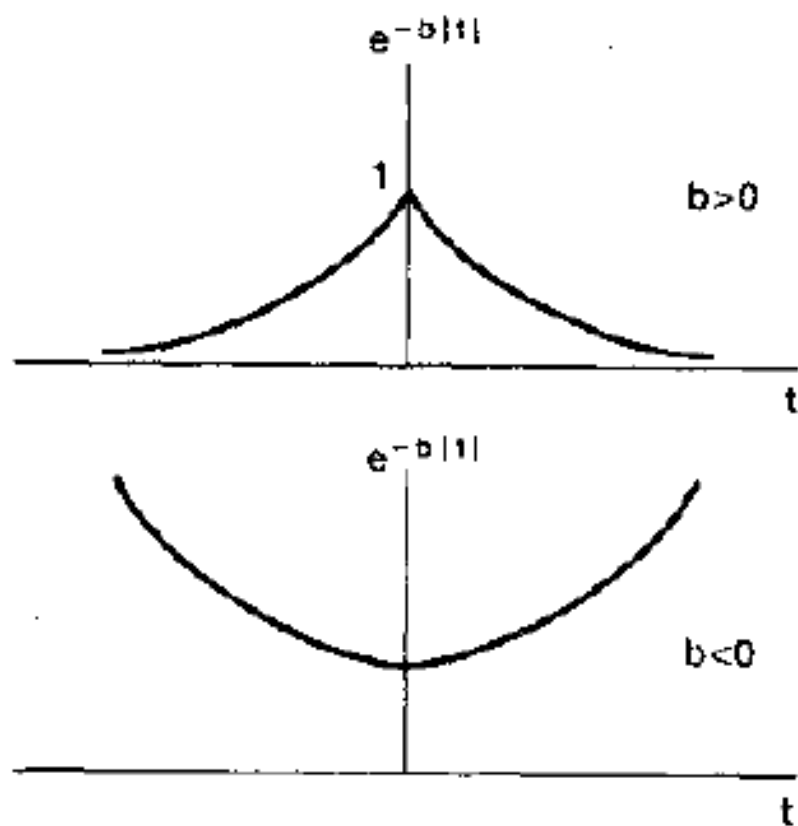


图 9.11 $b > 0$ 和 $b < 0$ 时的信号 $x(t) = e^{-b|t|}$

于是对这样一些 b 值, $x(t)$ 就没有拉普拉斯变换。如果 $b > 0$, $x(t)$ 的拉普拉斯变换是

$$e^{-b|t|} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{s+b} - \frac{1}{s-b} = \frac{-2b}{s^2 - b^2}, \quad -b < \Re\{s\} < +b \quad (9.51)$$

相应的零极点图如图 9.12 所示, 阴影区所指为 ROC。

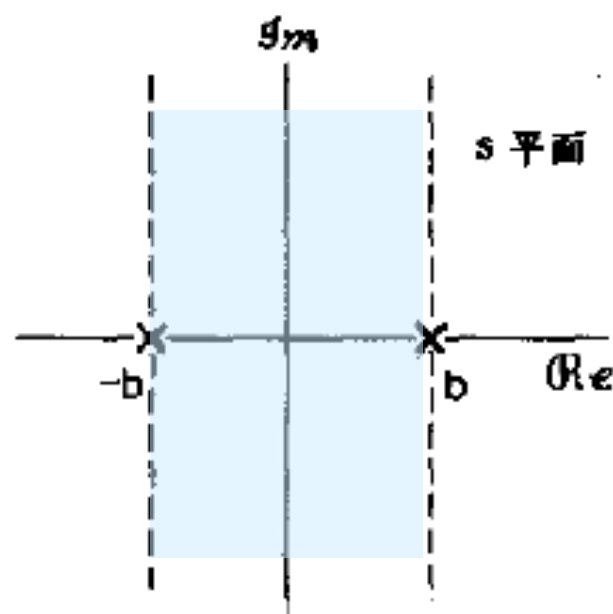


图 9.12 例 9.7 的零极点图
及其 ROC

一个信号要么没有拉普拉斯变换，否则就一定属于由性质 3 到性质 6 这 4 类情况中的某一种。于是对具有某一拉普拉斯变换的信号而言，ROC 一定是整个 s 平面(有限长信号)、某一左半平面(左边信号)、某一右半平面(右边信号)、或者一条带状收敛域(双边信号)等这 4 种中的一种。在所有已经讨论过的例题中，收敛域 ROC 都有一个另外的性质，即：收敛域在每一个方向上(也就是 $\Re\{s\}$ 增加和 $\Re\{s\}$ 减小)都是被极点所界定，或者延伸到无限远。事实上；对有理拉普拉斯变换来说，这总是成立的；

性质 7: 如果 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的，那么它的 ROC 是被极点所界定或延伸到无限远。另外，在 ROC 内不包含 $X(s)$ 的任何极点。

线性组合中，每一项变换的 ROC 一定有这一性质。作为性质 7 的一个结果，再与性质 4 和性质 5 结合在一起就有

性质 8：如果 $x(t)$ 的拉普拉斯变换 $X(s)$ 是有理的，若 $x(t)$ 是右边信号，则其 ROC 在 s 平面上位于最右边极点的右边；若 $x(t)$ 是左边信号，则其 ROC 在 s 平面上位于最左边极点的左边。

例 9.8 设有一拉普拉斯变换代数表示式为

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad (9.52)$$

其零极点图如图 9.13(a) 所示。正如在图 9.13(b)~(d) 所指出的，能与这个代数表示式有关的存在着三种可能的 ROC，对应着三种不同的信号。与图 9.13(b) 零极点图有关的是右边信号。因为 ROC 包括 $j\omega$ 轴，所以该信号的傅里叶变换收敛。图 9.13(c) 对应于一个左边信号，而图 9.13(d) 则对应一个双边信号。后面这两个信号当中没有一个有傅里叶变换；因为它们的 ROC 都不包括 $j\omega$ 轴。

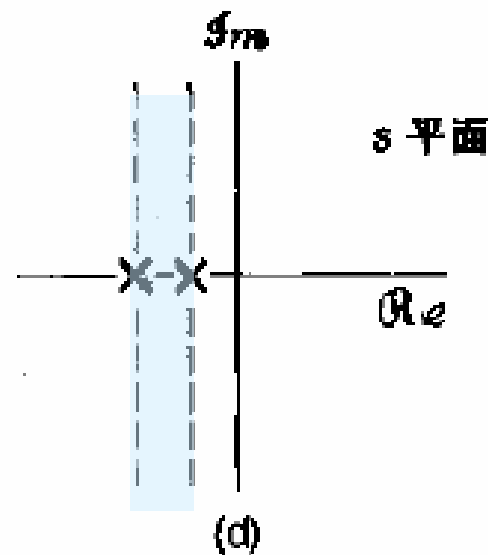
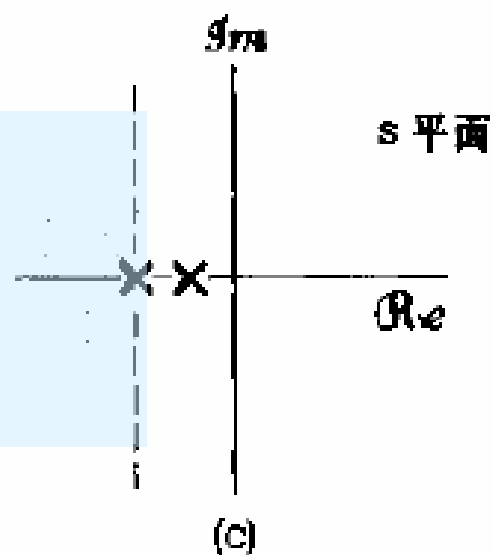
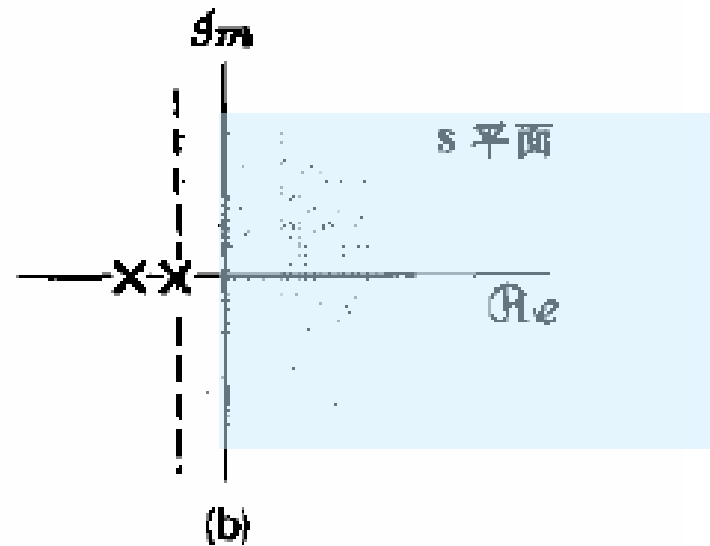
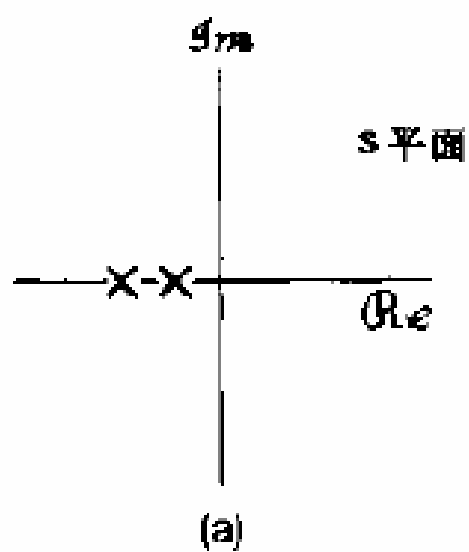


图 9.13 (a)例 9.8 的零极点图; (b)对应于右边信号的 ROC;
(c)对应于左边信号的 ROC; (d)对应于双边信号的 ROC

9.3 拉普拉斯反变换

❖ 拉普拉斯反变换式:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds$$

该式说明, $x(t)$ 可以用一个复指数信号的加权积分来表示。(9.56)式的积分路径是在 s 平面内对应于满足 $\Re\{s\} = \sigma$ 的全部 s 点的这条直线, 该直线平行于 $j\omega$ 轴。再者, 在 ROC 内可以选取任何这样一根直线; 也就是说, 在 ROC 内可以选取任何 σ 值, 而使 $X(\sigma + j\omega)$ 收敛。

例如，假设没有重阶极点，并假设分母多项式的阶高于分子多项式的阶，那么 $X(s)$ 就可以展开为如下形式：

$$X(s) = \sum_{i=1}^m \frac{A_i}{s + a_i} \quad (9.57)$$

根据 $X(s)$ 的收敛域 ROC，在该式中每一项的 ROC 都能推演出来，然后由例 9.1 和例 9.2，每一项的拉普拉斯反变换都可被确定。在 (9.57) 式中每一项 $A_i/(s + a_i)$ 的反变换都有两种可能的选择，若 ROC 是位于极点 $s = -a_i$ 的右边，那么这一项的反变换就是 $A_i e^{-a_i t} u(t)$ ，是一个右边信号；若 ROC 是位于极点 $s = -a_i$ 的左边，那么这一项的反变换就是 $-A_i e^{-a_i t} u(-t)$ ，是一个左边信号。将 (9.57) 式中每一项的反变换相加，就得到 $X(s)$ 的反变换。详细过程最好通过几个例子来给出。

例 9.9 设有 $X(s)$ 为

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \operatorname{Re}\{s\} > -1 \quad (9.58)$$

为了求它的反变换, 先对它进行部分分式展开为

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} \quad (9.59) \end{aligned}$$

根据附录介绍的办法, 将(9.59)式两边各乘以 $(s+1)(s+2)$ 。然后令两边同 s 方次的系数相等, 可求出系数 A 和 B 。另一种方法是利用下列关系:

$$A = [(s+1)X(s)]|_{s=-1} = 1 \quad (9.60)$$

$$B = [(s+2)X(s)]|_{s=-2} = -1 \quad (9.61)$$

由此, $X(s)$ 的部分分式展开式为

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \quad (9.62)$$

由例 9.1 和例 9.2 可知, 根据 ROC

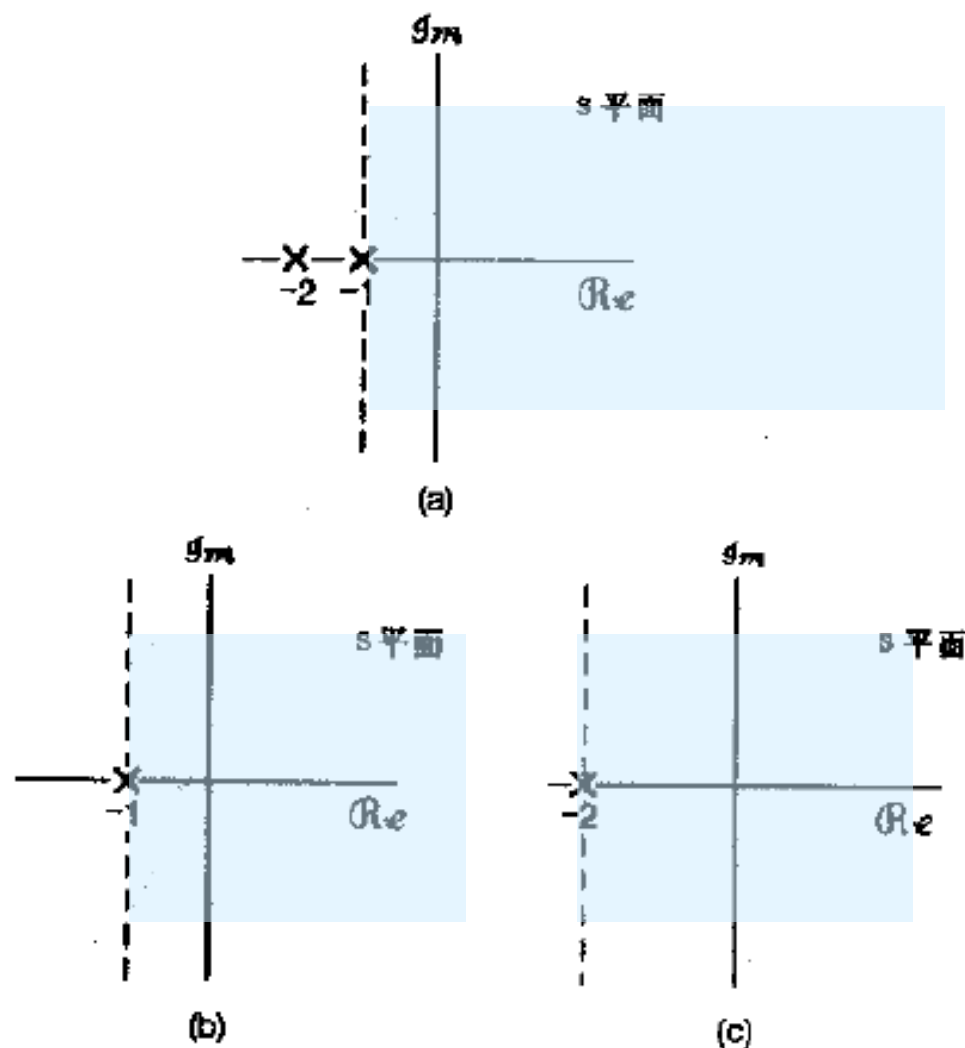


图 9.14 例 9.8 $X(s)$ 的部分分式展开式中每一项 ROC 的构成:

(a) $X(s)$ 的零极图和 ROC;

(b) 在 $s = -1$ 的极点及其 ROC;

(c) 在 $s = -2$ 的极点及其 ROC

号。由例 9.1, (9.62) 式中每一项的反变换就是

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.63)$$

$$e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -2 \quad (9.64)$$

由此可得

$$[e^{-t} - e^{-2t}]u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.65)$$

例 9.10 现在假设 $X(s)$ 的代数表示式仍由(9.58)式给出, 但 ROC 是在 $\Re\{s\} < -2$ 的左半平面。 $X(s)$ 的部分分式展开仅与它的代数表示式有关, 所以(9.62)式仍然不变。然而, 由于这个新的 ROC 是位于两个极点的左边, 所以(9.62)式中每一项的 ROC 也都必须位于极点的左边。这就是说, 对应于极点 $s = -1$ 这一项的 ROC 是 $\Re\{s\} < -1$; 而对应于极点 $s = -2$ 这一项的 ROC 是 $\Re\{s\} < -2$ 。那么, 根据例 9.2 就有

$$-e^{-t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} < -1 \quad (9.66)$$

$$-e^{-2t}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{s+2}, \quad \Re\{s\} < -2 \quad (9.67)$$

所以有

$$x(t) = [-e^{-t} + e^{-2t}]u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} < -2 \quad (9.68)$$

例 9.11 最后, 假设(9.58)式的 $X(s)$, 其 ROC 是 $-2 < \Re\{s\} < -1$, 这时的 ROC 是在 $s = -1$ 极点的左边, 所以对应于这一项的就是如(9.66)式的左边信号; 而 ROC 是在 $s = -2$ 极点的右边, 所以这一项就对应于(9.64)式的右边信号。将两者合在一起求得

$$x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t) \xleftrightarrow{x} \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad -2 < \Re\{s\} < -1 \quad (9.69)$$

9.5 拉普拉斯变换的性质

9.5.1 线性

❖ 若 $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$, ROC为 R_1

$x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$, ROC为 R_2

则

$ax_1(t) + bx_2(t) \xrightarrow{L} aX_1(s) + bX_2(s)$, ROC包括 $R_1 \cap R_2$

- ❖ $X(s)$ 的收敛域至少是 R_1 和 R_2 的交集, 当然这个交可能是空的, 此时 $x(t)$ 不存在拉普拉斯变换。
- ❖ $X(s)$ 的收敛域也可能比这个交集大, 如 $x_1(t) = x_2(t)$, 且 $a = -b$, 则 $x(t) = 0$, 因此 $X(s) = 0$, 这样 $X(s)$ 的ROC就是整个 s 平面。

例 9.13 这个例子要说明一个由信号的线性组合构成的信号，其拉普拉斯变换的 ROC 有时可能会延伸到超过这些单个项 ROC 的交。考虑信号

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t) \quad (9.83)$$

这里 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的拉普拉斯变换分别是

$$X_1(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.84)$$

和
$$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.85)$$

$X_1(s)$ 和 $X_2(s)$ 的零极点图，包括 ROC 如图 9.22(a) 和 (b) 所示。由 (9.82) 式

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \quad (9.86)$$

由此，在 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合中，在 $s = -1$ 的极点被 $s = -1$ 的零点所抵消。

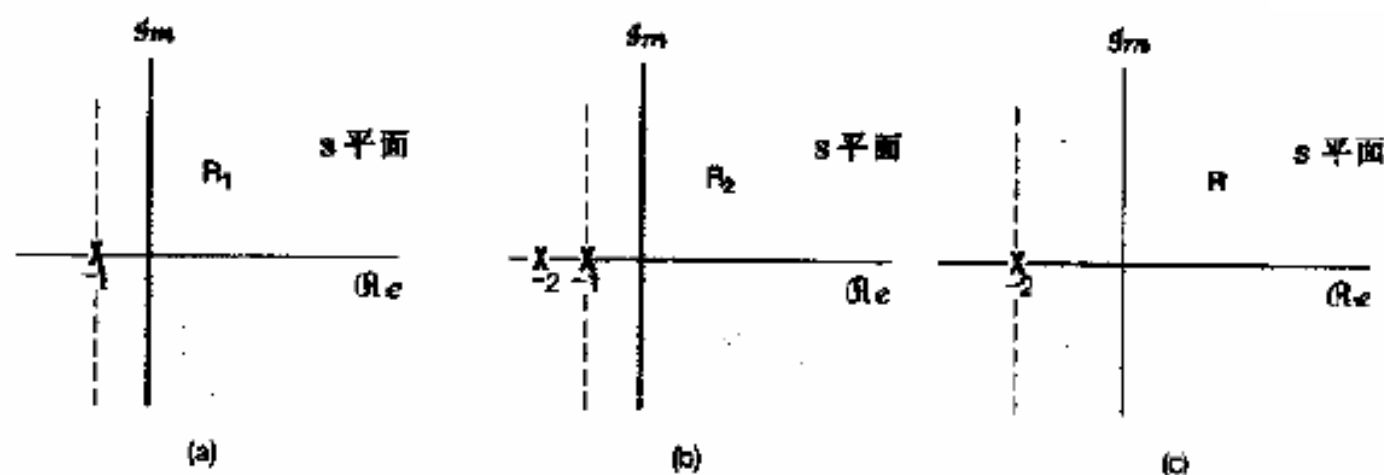


图 9.22 例 9.13 的零极点图和 ROC: (a) $X_1(s)$; (b) $X_2(s)$;

(c) $X_1(s) - X_2(s)$ 。 $X_1(s) - X_2(s)$ 的 ROC 包括 R_1 和 R_2 的

交，这个交可以延伸到被极点 $s = -2$ 界定为止

9.5.2 时移性质

❖ 若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

则 $x(t - t_0) \xleftrightarrow{L} e^{-st_0} X(s)$, $ROC = R$

9.5.3 s域平移

❖ 若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

则 $e^{st_0} x(t) \xleftrightarrow{L} X(s - s_0)$, $ROC = R + \Re\{s_0\}$

这就是说, $X(s - s_0)$ 的ROC是 $X(s)$ 的ROC平移一个 $\Re\{s_0\}$ 。

❖ $\Re\{s_0\}$ 为正, 右移

❖ $\Re\{s_0\}$ 为负, 左移

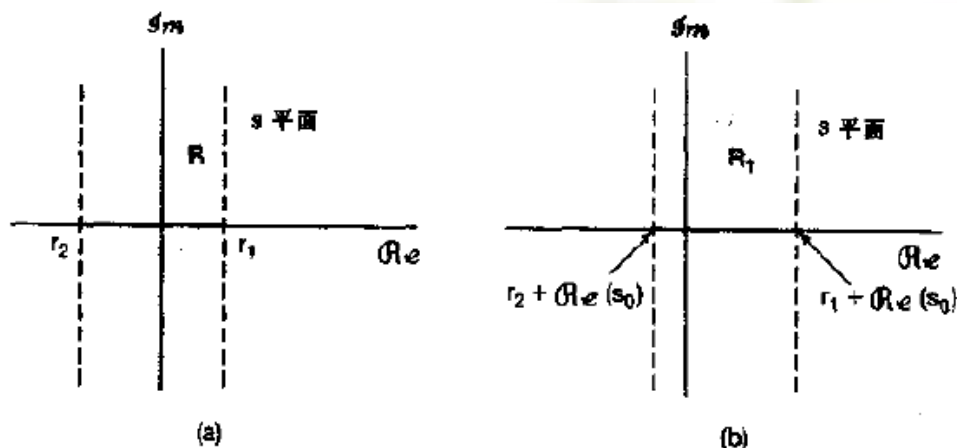


图 9.23 s域平移在 ROC 上的影响: (a) $X(s)$ 的 ROC; (b) $X(s - s_0)$ 的 ROC

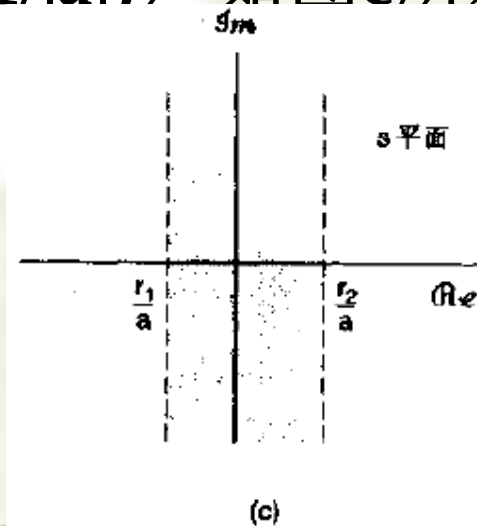
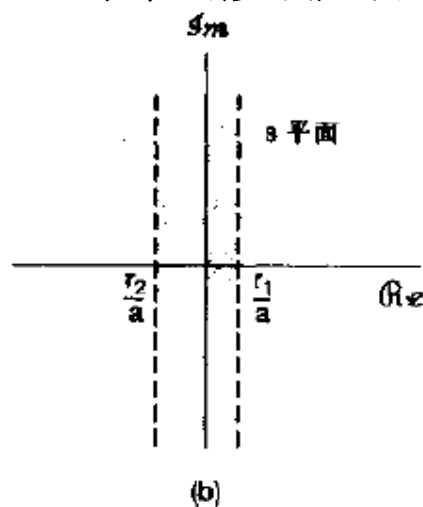
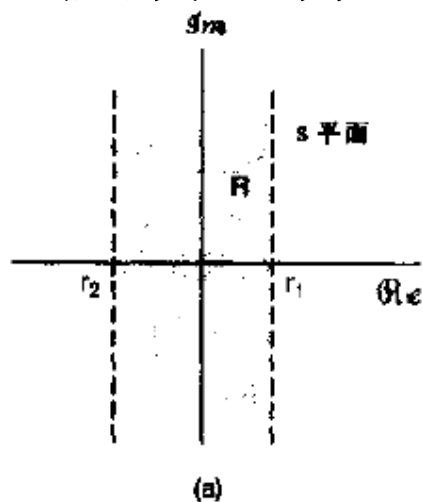
9.5.4 时域尺度变换

❖ 若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

则 $x(at) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right)$, $ROC = \frac{R}{a}$

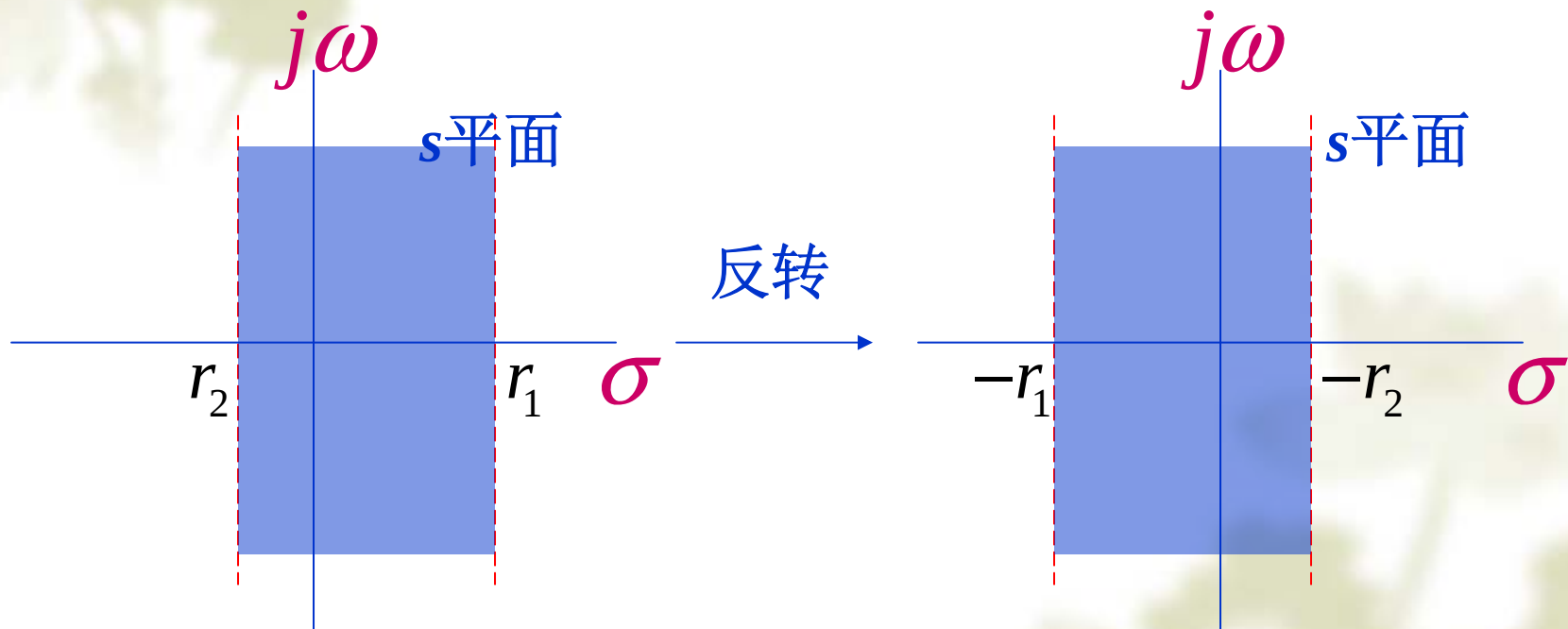
❖ 对于 $a > 1$, $X(s)$ 的 ROC 要压缩一个 $1/a$ 的倍数, 如图 b 所示; 对于 $0 < a < 1$, ROC 要扩展一个 $1/a$ 的倍数。

❖ 若 $a < 0$, ROC 要受到一个倒置, 即 ROC 关于 $j\omega$ 轴的反转, 再加上一个尺度扩展(因子 $1/|a|$), 如图 c 所示



❖ $x(t)$ 的时间反转就形成ROC的反转

$$x(-t) \xleftrightarrow{L} X(-s), \quad \text{ROC} = -R$$



9.5.5 共轭

- ❖ 若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$
则 $x^*(t) \xrightarrow{L} X^*(s^*)$, $ROC = R$
因此, 当 $x(t)$ 为实函数, 有
$$X(s) = X^*(s^*), \quad ROC = R$$

9.5.6 卷积性质

- ❖ 若 $x_1(t) \xrightarrow{L} X_1(s)$, ROC 为 R_1
 $x_2(t) \xrightarrow{L} X_2(s)$, ROC 为 R_2
则 $x_1(t) * x_2(t) \xrightarrow{L} X_1(s)X_2(s)$, ROC 包括 $R_1 \cap R_2$
- ❖ 如果在乘积中有零极点相消的话, $X_1(s)X_2(s)$ 的 ROC 有可能比它们相交的部分大。

9.5.7 时域微分

❖ 若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

则 $\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{L} sX(s)$, ROC 包括 R

❖ 证明：由拉普拉斯反变换式 $x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st} ds$$

❖ 可见， $sX(s)$ 就是 $dx(t)/dt$ 的拉普拉斯变换式。 $sX(s)$ 的 **ROC** 包括 $X(s)$ 的 **ROC**，如果 $X(s)$ 中有一个 $s=0$ 的一阶极点，被乘以 s 抵消的话， $sX(s)$ 就会比 $X(s)$ 的 **ROC** 大。例如，若 $x(t)=u(t)$ ，其 $X(s)=1/s$ ，**ROC** 是 $\text{Re}\{s\}>0$ ，而 $x(t)$ 的导数是一个单位冲激函数 $\delta(t)$ ，其 $X(s)=1$ ，而且 **ROC** 是整个 s 平面。

9.5.8 s域微分

❖ 若 $x(t) \xleftrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$

则

$$-tx(t) \xleftrightarrow{L} \frac{dX(s)}{ds}, \quad ROC = R$$

❖ 证明：对拉普拉斯变换式两边对s微分

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$\boxed{\frac{dX(s)}{ds}} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boxed{-tx(t)} e^{-st} dt$$

新信号

例9.14 求下面 $x(t)$ 的拉普拉斯变换

$$x(t) = te^{-at}u(t)$$

因为有 $e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{s+a}, \Re\{s\} > -a$

由s域微分性质，得：

$$-te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right], \Re\{s\} > -a$$

即：

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} -\frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+a} \right] = \frac{1}{(s+a)^2}, \Re\{s\} > -a$$

注意： $\frac{1}{(s+a)^2}$ 不能用分部展开式 $\frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b}$

例9.15

考虑下面已知拉普拉斯变换 $X(s)$:

$$X(s) = \frac{2s^2 + 5s + 5}{(s+1)^2(s+2)}, \quad \Re\{s\} > -1$$

将附录中介绍的部分分式展开法应用于 $X(s)$, 可写成

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)} + \frac{3}{s+2}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.105)$$

因为 ROC 是在极点 $s = -1$ 和 $s = -2$ 的右边, 所以每一项反变换都是一个右边信号, 再应用 (9.14) 式和 (9.104) 式, 可得反变换为

$$x(t) = [2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}]u(t)$$

$$\frac{A_i}{s + a_i} \xleftrightarrow{\text{右边信号}} A_i e^{-a_i t} u(t)$$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re\{s\} > -a$$

9.5.9 时域积分

- ❖ 若 $x(t) \xrightarrow{L} X(s)$, $ROC = R$
则 $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s)$, ROC 包括 $R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$
- ❖ 证明：因为
$$u(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s}, \quad \Re\{s\} > 0$$

由卷积性质，有

$$u(t) * x(t) \xrightarrow{L} \frac{1}{s} X(s), \quad ROC \text{ 包括 } R \cap \{\Re\{s\} > 0\}$$

而
$$x(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} & \begin{matrix} t - \tau < 0, u(t - \tau) = 0 \\ t - \tau > 0, u(t - \tau) = 1 \end{matrix} \\ &= \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \end{aligned}$$

9.5.10 初值与终值定理

若 $t < 0$, $x(t) = 0$, 并且在 $t = 0$ 时, $x(t)$ 不包含冲激或者高阶奇异函数, 在这些特别限制下, 就可以直接从拉普拉斯变换式中计算出初值 $x(0^+)$ [也就是 $x(t)$ 当 t 从正值方向趋于 0 时的值] 和终值, 即 $t \rightarrow \infty$ 时的 $x(t)$ 值。

初值定理

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s) \quad (9.110)$$

终值定理

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) \quad (9.111)$$

9.6 常用拉普拉斯变换对

❖ 表9.2

变换对	信号	变换	ROC
1	$\delta(t)$	1	全部 s
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
3	$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} < 0$
6	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} > -a$
7	$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\Re\{s\} < -a$

$$te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re\{s\} > -a$$

$$-te^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{L} \frac{1}{(s+a)^2}, \quad \Re\{s\} < -a$$

9.7 用拉普拉斯变换分析与表征LTI系统

- ❖ 一个LTI系统输入和输出的拉普拉斯变换是通过乘以系统单位冲激响应的拉普拉斯变换联系起来的：

$$Y(s) = H(s)X(s)$$

- ❖ 当 $s=j\omega$ 时， $H(s)$ 就是这个LTI系统的频率响应。在拉普拉斯变换的范畴内，一般称 $H(s)$ 为系统函数或转移函数。
- ❖ LTI系统的很多性质（因果性、稳定性）都与系统函数 $H(s)$ 在 s 平面的特性（收敛域ROC）密切相关。

9.7.1 因果性

- ❖ 对于一个因果的LTI系统，其单位冲激响应在 $t < 0$ 时为零，因此是一个右边信号。

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- ❖ 因为系统是因果的，所以 t 时刻的输出仅与 $\leq t$ 时刻的输入有关，

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

即积分式的积分区间应为 $-\infty$ 到 t ，也就是说
 $t < \tau < +\infty$ ， $h(t-\tau)=0$ 。所以 $t < 0$ 时 $h(t)=0$ 。

❖ 由于因果的LTI系统其单位冲激响应 $h(t)$ 是一个右边信号，根据9.2节的讨论，有：

一个因果系统的系统函数的ROC是某个右半平面

❖ 要强调的是，相反的结论未必是成立的（例9.19给出说明）。然而，如果系统函数 $H(s)$ 是有理的，那么只需看一下它的ROC是否是右半平面的，就能确定该系统是否是因果的，即

对于一个具有有理系统函数的系统来说，系统的因果性就等效于ROC位于最右边极点的右边的右半平面

例 9.17 有一系统, 其单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-t}u(t) \quad (9.113)$$

因为 $t < 0, h(t) = 0$, 所以该系统是因果的。同时它的系统函数由例 9.1 可得

$$H(s) = \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.114)$$

在这种情况下, 系统函数是有理的, 并且 ROC 是在最右边极点的右边, 这就与具有有理系统函数的因果性等效于 ROC 位于最右边极点的右边的结论相一致。

例 9.18 有一系统, 其单位冲激响应为

$$h(t) = e^{-|t|}$$

因为 $t < 0, h(t) \neq 0$, 所以该系统是非因果的。同时它的系统函数由例 9.7 有

$$H(s) = \frac{-2}{s^2 - 1}, \quad -1 < \Re\{s\} < +1$$

因此, $H(s)$ 是有理的, 但 ROC 不在最右边极点的右边, 这与系统的非因果性是一致的。

$$h(t) = e^{-|t|} = e^{-t}u(t) + e^t u(-t)$$

$$\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}$$

例 9.19 考虑下面系统函数：

$$H(s) = \frac{e^s}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.115)$$

对于该系统，其 ROC 是位于最右边极点的右边，因此单位冲激响应必须是右边的。为了确定它的单位冲激响应，首先利用例 9.1 的结果

$$e^{-t}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.116)$$

接下来，根据 9.5.2 节的时移性质[(9.87)式]，在(9.115)式中的因子 e^s 可以认为是(9.116)式中时间函数的移位，那么

$$e^{-(t+1)}u(t+1) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{e^s}{s+1}, \quad \Re\{s\} > -1 \quad (9.117)$$

所以系统的单位冲激响应是

$$h(t) = e^{-(t+1)}u(t+1) \quad (9.118)$$

它在 $-1 < t < 0$ 不等于零，所以系统不是因果的。这个例子可以作为一个提示：因果性确实意味着 ROC 是位于最右边极点的右边，但是相反的结论一般是不成立的，除非系统函数是有理的。

e 是一个无限不循环小数

9.7.2 稳定性

❖ $H(s)$ 的ROC也可以与系统的稳定性（有界输入产生有界输出）联系起来。在2.3.7节说过，一个LTI系统的稳定性等效于它的单位冲激响应是绝对可积的，这时单位冲激响应的傅里叶变换收敛。因为一个信号的傅里叶变换就等于拉普拉斯变换沿 $j\omega$ 轴求值，就有

当系统函数 $H(s)$ 的ROC包括 $j\omega$ 轴（即 $\text{Re}\{s\}=0$ ），一个LTI系统就是稳定的。

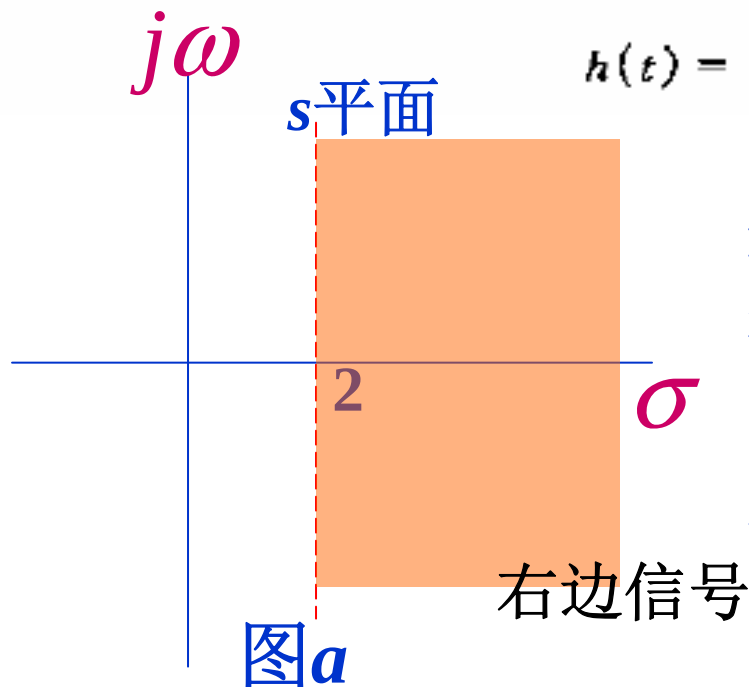
❖ 例9.20 考虑一LTI系统，其系统函数为

$$H(s) = \frac{s-1}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{3(s+1)} + \frac{1}{3(s-2)}$$

因为没有给出 ROC，那么根据 9.2 节的讨论知道，存在着几种不同的 ROC，结果就会有几种不同的单位冲激响应与(9.119)式给出的 $H(s)$ 代数表示式相联系。然而，如果有关于系统的因果性或稳定性方面的信息，那么适当的 ROC 还是能被确定。例如，若系统已知是因果的，那么 ROC 一定为图 9.25(a)所示，这时的单位冲激响应就是

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} \right) u(t) \quad (9.120)$$

注意，这种ROC的选择并未包括 $j\omega$ 轴，因此系统是不稳定的，只要看看 $h(t)$ 不是绝对可积就能得出结论。



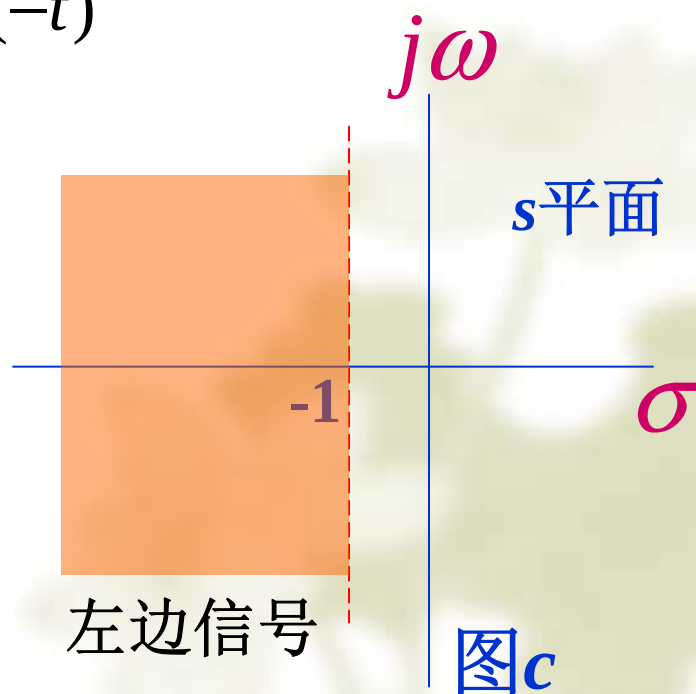
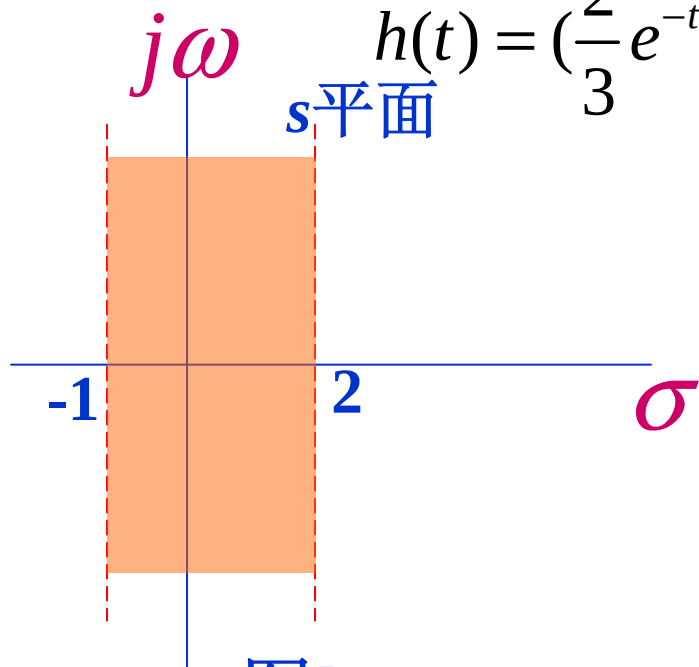
- ❖ 若系统是稳定的，那么ROC就如图b所示，相应的单位冲激函数是

$$h(t) = \frac{2}{3}e^{-t}u(t) - \frac{1}{3}e^{2t}u(-t)$$

显然，这是绝对可积的。

- ❖ 若ROC如图c所示，这时单位冲激响应为

$$h(t) = \left(\frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{2t}\right)u(-t)$$



❖ 一个因果LTI系统，具有有理系统函数 $H(s)$ ，因为系统是因果的，所以ROC就在最右边极点的右边平面，因此，这个系统要是稳定的话（即ROC包含 $j\omega$ 轴）， $H(s)$ 的最右边的极点必须位于 $j\omega$ 轴的左侧，即

当 $H(s)$ 的全部极点都位于 s 平面的左半平面时，一个具有有理系统函数 $H(s)$ 的因果LTI系统才是稳定的。

9.7.3 由线性常系数微分方程表征的LTI系统

- ❖ 4.7节讨论过利用傅里叶变换来得到一个由线性常系数微分方程表征的LTI系统的频率响应，用类似的方法，拉普拉斯变换的性质也能用来直接求得一个由线性常系数微分方程表征的LTI系统的系统函数，但需知道一些附加条件。

例 9.23 考虑一 LTI 系统，其输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 满足如下线性常系数微分方程：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t) \quad (9.126)$$

在(9.126)式两边应用拉普拉斯变换，并分别用 9.5.1 节的线性性质和 9.5.7 节的微分性质，可得代数方程

$$sY(s) + 3Y(s) = X(s) \quad (9.127)$$

因为由(9.112)式，系统函数是

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

可得该系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{1}{s+3} \quad (9.128)$$

这就给出了系统函数的代数表示式，但没有收敛域。事实上，正如在 2.4 节所讨论的，微分方程本身并不能完全表征这个 LTI 系统，可以有不同的单位冲激响应都与这个微分方程相吻合。如果，除了这个微分方程之外，还知道系统是因果的，那么 ROC 就可以推断出是在最右边极点的右边，在这个例子中就对应于 $\Re\{s\} > -3$ ；

相应的单位冲激响应（右边信号）是

$$h(t) = e^{-3t}u(t)$$

❖ 一般形式的线性常系数微分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

❖ 其系统的系统函数是

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}$$

式9.133

❖ 因此，一个由微分方程表征的系统，其系统函数总是有理的。式9.133并没有包括 $H(s)$ 收敛域的说明，因为该线性常系数微分方程本身并没有限制收敛域。然而，如果给出系统有关稳定性或因果性的附加说明，收敛域就可以被推算出来。例如，如果系统加上满足初始松弛条件，它就是因果的，那么ROC一定是位于最右边极点的右边。

例 9.24 一个 RLC 电路，若其电容器上的电压和电感线圈中的电流最初都是零，就构成了一个可用线性常系数微分方程描述的 LTI 系统。现考虑图 9.27 的串联 RLC 电路，设跨于电压源的电压是输入信号 $x(t)$ ，跨于电容器上的电压是输出信号 $y(t)$ 。令在电阻、电感和电容器上的电压之和等于电源电压，就得

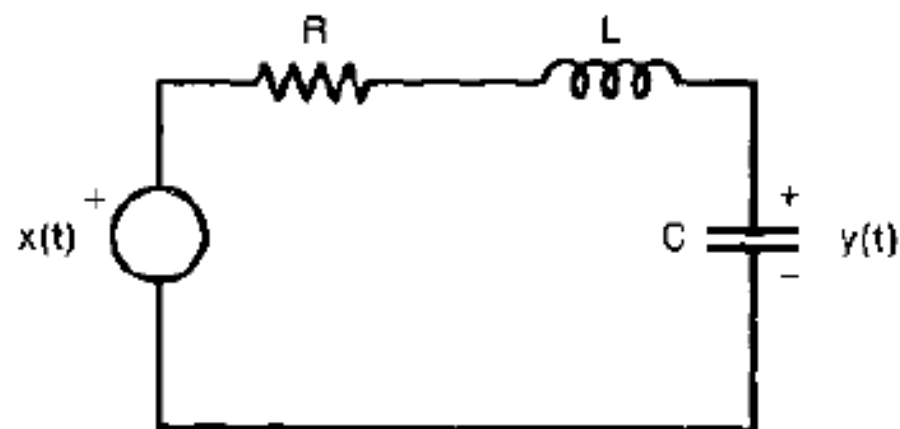


图 9.27 串联 RLC 电路

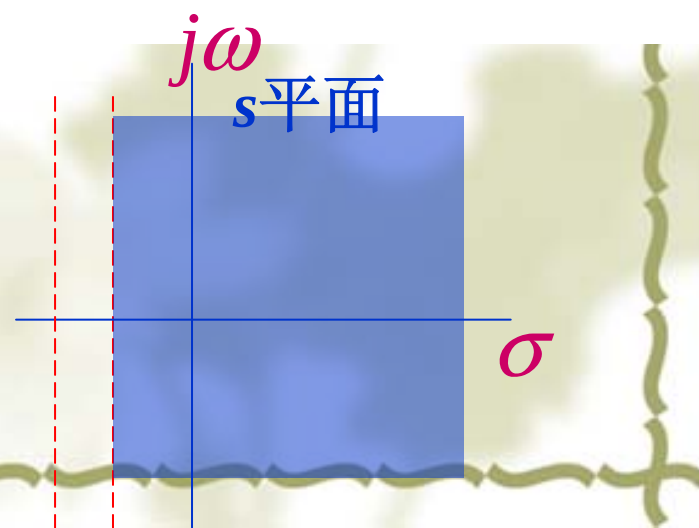
$$RC \frac{dy(t)}{dt} + LC \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + y(t) = x(t) \quad (9.136)$$

应用(9.133)式，可得

$$H(s) = \frac{1/LC}{s^2 + (R/L)s + (1/LC)} \quad (9.137)$$

正如在习题 9.64 中所指出，如果 R, L 和 C 的值全是正的，该系统函数的极点就全具有负的实部，因此该系统一定是稳定的。

极点 $\frac{-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC}}{2LC}$



9.8 系统函数的代数属性与方框图表示

9.8.1 LTI 系统互联的系统函数

考虑两个系统的并联，如图 9.30 (a)所示。总系统的单位冲激响应是

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (9.155)$$

由拉普拉斯变换的线性性质，有

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s) \quad (9.156)$$

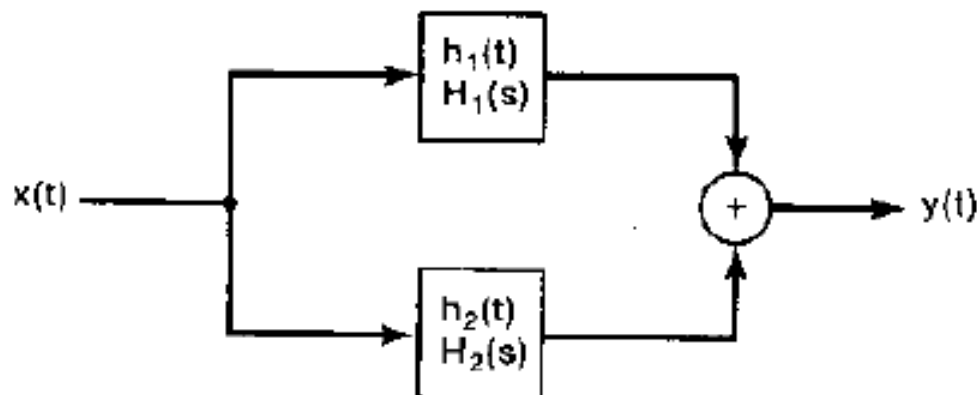
同理，两个系统的级联，如图 9.30(b)所示，其单位冲激响应为

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) \quad (9.157)$$

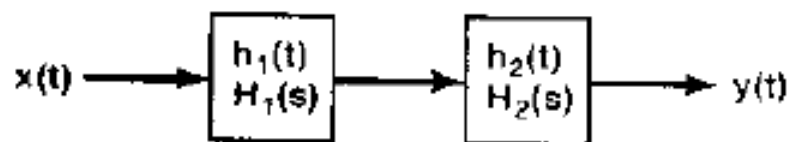
和系统函数是

$$H(s) = H_1(s)H_2(s) \quad (9.158)$$

通过代数运算利用拉普拉斯变换在表示线性系统的互联中可以扩展到远比图 9.30 这种简单的并联和级联更为复杂的互联中去。为此，考虑一下图 9.31



(a)



(b)

图 9.30 (a)两个 LTI 系统的并联；
(b)两个 LTI 系统的级联

9.31 有

$$Y(s) = H_1(s)E(s) \quad (9.159)$$

$$E(s) = X(s) - Z(s) \quad (9.160)$$

和

$$Z(s) = H_2(s)Y(s) \quad (9.161)$$

由此可得

$$Y(s) = H_1(s)[X(s) - H_2(s)Y(s)] \quad (9.162)$$

或者

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)} \quad (9.163)$$

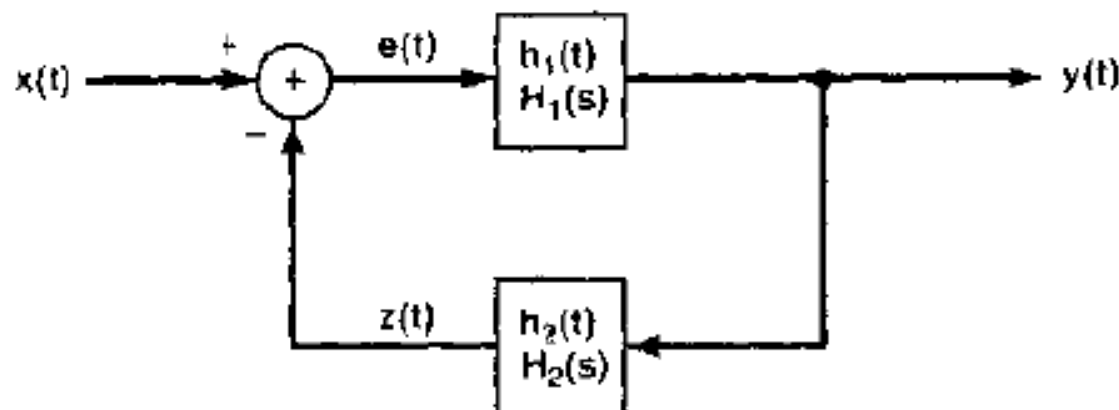


图 9.31 两个 LTI 系统的反馈互联

9.8.2 由微分方程和有理系统函数描述的因果LTI系统的方框图表示

❖ 例9.28 考虑一因果LTI系统，系统函数 $H(s)$

$$H(s) = \frac{1}{s+3}$$

这个系统也能用微分方程表征：

$$\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = x(t)$$

具有初始松弛条件。

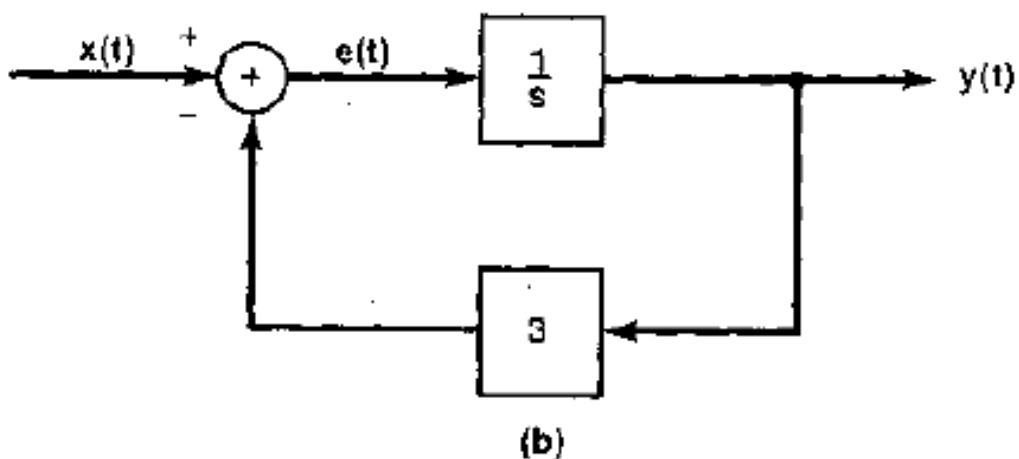
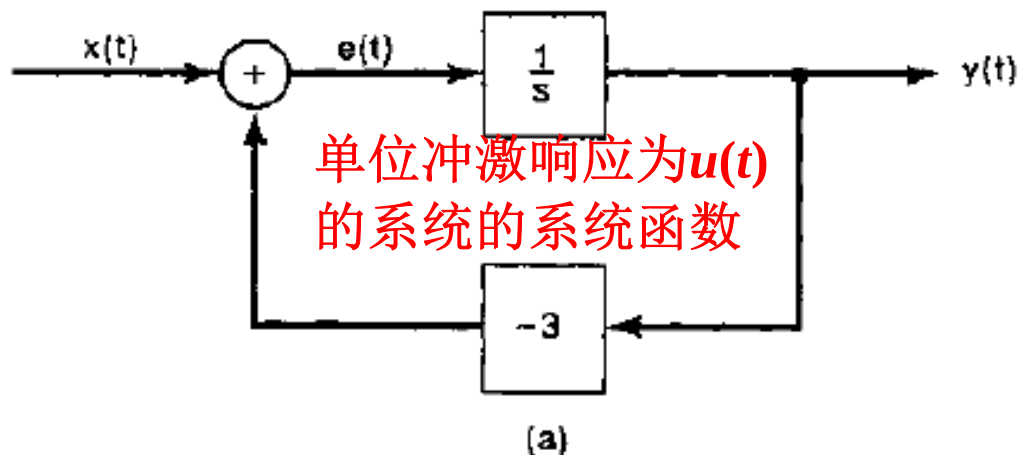
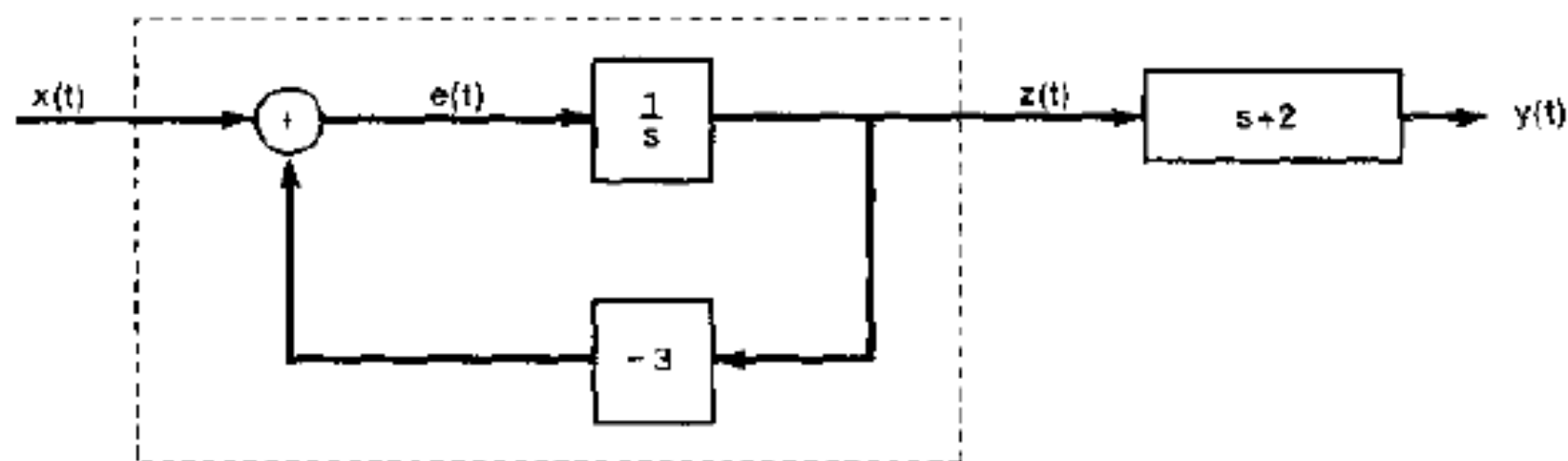


图 9.32 (a)例 9.28 的因果 LTI 系统的方框图表示；
(b)等效方框图表示

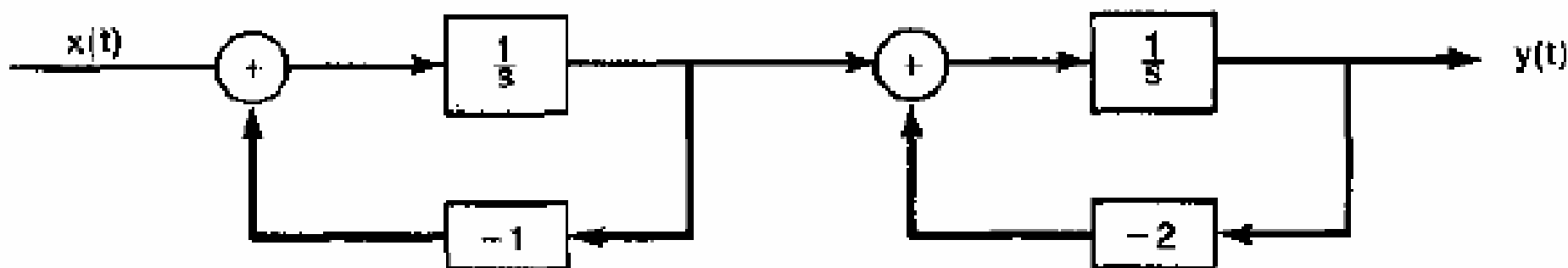
例 9.29 现在考虑一因果 LTI 系统，其系统函数 $H(s)$ 为

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \left(\frac{1}{s+3} \right)(s+2)$$



例9.30 一因果二阶LTI系统

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$$



(b)

完