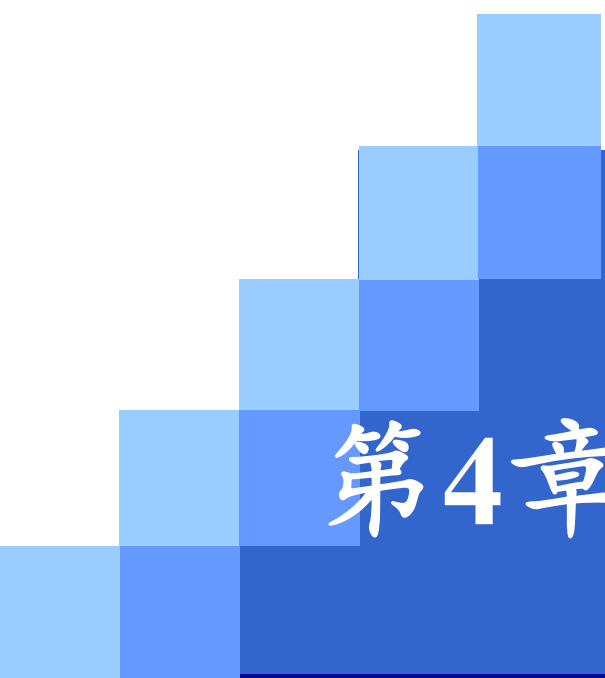




第4章 连续时间傅里叶变换

The Continuous-time Fourier Transform

重点、难点内容（10学时）

- ❖ FT定义、收敛性、简单信号的FT与逆FT；
- ❖ 周期信号的FT；
- ❖ FT的性质（9个）；
- ❖ FT的应用。

学习目标

- ❖ 掌握傅里叶变换定义及其基本性质；
- ❖ 牢记常用典型信号的傅里叶变换；
- ❖ 掌握求解信号傅里叶变换（正变换和反变换）的基本方法；
- ❖ 掌握运用傅里叶变换分析LTI系统的方法。

4.0 引言

- ❖ 在第三章我们建立了周期信号作为复指数信号线性组合的表示，同时，也看到了这一表示是如何来描述LTI系统对这些信号的响应（作用）效果的，
- ❖ 在本章及下一章，我们将把这些概念推广应用到非周期信号中去。对周期信号而言，这些复指数基本信号构造单元全是成谐波的；而对非周期信号，它们则是在频率上无限小地靠近的。因此这种线性组合所表示的形式是一个积分，而不是求和。在这种表示中所得到的系数谱称为傅里叶变换。

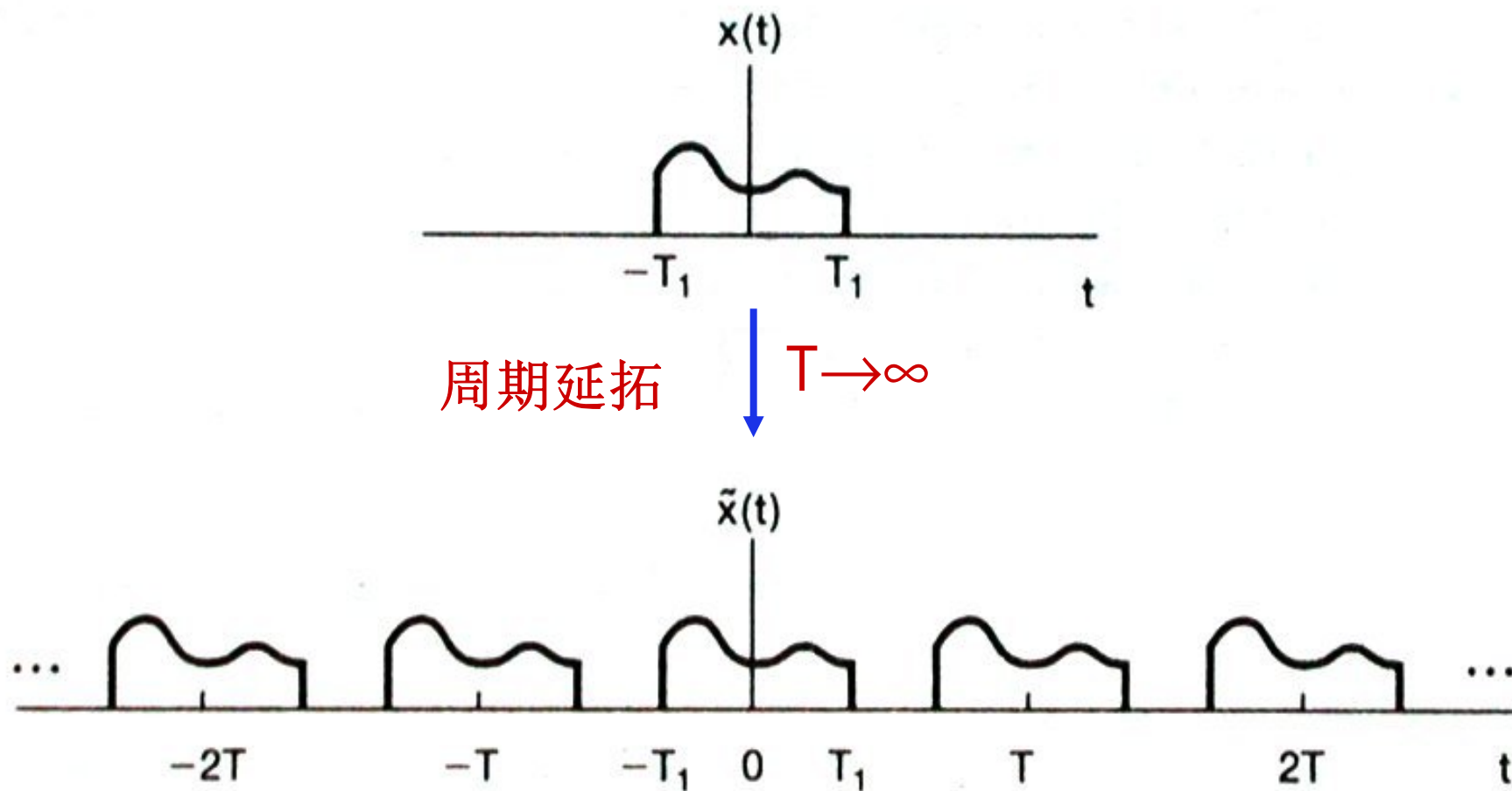
4.0 引言

❖ 傅里叶在把傅里叶级数推广到傅里叶积分的研究中基于如下的方法：

把非周期函数看作一个周期函数在周期趋于无穷大时的极限。

- 本章的地位：形成连续时间信号与系统频域法的基础。

思想



- ❖ 在一个周期信号的傅里叶级数表示中，当周期增加时，基波频率就减小，成谐波关系的各分量在频率上愈趋靠近。当周期变成无穷大时，这些频率分量就形成了一个连续域，从而傅里叶级数的求和就变成了一个积分。
- ❖ 傅立叶认为，一个非周期信号能够看成是周期无限长的周期信号。

❖ 4.1 非周期信号的表示：连续时间傅里叶变换(CFT)

The Continuous-time Fourier Transform

❖ 4.1.1 非周期信号傅里叶变换表示的导出

4.1.1 非周期信号傅里叶变换的导出

我们先看例3.5中所研究过的连续时间周期方波，从它的傅里叶级数入手：

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases}$$

以周期T周期性重复

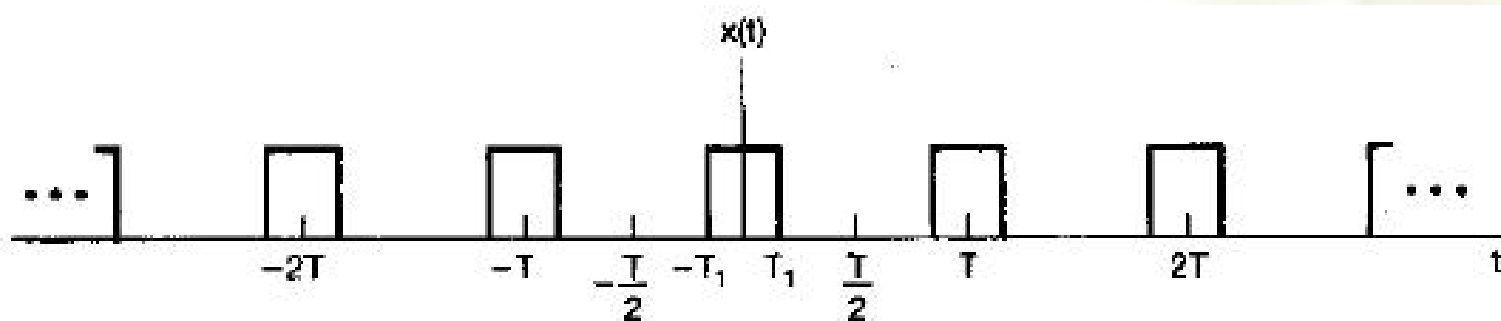


图 4.1 连续时间周期方波信号

❖ 该方波信号的傅里叶级数系数 a_k 是

$$a_k = \frac{2 \sin(k \omega_0 T_1)}{k \omega_0 T}$$

理解上式的一种方法是把它当作一个包络函数在每一个基波频率 ω_0 整数倍的点上的样本，即

$$Ta_k = \left. \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \right|_{\omega = k \omega_0}$$

把 ω 看作一个连续变量，则函数

$$2 \sin(\omega T_1) / \omega$$

就代表 Ta_k 的包络，这些系数 a_k 就是在此包络上等间隔取得的样本。而且，若 T_1 固定，则 Ta_k 的包络与 T 无关。

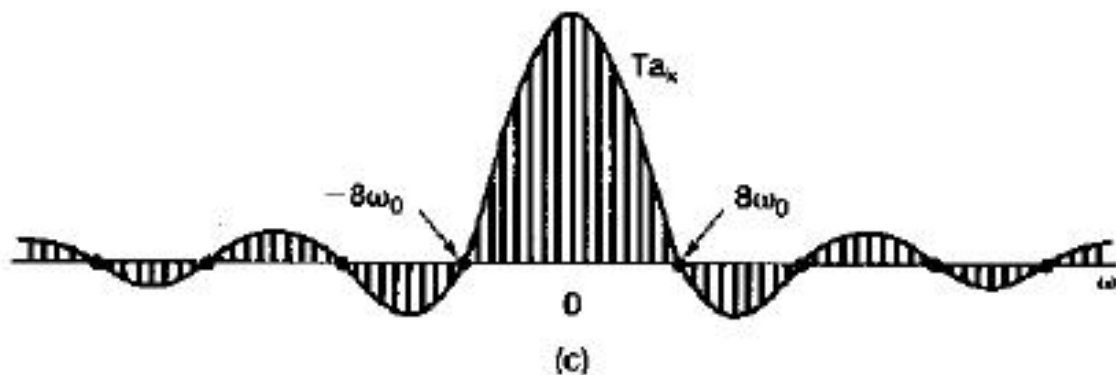
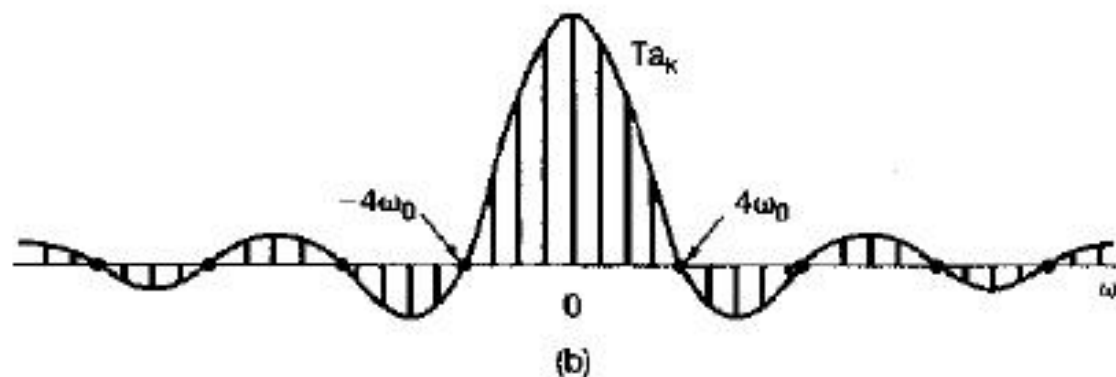
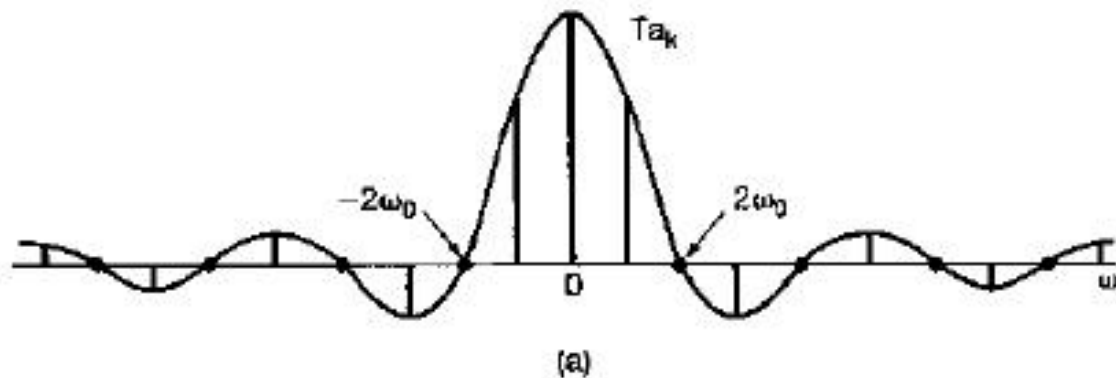
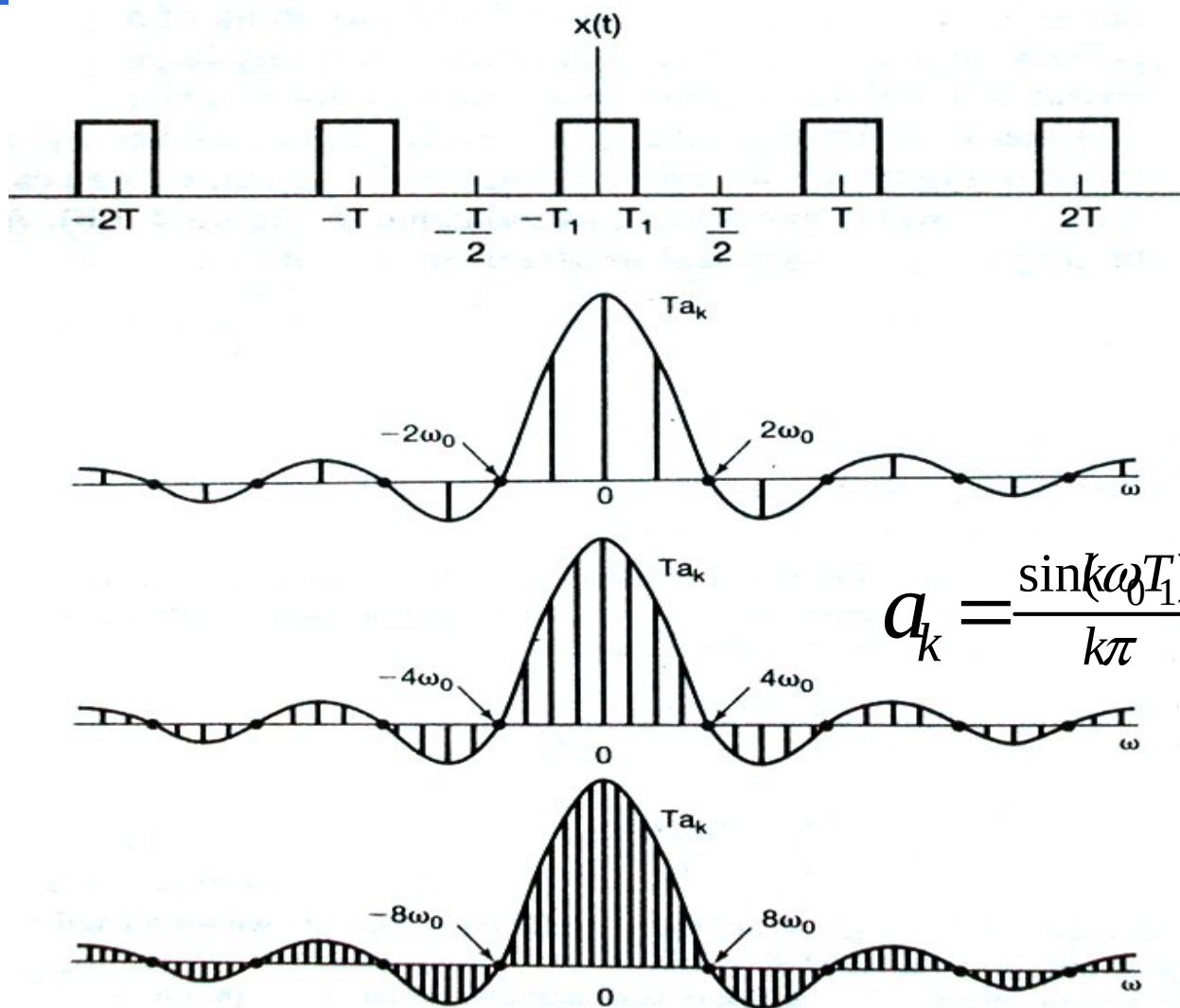


图 4.2 周期方波的傅里叶级数系数及其包络， T_1 固定：

(a) $T = 4T_1$ ；(b) $T = 8T_1$ ；(c) $T = 16T_1$

(1) 例子：从傅里叶级数到傅里叶变换



- ❖ 从图中可以看出，随着 T 增加（即基波频率 ω_0 减小），该包络就被以越来越密集的时间间隔采样。随着 T 变得任意大，原来的周期方波就趋近于一个矩形脉冲（对应于原方波的一个周期）。与此同时，傅里叶级数系数（乘以 T 后）作为包络上的样本也就越来越密集，随着 $T \rightarrow \infty$ ，傅里叶级数系数就趋近于这个包络函数。
- ❖ 这个例子说明了对非周期信号建立傅里叶表示的基本思想：这就是在建立非周期信号的傅里叶变换时，可以把非周期信号看作一个周期信号在周期任意大时的极限来看待，并且研究这个周期信号傅里叶级数表示式的极限特性。

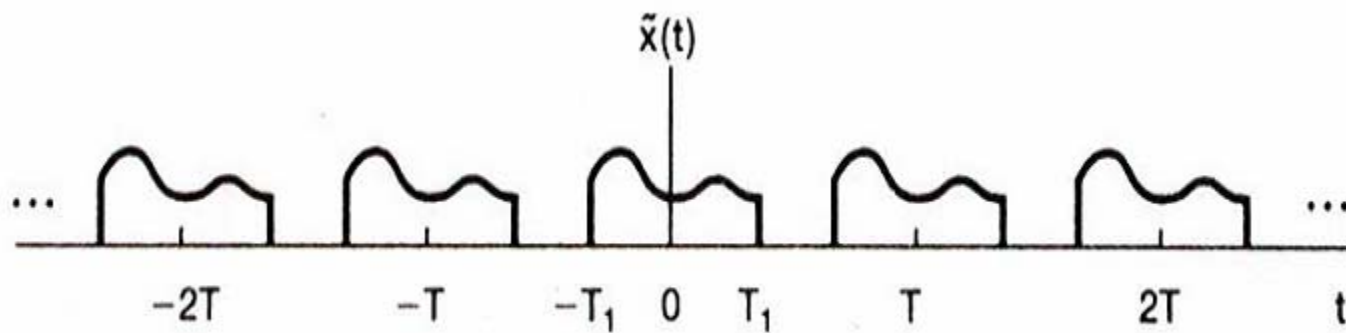
(2) 非周期信号傅里叶变换表示的导出

周期信号 $\tilde{x}(t)$:

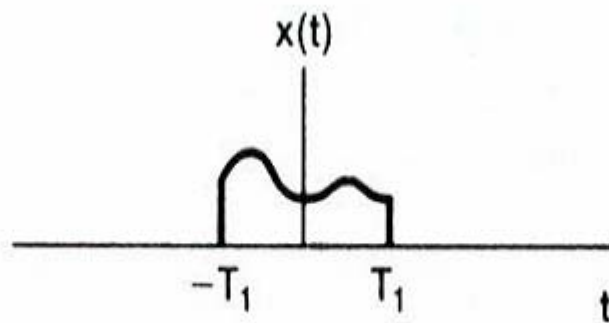
$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{array} \right.$$

非周期信号 $x(t)$:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t) \quad \text{或} \quad \tilde{x}(t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} x(t)$$



$\downarrow T \rightarrow \infty$



$$\text{当 } T \rightarrow \infty, \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} x(t) \\ k\omega_0 \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \omega \\ \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} d\omega \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ a_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \end{array} \right.$$

因此 $a_k T = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)$

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{X(jk\omega_0)}{T} e^{jk\omega_0 t} \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \frac{\omega_0}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

❖ $\tilde{x}(t)$ 的傅里叶级数是

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

由于在 $|t| < T/2$ 内, $\tilde{x}(t) = x(t)$, 而在其余地方 $x(t) = 0$, 所以有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

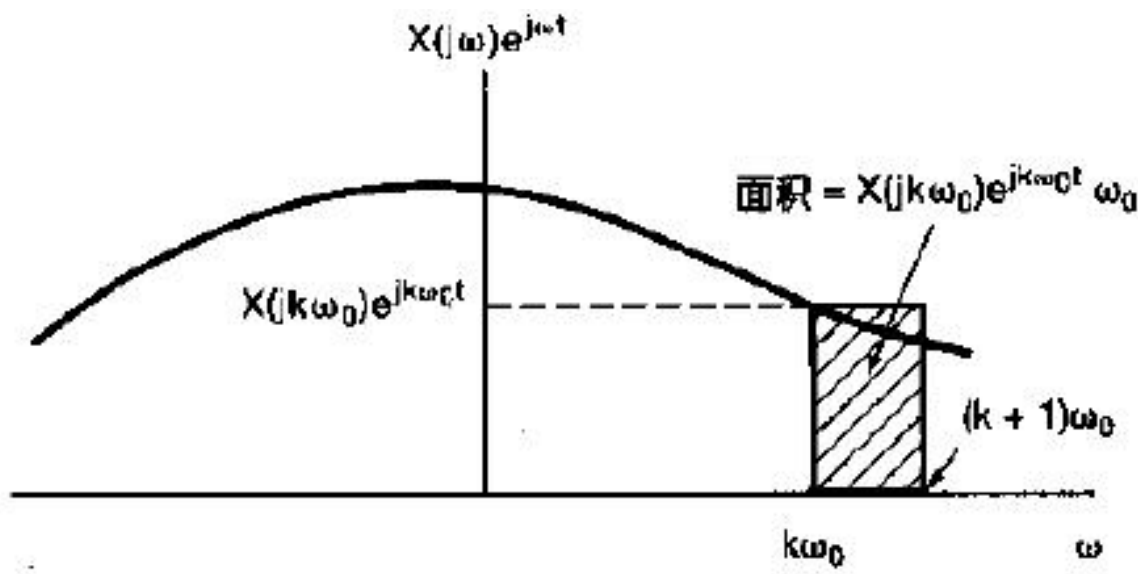
因此, 定义 Ta_k 的包络 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

❖ 因此， $\tilde{x}(t)$ 就可以用 $X(j\omega)$ 来表示

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

❖ 当 $T \rightarrow \infty$ 时，有 $\omega_0 \rightarrow 0$ ，上式右边就过渡为一个积分。



- ❖ 所以，当 $\omega_0 \rightarrow 0$ ，求和收敛于 $X(j\omega)e^{j\omega t}$ 的积分，此时， $T \rightarrow \infty$ ，有 $\tilde{x}(t) = x(t)$ ，因此有：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \text{式4.8}$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \text{式4.9}$$

- ❖ 式4.8和式4.9称为**傅里叶变换对**。函数 $X(j\omega)$ 称为 $x(t)$ 的**傅里叶变换**或傅里叶积分，而式4.8称为**傅里叶反变换**。
- ❖ 对照上一章讲的式3.38，都相当于把一个信号表示为一组复指数信号的线性组合。对周期信号而言，这些复指数信号的幅度为 a_k ，并且在成谐波关系的一组离散点 $k\omega_0$ 上出现。而对非周期信号而言，这些复指数信号出现在连续频率上，其幅度为 $X(j\omega)$ ($d\omega/2\pi$)。 **$X(j\omega)$ 通常称为 $x(t)$ 的频谱。**

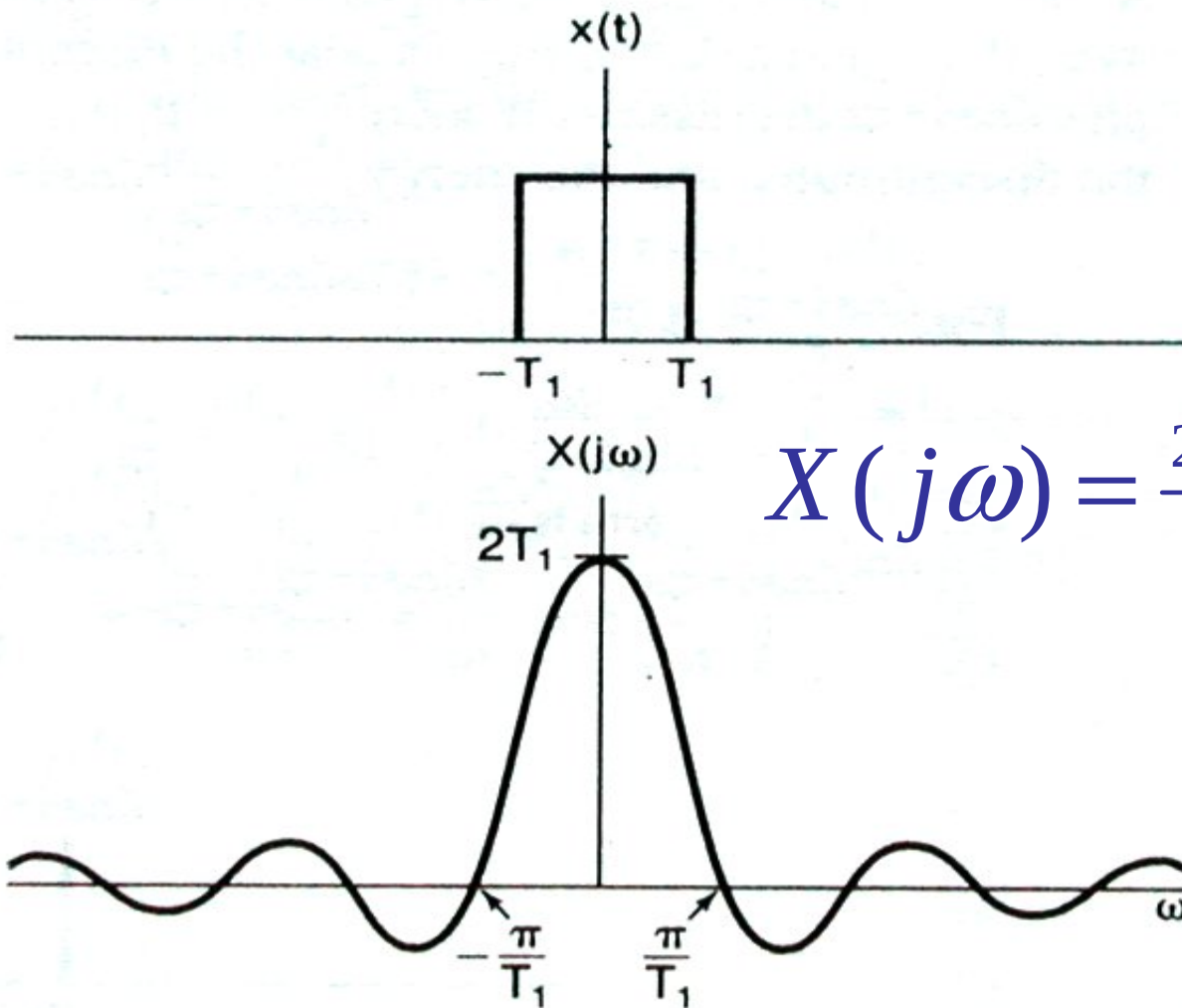
傅里叶变换

$$\begin{cases} X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

或者 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

傅里叶变换和傅里叶级数的关系：

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{T} X(j\omega) |_{\omega=k\omega_0} \quad (\text{周期信号}) \\ X(j\omega) = T \cdot a_k |_{k\omega_0=\omega} \quad (\text{非周期信号}) \end{cases}$$



4.1.2 傅里叶变换的收敛

❖ 与傅里叶级数是否收敛所要求的那一组条件一样。

Dirichlet 条件:

条件1:绝对可积 $\int_T |x(t)| dt < \infty$

条件2:单个周期内, $x(t)$ 的最大最小值的数目有限

条件3:在任何有限区间内, $x(t)$ 有有限个不连续点, 并且在每个不连续点都必须是有有限值。

4.1.3 连续时间傅里叶变换举例

例题 4.1 4.2 4.3 4.4 4.5

P₂₀₇ 例题 4.1

已知: $x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$

求: $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$

作图

讨论,若:

(1) $a < 0$

(2) $a = 0$

(3) a 为复数: $\text{Re}\{a\} < 0$, 或 $\text{Re}\{a\} = 0$, 或 $\text{Re}\{a\} > 0$

$X(j\omega) = ?$

例 4.1 考虑信号

$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

由(4.9)式, 有

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a + j\omega} e^{-(a+j\omega)t} \Big|_0^{\infty} \end{aligned}$$

也就是

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad a > 0$$

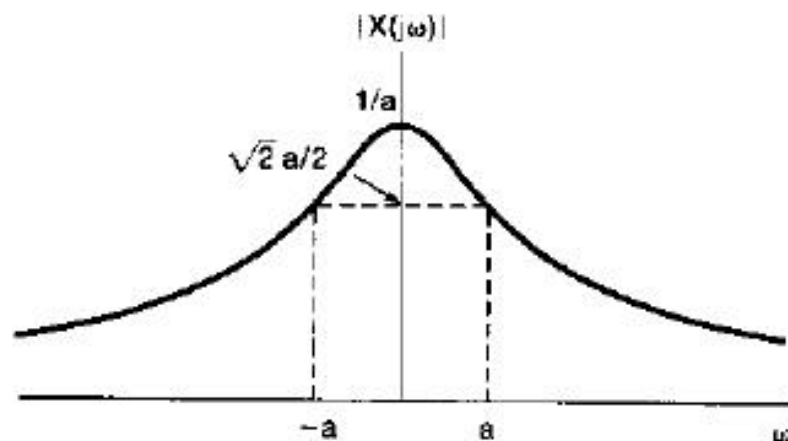
这个傅里叶变换是复数, 要画出作为 ω 的函数, 就需要利用它的模和相位来表示 $X(j\omega)$

$$|X(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

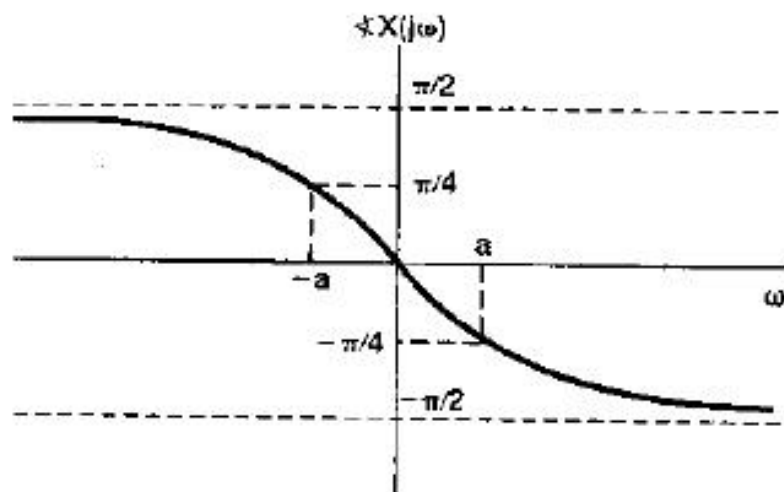
$$\angle X(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$|X(j\omega)|$ 和 $\angle X(j\omega)$ 如图 4.5 所示。注意, 若 a 是复数而不是实数, 那么只要 $\Re\{a\} > 0$, $x(t)$ 就是绝对可积的, 并且在这种情况下 $X(j\omega)$ 具有同样的形式, 即

$$X(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}, \quad \Re\{a\} > 0$$



(a)



(b)

图 4.5 例 4.1 中信号 $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$ 的傅里叶变换

例 4.2 设 $x(t)$ 为

P₂₀₇ 例题 4.2

已知: $x(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0$

求: $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$

作图

讨论,若:

(1) $a < 0$

(2) $a = 0$

(3) a 为复数: $\text{Re}\{a\} < 0$, 或 $\text{Re}\{a\} = 0$, 或 $\text{Re}\{a\} > 0$

$X(j\omega) = ?$

例 4.2 设 $x(t)$ 为

$$x(t) = e^{-a|t|}, \quad a > 0$$

如图 4.6 所示。该信号的傅里叶变换是

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

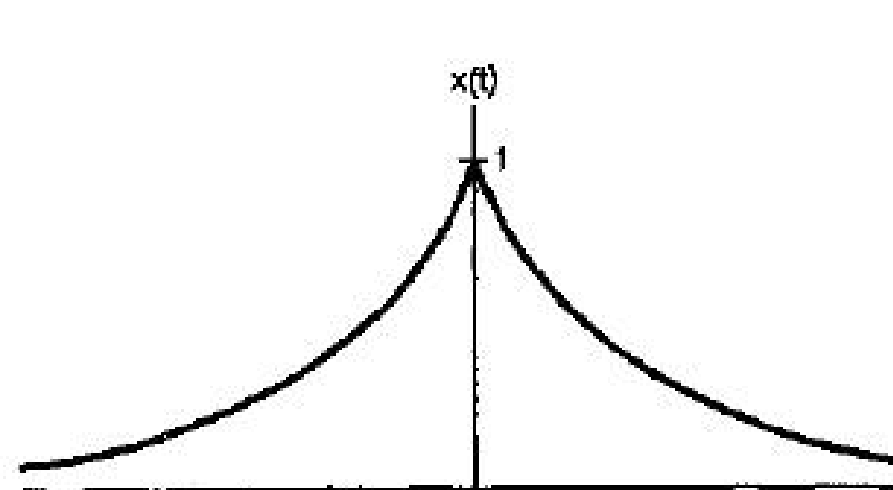


图 4.6 例 4.2 中的信号 $x(t) = e^{-a|t|}$

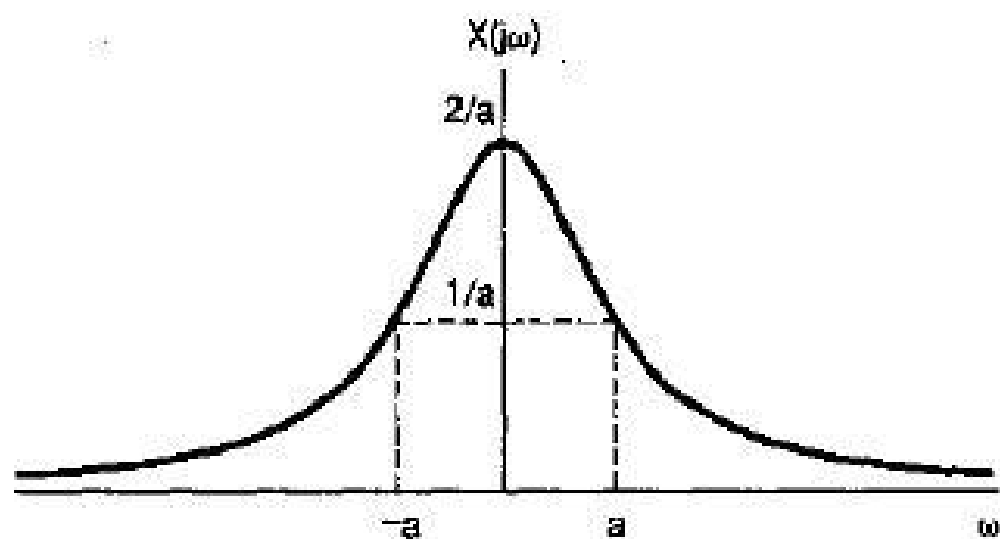


图 4.7 例 4.2 中考虑的并示于图 4.6 中的信号的傅里叶变换

P₂₀₈ 例题 4.3

已知: $x(t) = \delta(t)$

求: $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$

作图

时域有限，频域无限

例4.3 求单位冲激函数的傅里叶变换

$$x(t) = \delta(t)$$

解：

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

这就是说，单位冲激函数的频谱在所有频率上都是相同的。

P₂₀₈ 例题 4.4

$$\text{已知: } x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases}$$

作图

$$\text{求: } x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$$

时域有限，频域无限

例 4.4 考虑下面矩形脉冲信号

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \quad (4.16)$$

如图 4.8(a)所示。利用(4.9)式求得它的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} \quad (4.17)$$

如图 4.8(b)所示。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} &= 2T_1 \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} \\ &= 2T_1 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \\ &= 2T_1 \end{aligned}$$

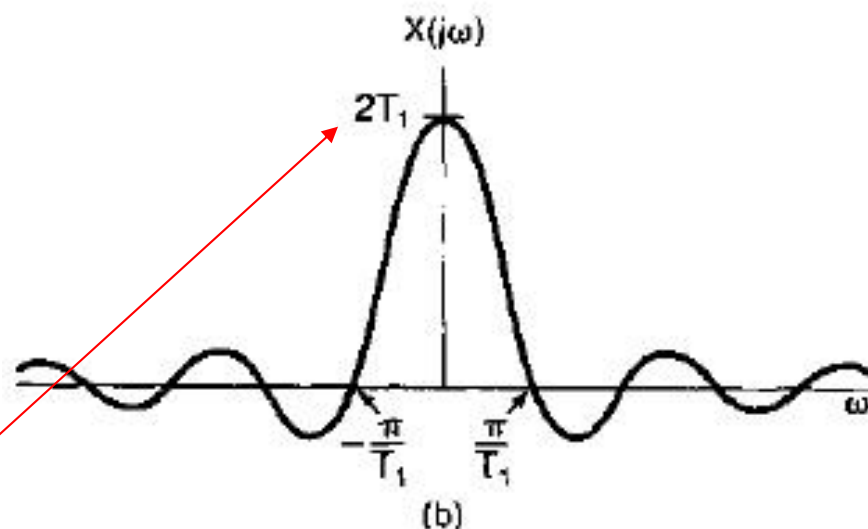
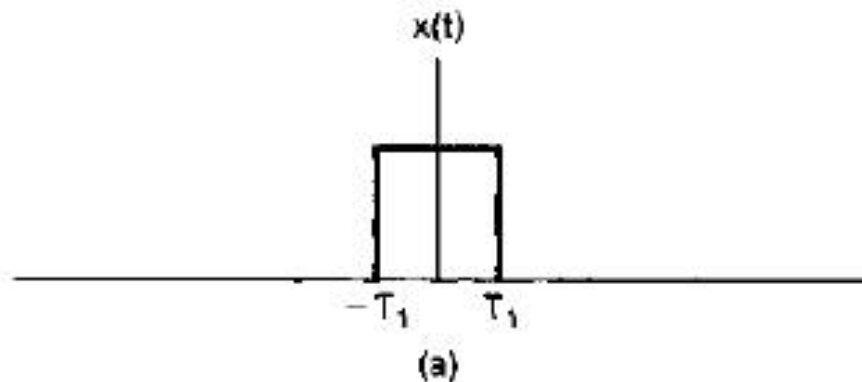


图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号;
(b) 它的傅里叶变换

P₂₀₉ 例题 4.5

$$\text{已知: } X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_0 \\ 0, & |\omega| > \omega_0 \end{cases}$$

作图

$$\text{求: } X(j\omega) \xleftrightarrow{FT^{-1}} x(t) = ?$$

频域有限，时域无限

$$\text{抽样函数 } Sa(t) \triangleq \frac{\sin t}{t}$$

$$\text{辛格函数 } \text{sinc}(t) \triangleq \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

例 4.5 考虑一信号 $x(t)$ ，其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 为

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \quad (4.18)$$

如图 4.9(a) 所示。利用综合公式 (4.8) 式可求得

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^W e^{j\omega t} d\omega = \frac{\sin Wt}{\pi t} \quad (4.19)$$

如图 4.9(b) 所示。

将图 4.8 和图 4.9 相比较，或者将 (4.16) 式和 (4.17) 式与 (4.18) 式和 (4.19) 式相比较，可以发现一个很有意义的关系。在每种情况下，傅里叶变换对都是由形式为 $(\sin a\theta)/b\theta$ 的函数和一个矩形脉冲所组成，只是在例 4.4 中信号 $x(t)$ 是一个脉冲，而在例 4.5 中变换 $X(j\omega)$ 是一个脉冲。这种特殊关系，很显然是傅里叶变换具有对偶性的一个直接结果。关于这一点，将在本章 4.3.6 节给予详细讨论。

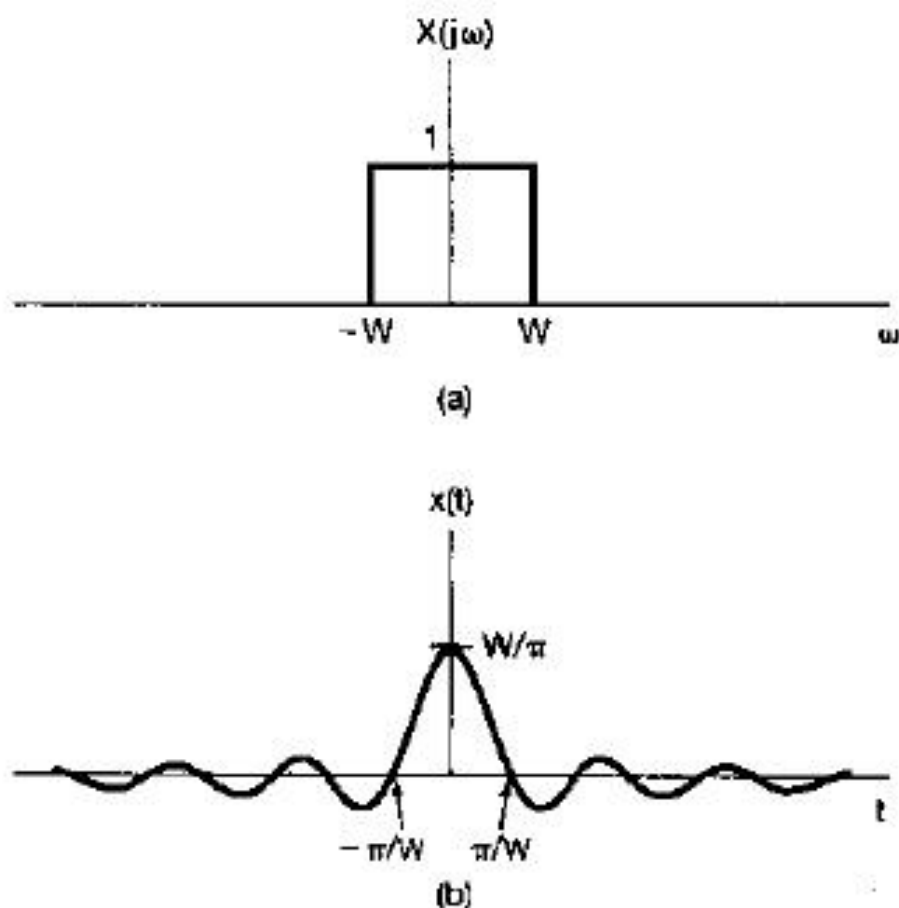


图 4.9 例 4.5 的傅里叶变换对：

(a) 例 4.5 的傅里叶变换；(b) 相应的时间函数

❖ 式4.17和式4.19给出的函数形式在傅里叶分析及在LTI系统的研究中经常出现，称之为*sinc*函数。*sinc*函数通常具有如下形式：

$$\text{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}$$

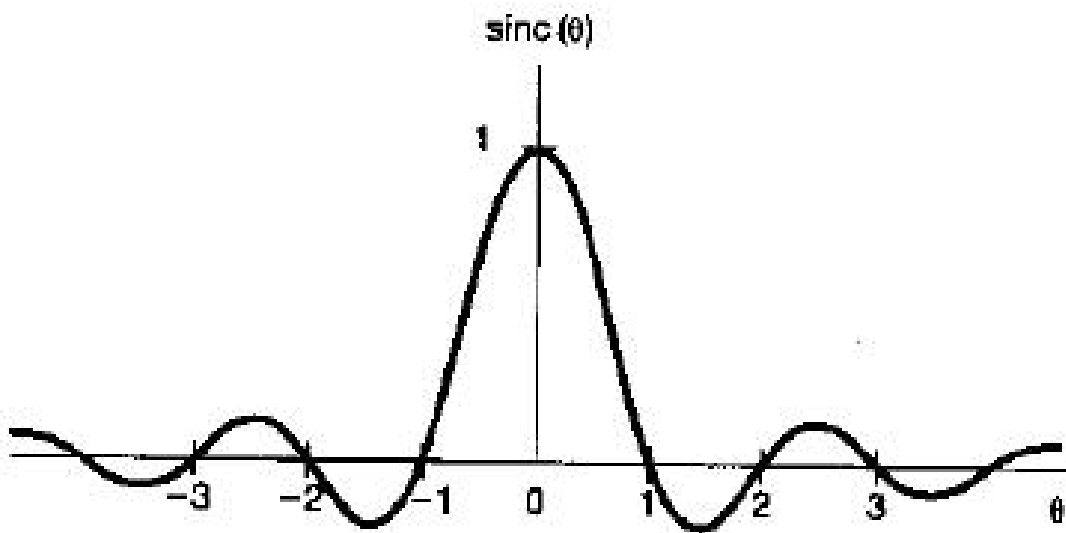


图 4.10 sinc 函数

从图4.9的分析我们得到傅里叶变换的一个性质：**时域与频域之间的相反关系**。当 W 增大时， $X(j\omega)$ 变宽，而 $x(t)$ 在 $t=0$ 处的主峰变得越来越高，该信号的第一个波瓣的宽度也变窄。事实上，当 $W \rightarrow \infty$ ， $X(j\omega)=1$ ，而 $x(t)$ 就收敛于一个冲激函数。

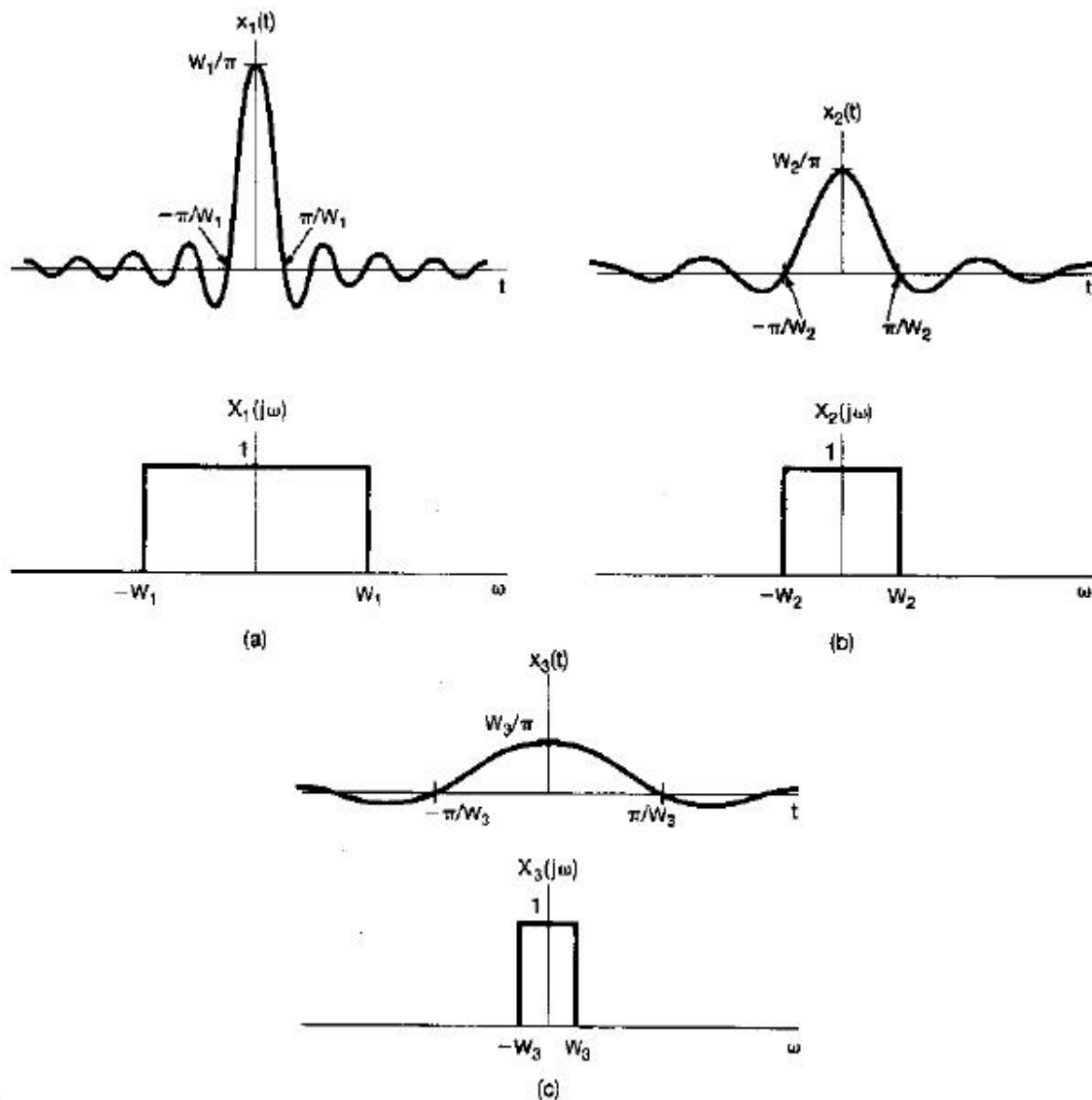
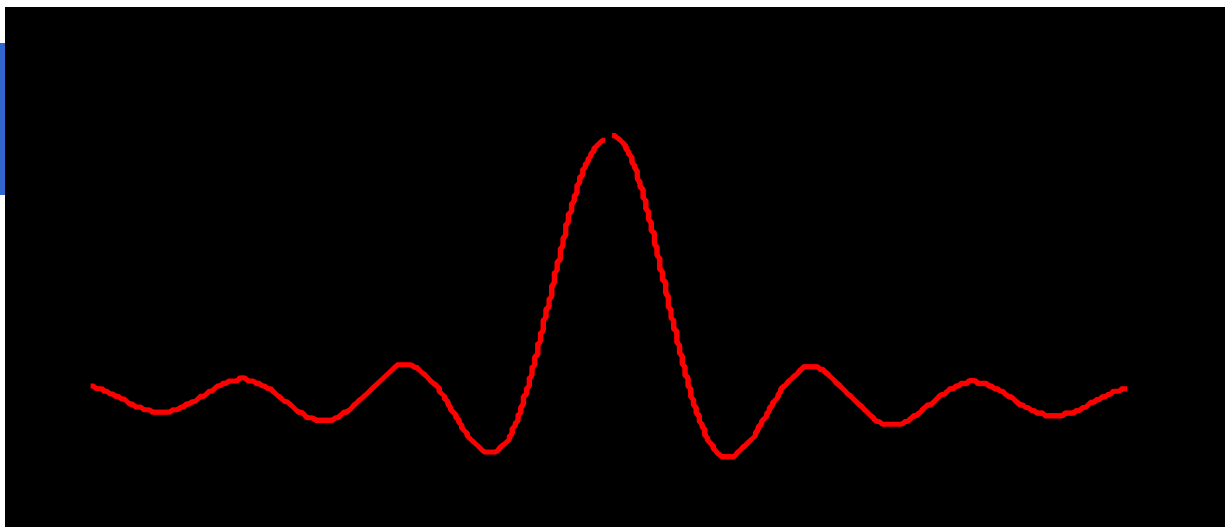


图 4.11 对于几个不同的 W 值，图 4.9 的傅里叶变换对

$$Sa(t) = \frac{\sin t}{t} \triangleq \text{抽样函数}$$

性质



① $Sa(-t) = Sa(t)$, 偶函数

② $t = 0, Sa(t) = 1$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} Sa(t) = 1$

③ $Sa(t) = 0, t = \pm n\pi, n = 1, 2, 3 \dots$

④ $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \pi$

⑤ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} Sa(t) = 0$

⑥ $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$ 辛格函数

举例 (1)

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$\text{应用 : } x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

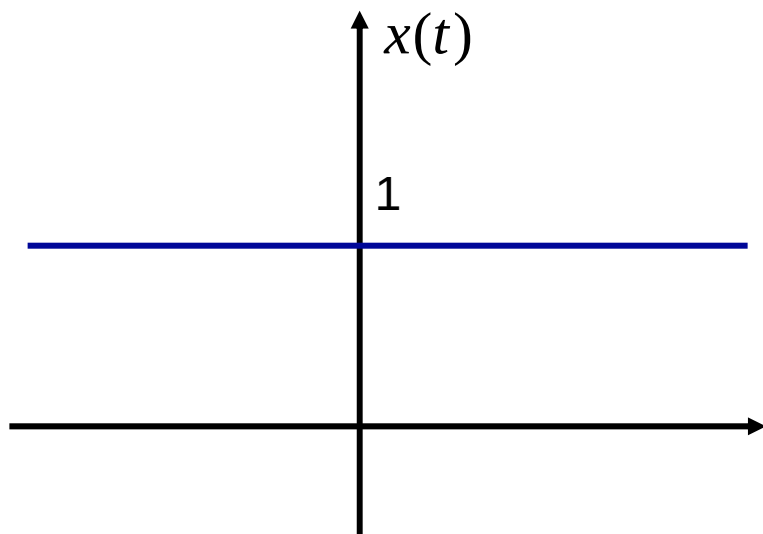
$$e^{j\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega$$

举例 (2)

$$x(t) = \cos\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$x(t) = \sin\omega_0 t \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

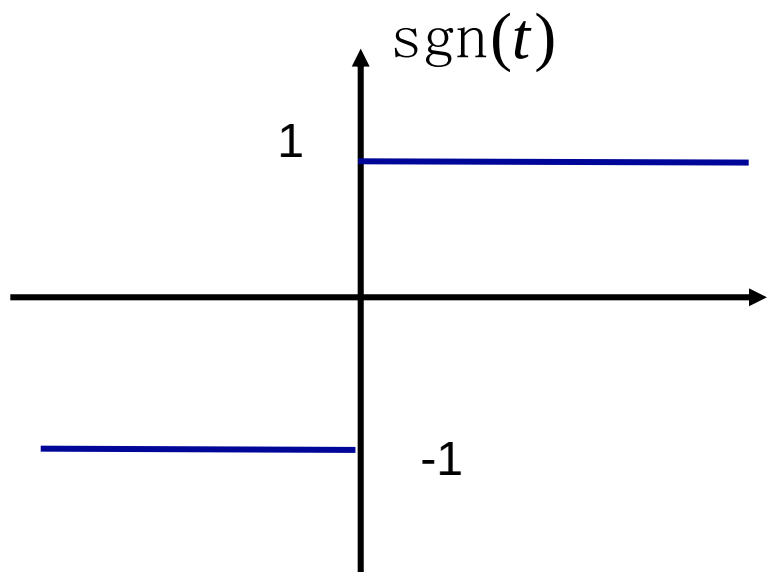
其它基本信号--直流信号1



$$\text{求 } x(t) = 1 \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

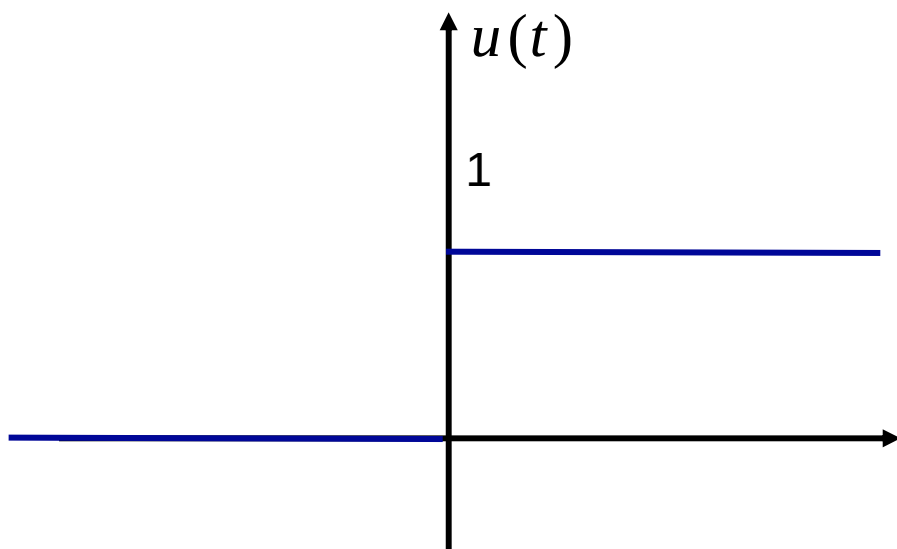
其它基本信号--符号函数 $\text{sgn}(t)$



$$\text{求 } \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ -1, t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$X(j\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

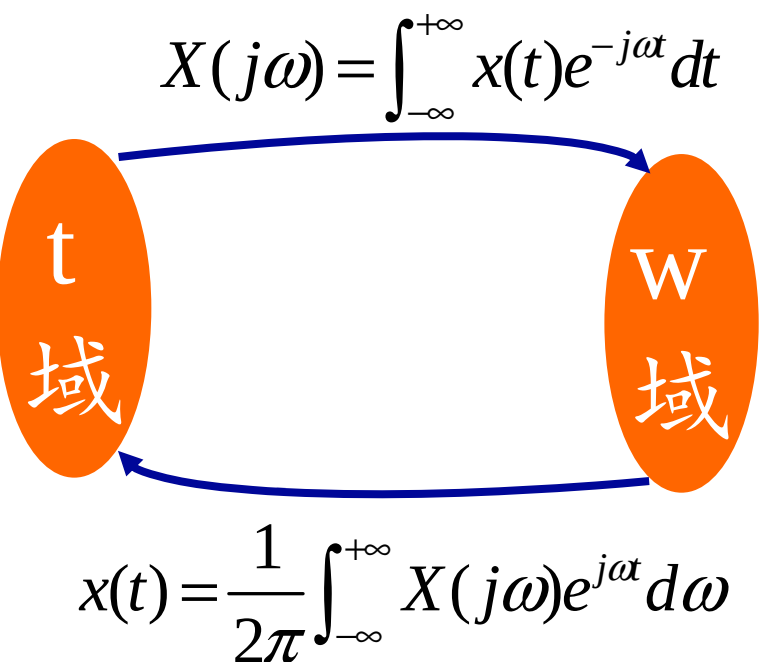
其它基本信号--阶跃函数



求 $u(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

❖ (1) 傅里叶变换定义式 ❖ (2) 基本信号的傅里叶变换



- 矩形脉冲
- 单边指数
- 双边指数
- 冲激函数
- 直流信号
- 符号函数
- 阶跃函数

4.2 周期信号的傅里叶变换

- ❖ 上一节我们学习了非周期信号的傅里叶变换表示，从而获得了频域的分析模型，为研究信号从时域扩展到频域。其实，对于周期信号也能够建立傅里叶变换表示。
- ❖ 可以直接由周期信号的傅里叶级数表示构造出一个周期信号的傅里叶变换；所得到的变换在频域是由一串冲激所组成，各冲激的面积正比于傅里叶级数系数。

❖ 设信号 $x(t)$ ，其傅里叶变换 $X(j\omega)$ 是一个面积为 2π ，出现在 $\omega=\omega_0$ 处的单独的一个冲激，即

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

为了求出 $X(j\omega)$ 对应的 $x(t)$ ，应用反变换公式4.8式

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

- ❖ 将上面的结果加以推广，如果 $X(j\omega)$ 是在频率上等间隔的一组冲激函数的线性组合，即

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0)$$

显然，间隔是 ω_0 ，且冲激面积是 $2\pi a_k$ 。

- ❖ 现在，我们有了 $X(j\omega)$ 的表达式，从频域推出时域 $x(t)$ 的表示，利用式4.8，可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned} \quad \text{式4.23}$$

- ❖ 上式就是一个周期信号所给出的傅里叶级数表示。因此，一个傅里叶级数系数 $\{a_k\}$ 的周期信号的傅里叶变换，可以看成是出现在成谐波关系的频率 $k\omega_0$ 上的一串冲激函数，而发生在第 k 次谐波频率 $k\omega_0$ 上的冲激函数的面积是第 k 个傅里叶级数系数 a_k 的 2π 倍。
- ❖ 这样，我们就能在统一的框架内考虑周期和非周期信号的各种性质。

4.2 周期信号的傅里叶变换

周期信号:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

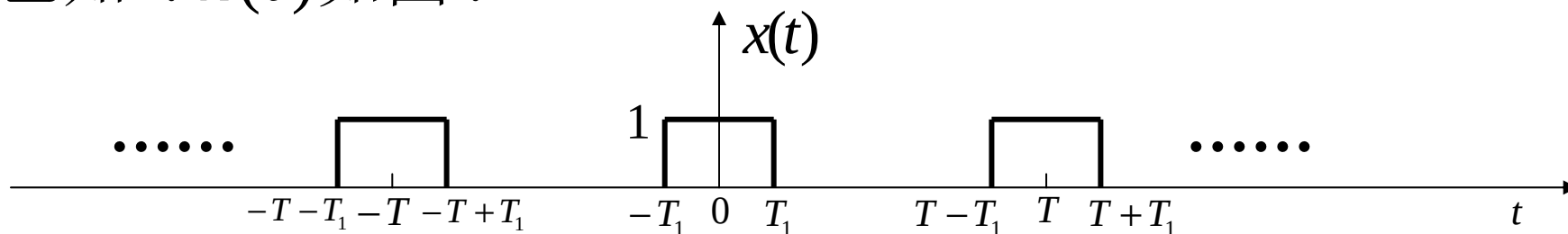
$$e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$\text{因此 } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k 2\pi\delta(\omega - k\omega_0)$$

例题 4.6 4.7 4.8

P₂₁₁ 例题4.6

已知： $x(t)$ 如图。



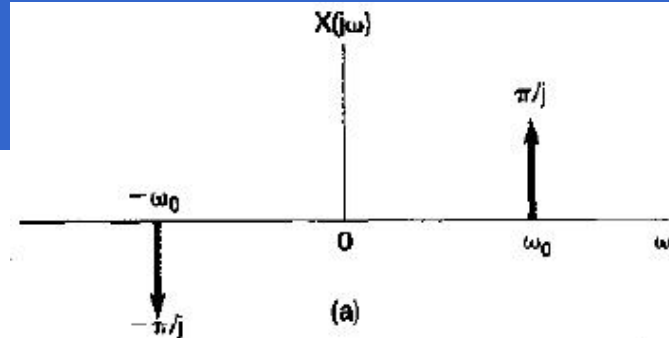
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \xleftrightarrow{FS} \quad a_k = \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\pi}$$

$\updownarrow$
 FT

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\sin k\omega_0 T_1}{k} \delta(\omega - k\omega_0)$$

P₂₁₁ 例题 4.7

已知: $x(t) = \sin \omega_0 t$



$$x(t) = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}) \quad \xleftrightarrow{FS} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2j}, & k = 1 \\ \frac{-1}{2j}, & k = -1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$\updownarrow$
 FT

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = j\pi[\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0)]$$

P₂₁₁ 例题4.7

已知: $x(t) = \cos \omega_0 t$

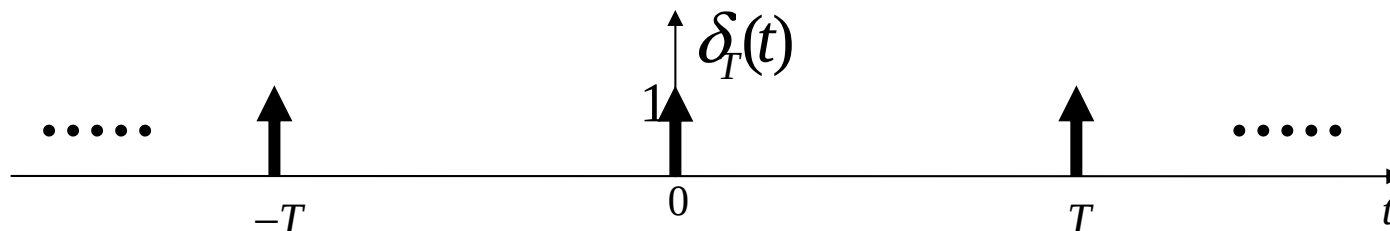
$$x(t) = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) \quad \xleftrightarrow{FS} \quad a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = \pm 1 \\ 0, & \text{other} \end{cases}$$

$\updownarrow$
 FT

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

P₂₁₂ 例题 4.8

已知: $x(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$



$$x(t) = \delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \longleftrightarrow^{FS} \quad a_k = \frac{1}{T}$$

$\updownarrow$
 FT

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega_0) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{T}k)$$

例4.8 在第7章采样系统的分析中一种极为有用的信号是周期为 T 的周期性冲激串

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

如图4.14(a)所示。在例3.8中已求出该信号

的傅里叶级数系数

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

将 a_k 带入式4.22, 得

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi k}{T})$$

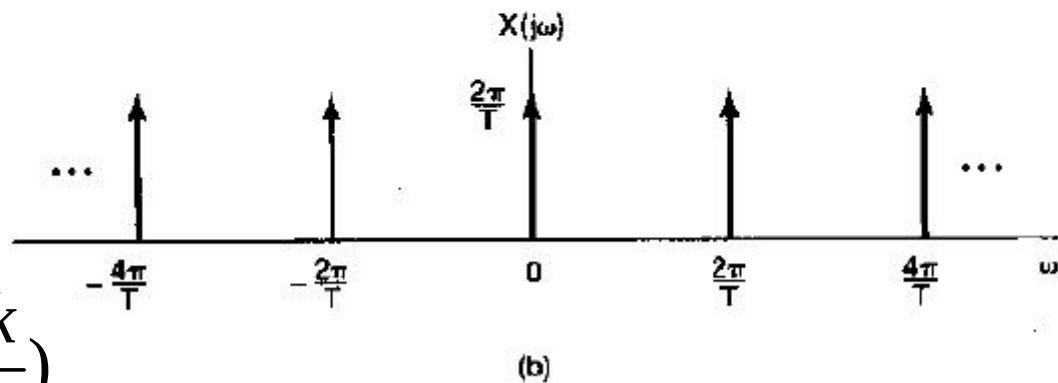
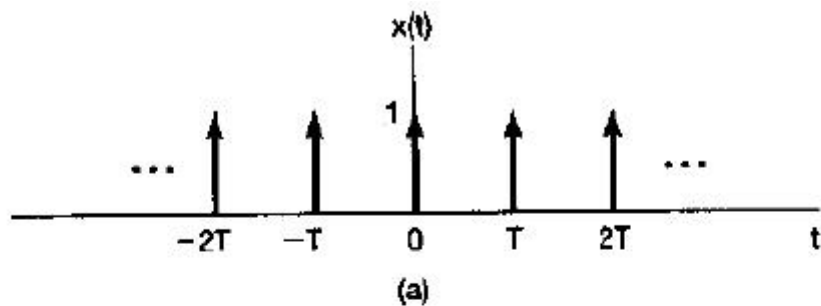


图 4.14 (a)周期冲激串; (b) 它的傅里叶变换

时域周期为 T 得冲激串的傅里叶变换在频域是一个周期为 $2\pi/T$ 的周期冲激串。时域与频域相反关系。

4.3 连续时间傅里叶变换性质

- ❖ 线性
- ❖ 时移
- ❖ 共轭及共轭对称性
- ❖ 微分与积分
- ❖ 时间与频率的尺度变换
- ❖ 对偶性
- ❖ 帕斯瓦尔定理
- ❖

4.3.1 线性

如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

$$y(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega)$$

那么 $ax(t) + by(t) \xleftrightarrow{FT} aX(j\omega) + bY(j\omega)$

4.3.2 时移

如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

那么 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

证明:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ x(t-t_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{-j\omega t_0} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

或者 $x(t-t_0) \xleftrightarrow{FT} e^{-j\omega t_0} X(j\omega)$

例 4.9 为了说明傅里叶变换线性和时移性质的用处,现考虑对图 4.15(a) 的信号 $x(t)$ 求其傅里叶变换。首先看出, $x(t)$ 可以表示成如下的线性组合

$$x(t) = \frac{1}{2}x_1(t-2.5) + x_2(t-2.5)$$

这里信号 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 都是如图 4.15(b) 和 (c) 所表示的矩形脉冲。利用例 4.4 的结果, 分别有

$$X_1(j\omega) = \frac{2\sin(\omega/2)}{\omega}$$

和
$$X_2(j\omega) = \frac{2\sin(3\omega/2)}{\omega}$$

最后, 利用傅里叶变换的线性和时移性质, 可得

$$X(j\omega) = e^{-j\omega/2} \left\{ \frac{\sin(\omega/2)}{\omega} + 2\sin(3\omega/2) \right\}$$

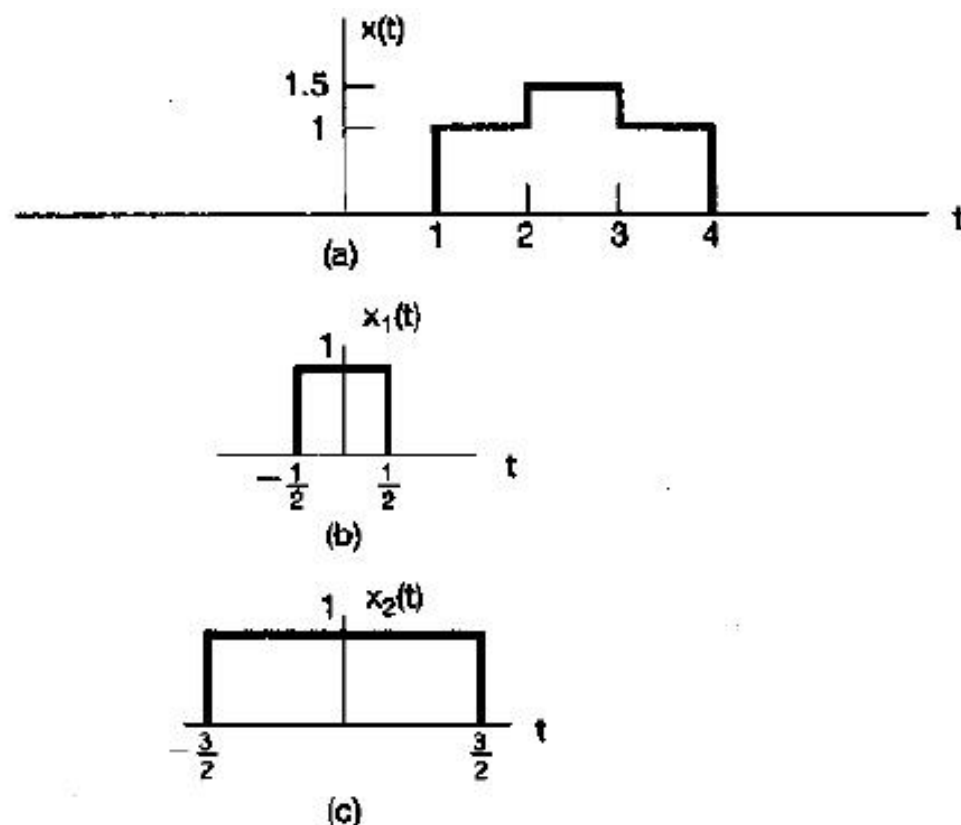
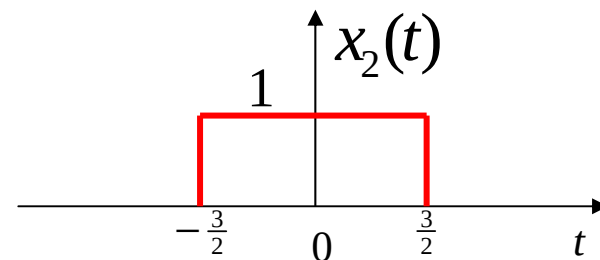
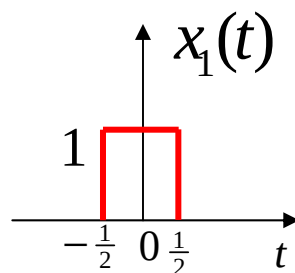
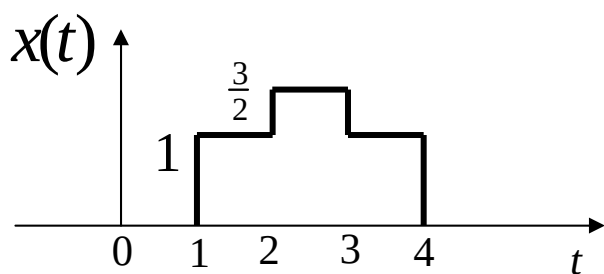


图 4.15 将一个信号分解为两个简单信号的线性组合:
 (a) 例 4.9 中的信号 $x(t)$;
 (b) 和 (c) 是用来表示 $x(t)$ 的两个简单信号

P₂₁₅ 例题4.9

已知： $x(t)$ 如图.求： $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$



$$x(t) = \frac{1}{2} x_1\left(t - \frac{5}{2}\right) + x_2\left(t - \frac{5}{2}\right)$$

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{2} e^{-j\frac{5}{2}\omega} X_1(j\omega) + e^{-j\frac{5}{2}\omega} X_2(j\omega) \\ &= e^{-j\frac{5}{2}\omega} \left[\frac{\sin(\omega/2) + 2\sin(3\omega/2)}{\omega} \right] \end{aligned}$$

4.3.3 共轭及共轭对称性

(1) 如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$ 那么 $x^*(t) \xleftrightarrow{FT} X^*(-j\omega)$

$$\begin{aligned}\text{证明 : } X^*(j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt\end{aligned}$$

$$\text{因此} \quad X^*(-j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt$$

(2) 如果 $x(t) = x^*(t)$ 那么 $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$

$$\begin{aligned}\text{证明 : } X^*(-j\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt \right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = X(j\omega)\end{aligned}$$

$$\text{因此} \quad X(-j\omega) = X^*(j\omega)$$

❖ 共轭性质就能证明，若 $x(t)$ 是实函数，那么 $X(j\omega)$ 就具有共轭对称性，即

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega), \quad x(t) \text{ 为实函数} \quad \text{式4.30}$$

因为，若 $x(t)$ 是实函数，就有 $x^*(t) = x(t)$ ，从而

$$\begin{aligned} X^*(-j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= X(j\omega) \end{aligned}$$

作为式4.30的一个结果，若将 $X(j\omega)$ 用直角坐标表示

$$X(j\omega) = R_e\{X(j\omega)\} + jP_m\{X(j\omega)\}$$

那么若 $x(t)$ 是实函数，则有

$$R_e\{X(j\omega)\} = R_e\{X(-j\omega)\} \quad P_m\{X(j\omega)\} = -jP_m\{X(-j\omega)\}$$

傅里叶变换的实部是偶函数，虚部是奇函数。

- ❖ 作为式4.30进一步的结果，若 $x(t)$ 是实且为偶函数，那么 $X(j\omega)$ 也一定是实、偶函数。

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^*(t) e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt$$

用 $\tau = -t$ 替换，可得

$$X(-j\omega) = \int_{+\infty}^{-\infty} -x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = X(j\omega)$$

因此， $X(j\omega)$ 是偶函数。再与式4.30结合，这就要求 $X(j\omega) = X^*(j\omega)$ 。例4.2的实、偶信号 $e^{-a|t|}$ 就表明了这个性质。

- ❖ 同样可以证明，若 $x(t)$ 是实值奇函数，那么 $X(j\omega)$ 就是纯虚且为奇函数。

❖ 我们在第一章曾讨论过，一个实函数 $x(t)$ 总是可以用一个偶函数 $x_e(t)=E_v\{x(t)\}$ 和一个奇函数 $x_o(t)=O_d\{x(t)\}$ 之和来表示，即

$$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$$

偶部

奇部

由傅里叶变换的线性性质，有

$$F\{x(t)\} = F\{x_e(t)\} + F\{x_o(t)\}$$

并且，根据上面的讨论， $F\{x_e(t)\}$ 是一实函数， $F\{x_o(t)\}$ 是纯虚数。

❖ 于是，我们得到这样一个结论：若 $x(t)$ 为实函数，则

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(j\omega)$$

$$E_v\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} R_e\{X(j\omega)\}$$

$$O_d\{x(t)\} \xleftrightarrow{F} jP_m\{X(j\omega)\}$$

$x(t)$ 的偶部的傅里叶变换就等于 $x(t)$ 傅里叶变换的实部。

(3) 如果 $x(t) = x_e(t) + x_o(t) = x^*(t)$

那么 $X(j\omega) = X_R(j\omega) + jX_I(j\omega) = X_e(j\omega) + X_o(j\omega)$

以及 $x_e(t) \xleftrightarrow{FT} X_R(j\omega) = X_e(j\omega)$

$x_o(t) \xleftrightarrow{FT} jX_I(j\omega) = X_o(j\omega)$

$$\begin{aligned}\text{证明 : } X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} [x_e(t) + x_o(t)][\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_e(t) \cos \omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x_o(t) \sin \omega t dt \\ &= X_R(j\omega) + jX_I(j\omega) = X_e(j\omega) + X_o(j\omega)\end{aligned}$$

例题 4.10

例 4.10 重新考虑一下例 4.2 中的信号 $x(t) = e^{-a|t|}$, $a > 0$ 的傅里叶变换求解问题, 现在用傅里叶变换的对称性质来帮助求解。

由例 4.1, 有

$$e^{-a}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{a + j\omega}$$

注意到, 若 $t > 0$, 则 $x(t)$ 就等于 $e^{-a}u(t)$; 而对 $t < 0$, $x(t)$ 取的是镜像值, 即

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-a}u(t) + e^{a}u(-t) = 2 \left[\frac{e^{-a}u(t) + e^{a}u(-t)}{2} \right] = 2\mathcal{E}_v\{e^{-a}u(t)\}$$

因为 $e^{-a}u(t)$ 是实值函数, 由傅里叶变换的对称性质就可导得

$$\mathcal{E}_v\{e^{-a}u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{R}_e \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\}$$

于是就有

$$X(j\omega) = 2\mathcal{R}_e \left\{ \frac{1}{a + j\omega} \right\} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

这是与例 4.2 中的结果一致的。

4.3.4 微分与积分

傅里叶反变换公式 $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$, 对 t 微分

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

因此有

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(j\omega)$$

这是一个特别重要的性质, 因为它将时域内的微分用频域内乘以 $j\omega$ 所代替。在利用傅里叶变换来分析微分方程描述的LTI系统时, 这一性质及其有用。

- ❖ 因为时域内的微分对应于频域内乘以 $j\omega$ ，这就使人或许得出，时域内的积分是否就是对应于频率内除以 $j\omega$?! 的确是这样，但这只是一部分

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0) \delta(\omega)$$

上式右边的冲激函数项反映了由积分所产生的直流或平均值。

4.3.4 微分与积分

(1) 如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

那么 $x'(t) \xleftrightarrow{FT} j\omega X(j\omega)$

$$\text{证明 : } x'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

(2) 如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

那么 $x^{(-1)}(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

证明 : $x^{(-1)}(t) = x(t) * u(t)$

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

因此 $x^{-1}(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

例题 4.12

例 4.11 求单位阶跃函数 $x(t) = u(t)$ 的傅里叶变换。利用(4.32)式, 并已知

$$g(t) = \delta(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} G(j\omega) = 1$$

注意到 $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau$

$$x(t) = \int_{-\infty}^t g(\tau) d\tau$$

上式两边各取傅里叶变换, 得

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

此处已经用到列于表 4.1 中的积分性质。因为 $G(j\omega) = 1$, 所以可得

$$X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

还可以看到, 应用(4.31)式的微分性质可以复原单位冲激函数的傅里叶变换, 即

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} j\omega \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] = 1$$

式中最末的等式是由于 $\omega\delta(\omega) = 0$ 的结果。

例 4.12 现在要想求图 4.16(a)所示 $x(t)$ 的傅里叶变换 $X(j\omega)$ 。不直接对 $x(t)$ 应用傅里叶积分来求, 而考虑如下信号

$$g(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

如图 4.16(b)所示, $g(t)$ 是一个矩形脉冲和两个冲激函数的和。这些分量信号的傅里叶变换可以用表 4.2 求出为

$$G(j\omega) = \left(\frac{2\sin\omega}{\omega} \right) - e^{j\omega} - e^{-j\omega}$$

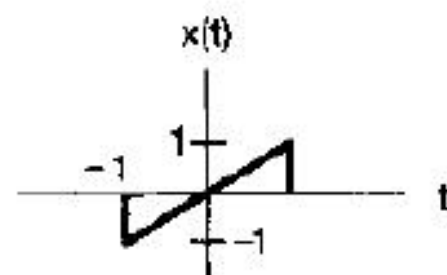
注意, $G(0)=0$ 。利用积分性质就有

$$X(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{j\omega} + \pi G(0)\delta(\omega)$$

由于 $G(0)=0$, 所以最后得出

$$X(j\omega) = \frac{2\sin\omega}{j\omega^2} - \frac{2\cos\omega}{j\omega}$$

可见, $X(j\omega)$ 的表示式是纯虚且为奇函数, 这是与 $x(t)$ 是实且为奇函数这一点相一致的。



(a)

间断点

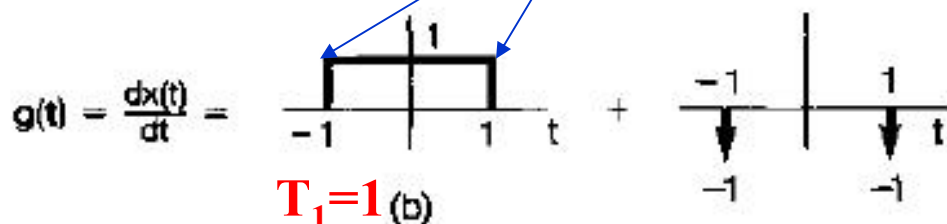


图 4.16 (a)欲求傅里叶变换的信号 $x(t)$;
(b) $x(t)$ 的导数表示为两个分量的和

例 已知 $f(t)$ 的波形如图 1-28(a) 所示, 试求 $f'(t)$, 并画出其波形。

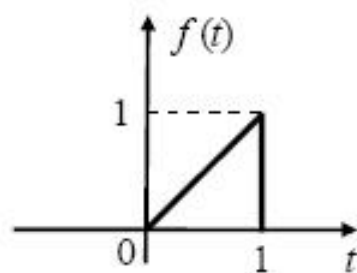
解

$f(t)$ 的表示式为

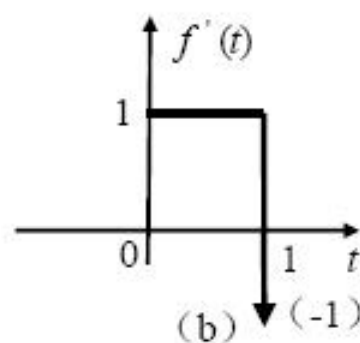
$$f(t) = t[u(t) - u(t-1)]$$

所以

$$\begin{aligned} f'(t) &= [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)] = \\ &= [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1) \end{aligned}$$



(a)



(b)

图 1-28 信号的微分运算

由于 $f(t)$ 在 $t=1$ 处有一跳变点, 跳变量为 -1 (从 $1 \rightarrow 0$), 则在 $t=1$ 处出现一冲激函数, 其冲激强度为 -1。 $f'(t)$ 的波形如图 1-28 (b) 所示。

4.3.5时间与频率的尺度变换

如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$ 那么 $x(at) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$

证明：
$$x(at) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega at} d\omega$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} X(j\omega/a) e^{j\omega t} d\omega, & a > 0 \\ -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} X(j\omega/a) e^{j\omega t} d\omega, & a < 0 \end{cases}$$

$$\therefore x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X(j\omega/a)$$

令 $a=-1$, $x(-t) \xleftrightarrow{FT} X(-j\omega)$

$$x(at) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{j\omega}{a}\right)$$

- ❖ 式中 a 是一个实常数，信号尺度变换后（ $|a|>1$ 压缩、 $|a|<1$ 扩展），其频谱信号除了有一个 $1/|a|$ 的幅度因子外，在频率上还有一个线性因子 $1/a$ 的变换。

- ❖ 若令 $a = -1$ ，则表示信号反转：

$$x(-t) \xleftrightarrow{F} X(-j\omega)$$

时间上反转一个信号，它的频谱也反转

- ❖ 时间与频率的尺度变换式，一个通俗的说明就是当磁带在录音和放音时的速度不同时，对其所含频率分量的影响。如当放音速度比原磁带录音时的速度要高，如以两倍速度播放($a=2$)，则只需要原先一半的时间就播放完，这就相当于信号在时域上受到压缩($a>1$)，那么其频谱就应该扩展，因而听来就觉得声音的频率变高了，表现为觉得刺耳。
- ❖ 反之，如果放音的速度比原来的慢($0<a<1$)，那么听起来在频率上就觉得降低了。例如，一只小铃的声音被慢放，你听到的将是声音深沉的钟声。
- ❖ 尺度变换性质又一次说明了时域与频域的相反关系。物理学中的测不准原理。

4.3.6 对偶性

比较一下正变换和反变换的关系式

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

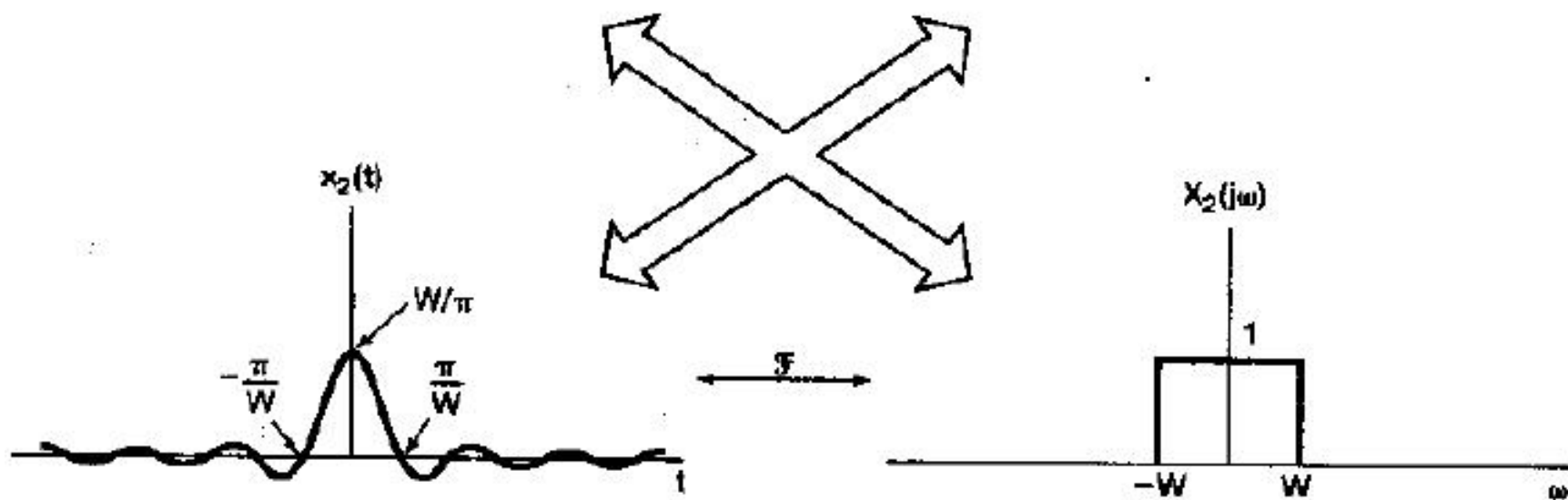
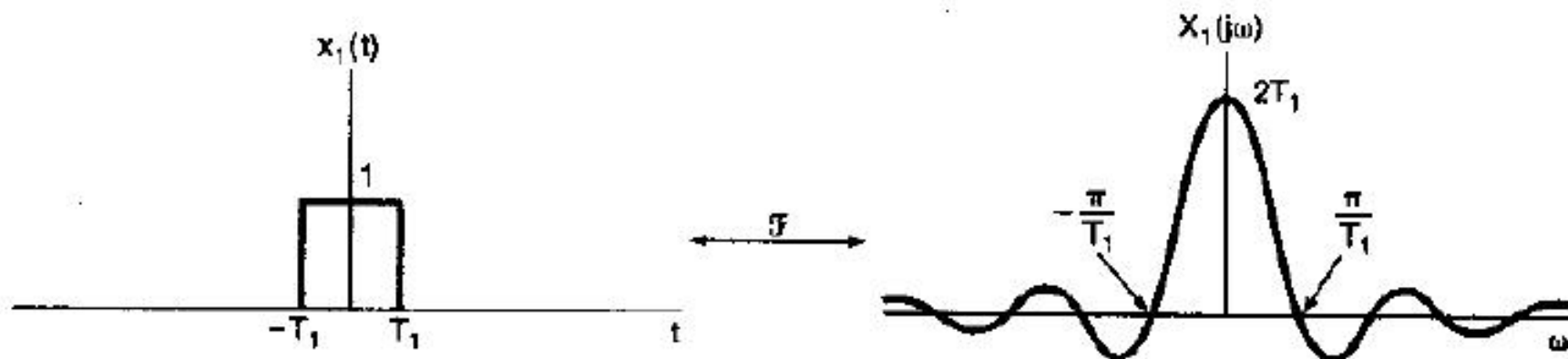
$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

这两个式子在形式上很相似，但并不完全一样。这种对称性导致了傅里叶变换的一个性质，称之为**对偶性**。

❖ 例4.4和例4.5中傅里叶变换对之间的关系

$$x_1(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{F} X_1(j\omega) = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$$

$$x_2(t) = \frac{\sin Wt}{\pi t} \xleftrightarrow{F} X_2(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases}$$



- ❖ 这两个例子所呈现的对称性可以推广到一般的傅里叶变换中去。明确一点说就是，由于正变换和反变换式之间的对称性，对于任何变换对来说，在时间和频率变量交换之后都有一种对偶的关系。

4.3.6 对偶性

如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

因此 $X(jt) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$

证明 : $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$

exchange t and ω :

$$x(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{j\omega t} dt$$

$$2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(jt) e^{-j\omega t} dt$$

$$\therefore X(jt) \xleftrightarrow{FT} 2\pi x(-\omega)$$

例题 4.13

例4.13 考虑用对偶性来求信号 $g(t)$ 的傅里叶变换 $G(j\omega)$

$$g(t) = \frac{2}{1+t^2}$$

解：在例4.2的傅里叶变换对

$$x(t) = e^{-a|t|} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

其频谱信号与信号 $g(t)$ 有类似的函数形式。

设信号 $x(t)$ ，它的傅里叶变换是（即 $a=1$ ）：

$$X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

❖ 那么，由例4.2就有

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

对于这一变换对的傅里叶反变换公式

$$e^{-|t|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{j\omega t} d\omega$$

两边乘以 2π ，并将 t 以 $-t$ 置换，得

$$2\pi e^{-|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+\omega^2} \right) e^{-j\omega t} d\omega$$

将变量 t 与 ω 互换

$$2\pi e^{-|\omega|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2}{1+t^2} \right) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-j\omega t} dt = G(j\omega)$$

式向傅里叶变换式靠
就是从傅里叶反变换

❖ 通过这个例子，我们得到对偶性的数学表达
若

$$x(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega)$$

则：

$$X(t) \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega)$$

❖ 对例4.13来说，已知 $\frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} ?$

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{F} X(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$X(t) = \frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{F} 2\pi x(-\omega) = 2\pi e^{-|\omega|}$$

P₂₂₀ 例题 4.13

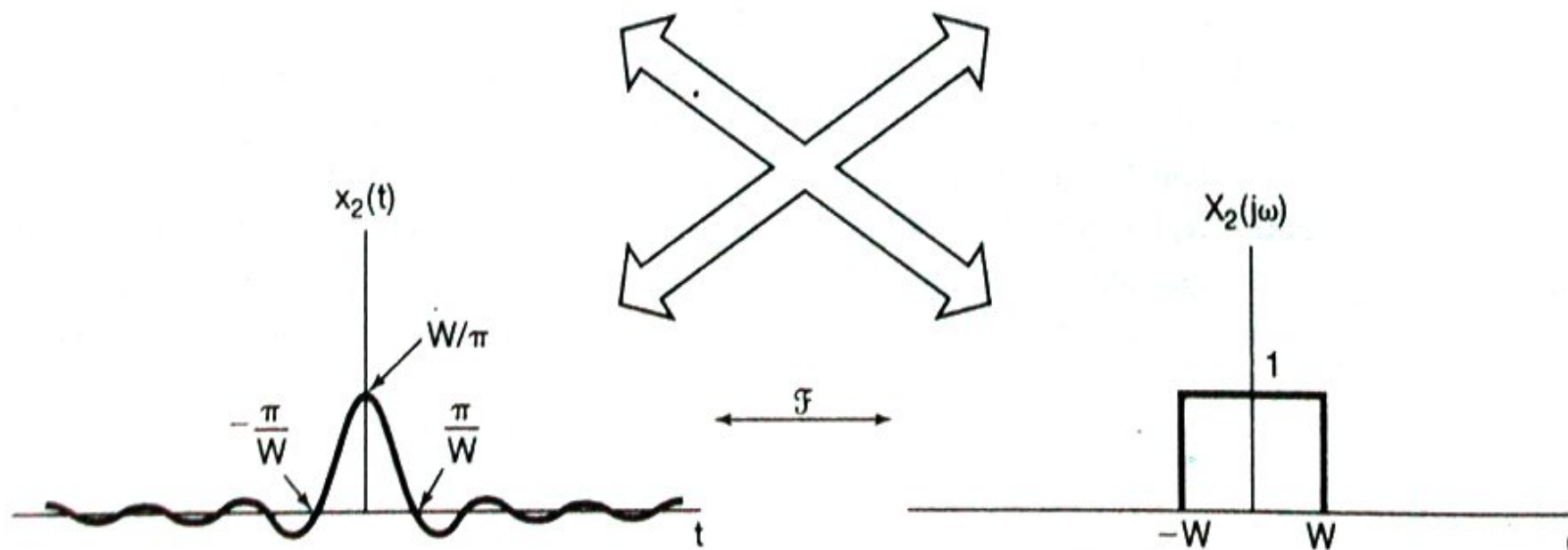
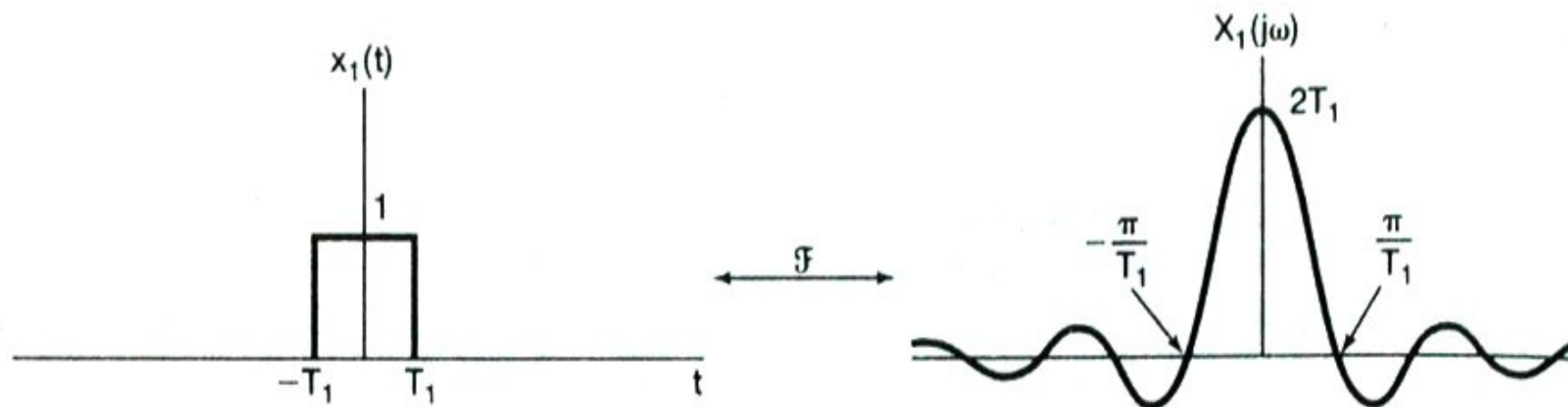
$$g(t) = \frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = ?$$

$$x(t) = e^{-|t|} \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}$$

$$X(jt) = \frac{2}{1+t^2} \xleftrightarrow{FT} 2\pi \cdot x(-\omega) = 2\pi \cdot e^{-|\omega|}$$

$$g(t) \xleftrightarrow{FT} G(j\omega) = 2\pi \cdot e^{-|\omega|}$$

请修正书上错误



4.3.7 帕斯瓦尔定理

如果 $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$

$$\text{因此 } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$$\begin{aligned} \text{证明: } \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x^*(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^*(j\omega)X(j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

例题 4.14

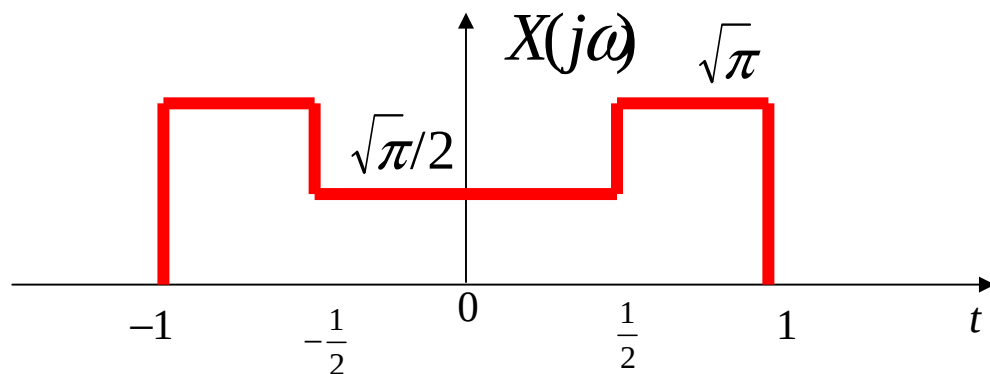
帕斯瓦尔定理

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

信号的总能量即可以按每单位时间内的能量 ($|x(t)|^2$) , 在整个时间内积分计算出来, 也可以按每单位频率内能量 ($|X(j\omega)|^2 / 2\pi$) 在整个频率范围内积分而得到。因此 $|X(j\omega)|^2$ 常称为信号 $x(t)$ 的能谱密度。

P₂₂₂ 例题 4.14

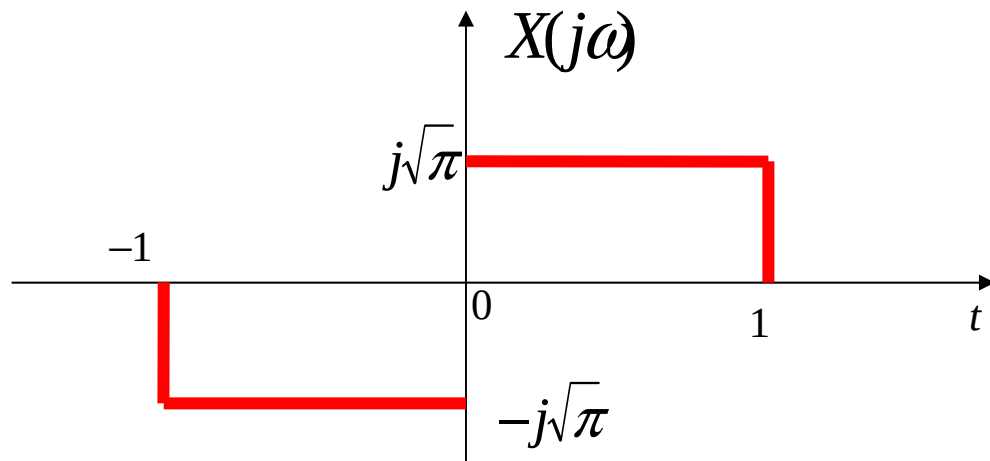
已知: $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$



求:

$$1) \quad E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

$$2) \quad D = x'(t) \Big|_{t=0}$$



课堂练习

❖ P_{238} 4.1 (b)

❖ 4.2 (b)

4.1 (a) Let $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$, then the Fourier transform $X(j\omega)$ of $x(t)$ is :

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_1^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega} / (2 + j\omega) \end{aligned}$$

$|X(j\omega)|$ is as shown in figure s4.1.

(b) Let $x(t) = e^{-2|t-1|}$ • then the Fourier transform $X(j\omega)$ of $x(t)$ is :

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-1|}e^{-j\omega t} dt = \int_1^{\infty} e^{-2(t-1)}e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^1 e^{2(t-1)}e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega} / (2 + j\omega) + e^{-j\omega} / (2 - j\omega) = 4e^{-j\omega} / (4 + \omega^2) \end{aligned}$$

$|X(j\omega)|$ is as shown in figure s4.1

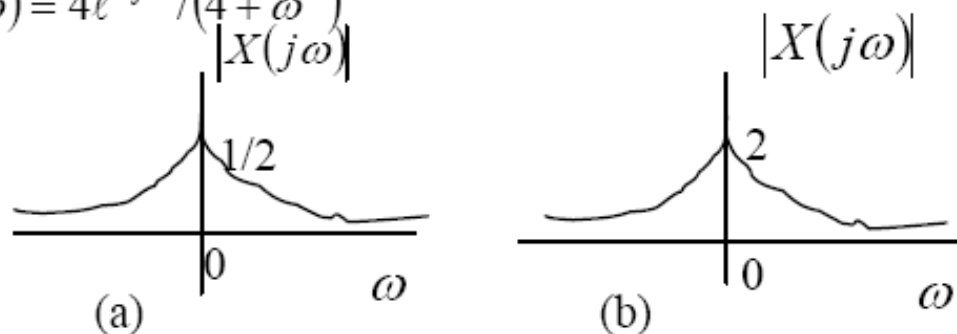


figure s4.1

4.2 (a) Let $x_1(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$. then the Fourier transform $X_1(j\omega)$ of $x(t)$ is :

$$X_1(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t+1) + \delta(t-1)] e^{-j\omega t} dt = e^{j\omega} + e^{-j\omega} = 2 \cos \omega$$

$|X_1(j\omega)|$ is as sketched in figure s4.2.

(b) the signal $x_2(t) = u(-2-t) + u(t-2)$ is as shown in the figure below .Clearly,

$$\frac{d}{dt} \{u(-2-t) + u(t-2)\} = \delta(t-2) - \delta(t+2)$$

Therefore

$$\begin{aligned} x_2(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t-2) - \delta(t+2)] e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-2j\omega} - e^{2j\omega} \\ &= -2j \sin(2\omega) \end{aligned}$$

$|x_1(j\omega)|$ is as sketched in figure s4.2.

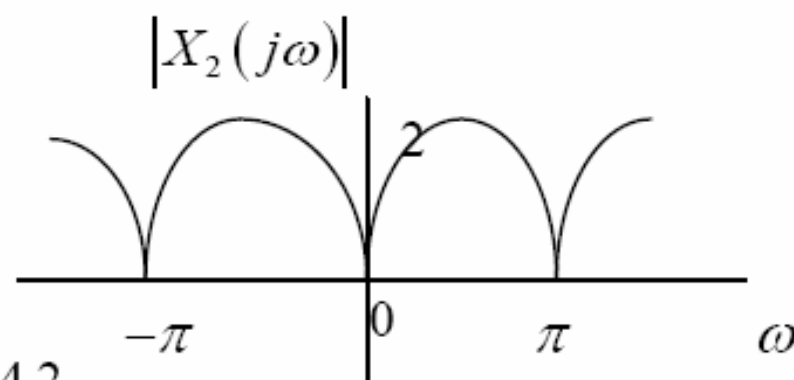
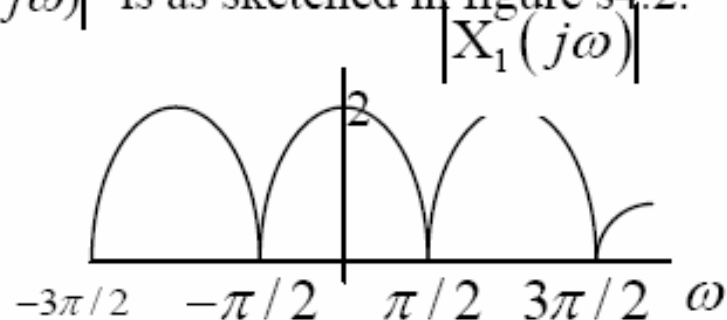
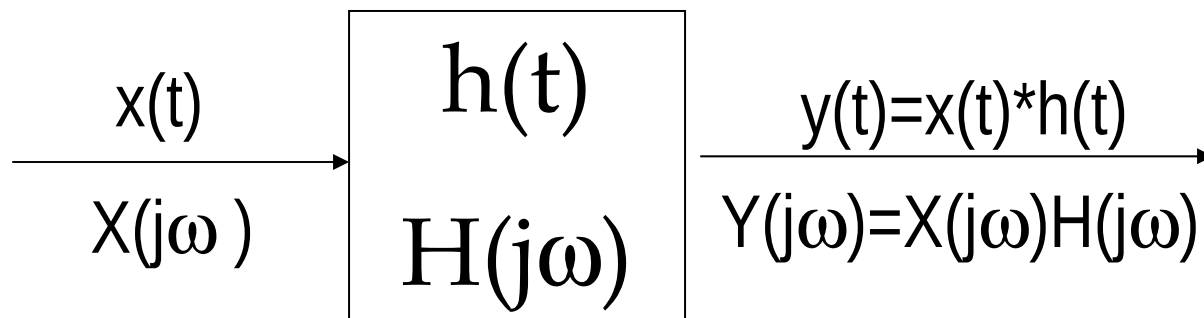


figure s4.2

4.4 卷积性质

$$y(t) = x(t) * h(t) \xleftrightarrow{FT} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

LTI 系统:



4.4 卷积性质

- ❖ 回想一下，我们是把 $x(t)$ 的傅里叶变换公式当作复指数信号的一种线性组合来理解的：

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

前面讨论过，单位冲激响应为 $h(t)$ 的LTI系统对复指数信号 $e^{jk\omega_0 t}$ 的响应是 $H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t}$ ，这里

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

当 $\omega_0 \rightarrow 0$ 时，有

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

❖ 这样，式3.121中的频率响应 $H(j\omega)$ ，就可以理解为该系统单位冲激响应的傅里叶变换。就有：

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \xrightarrow{\text{LTI系统}} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0$$

因此，该系统对 $x(t)$ 的响应就是

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0) H(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} \omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

因为 $y(t)$ 和它的傅里叶变换是由下式联系在一起的：

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

这样，就可以将 $Y(j\omega)$ 认为是

$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

❖ 也就是

$$y(t) = h(t) * x(t) \xleftrightarrow{F} Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \quad \text{式4.56}$$

该式所表达的，将两个信号的卷积映射为它们傅里叶变换的乘积。单位冲激响应的傅里叶变换 $H(j\omega)$ 是按式3.121所定义的频率响应，它控制着在每一频率 ω 上输入傅里叶变换复振幅的变化，例如在某段频率域上 $H(j\omega)=1$ ，表示带通； $H(j\omega)=0$ ，表示带阻。

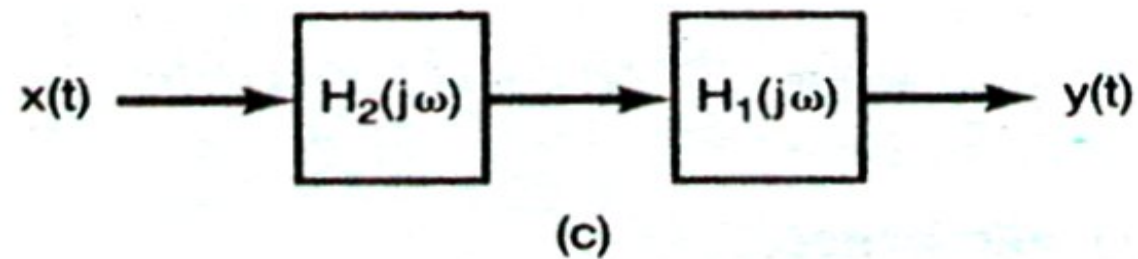
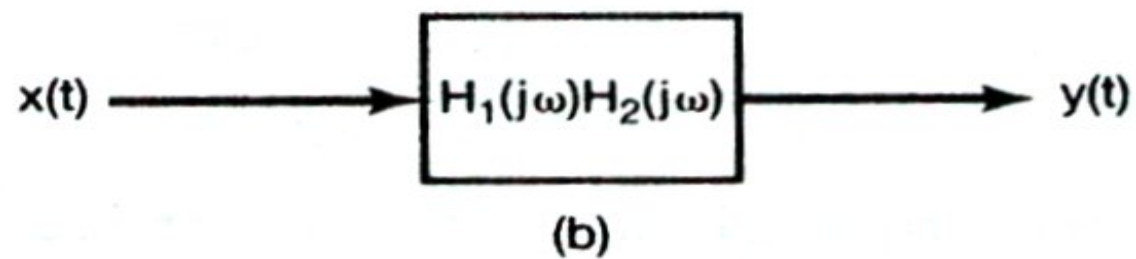
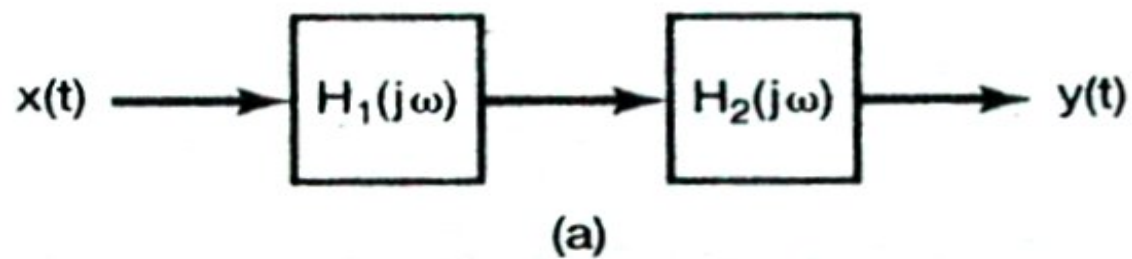
❖ 在LTI系统分析中，频率响应 $H(j\omega)$ 所起的作用与其反变换——单位冲激响应 $h(t)$ 所起的作用是一样的。 $H(j\omega)$ 也同样表征了一个LTI系统的性质。

❖ 如果一个LTI系统是稳定的话，那么该系统的单位冲激响应就一定是绝对可积的(稳定系统与冲激响应绝对可积之间是充要条件)，也就是

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

即满足狄里赫利的第一个条件。这样，一个稳定的LTI系统就有一个频率响应 $H(j\omega)$ 。

- ❖ 在利用傅里叶分析来研究LTI系统时，将只局限于系统的冲激响应有傅里叶变换的情况。为了应用变换法来研究不稳定的LTI系统，就得建立一种更为一般化的连续时间傅里叶变换，这就是拉普拉斯变换，在第9章讨论。
- ❖ 如果冲激响应满足绝对可积条件，那么这个系统就是稳定系统，则其傅里叶变换存在。注意：这一条件是傅里叶变换存在的充分条件而不是必要条件。一些不满足绝对可积条件的函数也可有傅里叶变换，例如抽样函数，阶跃函数，符号函数和周期函数等。



4.4.1 举例

例题

4.15 4.16 4.17 4.19
4.20

P₂₂₄ 例题 4.15

已知LTI系统



$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

从时域和频域分析： LTI 系统的输入与输出关系.

$$h(t) = ?$$

$$H(j\omega) = ?$$

$$Y(j\omega) = ?$$

例 4.15 有一连续时间 LTI 系统, 其单位冲激响应为

$$h(t) = \delta(t - t_0) \quad (4.58)$$

该系统的频率响应就是 $h(t)$ 的傅里叶变换为

$$H(j\omega) = e^{-j\omega t_0} \quad (4.59)$$

因此, 对于具有傅里叶变换 $X(j\omega)$ 的任何输入 $x(t)$, 输出的傅里叶变换是

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = e^{-j\omega t_0}X(j\omega)$$

其实, 这个结果与 4.3.2 节时移性质是一致的。单位冲激响应为 $\delta(t - t_0)$ 的系统对输入将产生一个时延 t_0 , 即

$$y(t) = x(t - t_0)$$

因此, 由(4.27)式给出的时移性质也可得到(4.60)式。值得注意的是, 无论是由 4.3.2 节的讨论, 或是直接从(4.59)式来看, 一个属于纯时移的系统的频率响应在所有频率上其模为 1 (即 $|e^{-j\omega t_0}| = 1$), 而相位则与 ω 成线性关系 $-\omega t_0$ 。

P₂₂₅ 例题 4.16

已知 *LTI* 系统：



$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

从时域和频域分析：*LTI*系统的输入与输出关系.

$$h(t) = ?$$

$$H(j\omega) = ?$$

$$Y(j\omega) = ?$$

例4.16 一个微分器，即一个LTI系统的输入 $x(t)$ 和输出 $y(t)$ 由下列关系给出：

$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

由微分性质

$$Y(j\omega) = j\omega X(j\omega)$$

由式4.56，这个微分器的频率响应就是

$$H(j\omega) = j\omega$$

P₂₂₅ 例题 4.17

已知 *LTI* 系统 :



$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

从时域和频域分析：*LTI*系统的输入与输出关系.

$$h(t) = ?$$

$$H(j\omega) = ?$$

$$Y(j\omega) = ?$$

例4.17 一个积分器，即一个LTI系统由下列方程给出

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$$

那么，这个系统的单位冲激响应就是单位阶跃 $u(t)$
(为什么?)

因此，由例4.11得该系统得频率响应，也就是 $h(t)=u(t)$
傅里叶变换：

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$$

再利用式4.56，有

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= H(j\omega)X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j\omega)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega) \end{aligned}$$

与傅里叶变换积分性质一样。

- ❖ 作业： $u(t)$ 不满足绝对可积的条件，是否存在系统的频率响应？如果要用定义求解频率响应的话，就要用极限的方式求解。

$$u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at} u(t)$$

$$e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{F} \frac{1}{a + j\omega}$$

P₂₂₅ 例题 4.18

已知 LTI 系统：



$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}$$

从时域和频域分析： LTI 系统的输入与输出关系.

$$h(t) = ?$$

例 4.18 在 3.9.2 节已讨论过, 频率选择性滤波可以用一个 LTI 系统来实现, 该 LTI 系统的频率响应 $H(j\omega)$ 通过所需要的频率范围, 而大大衰减掉在该范围以外的频率分量。例如, 考虑在 3.9.2 节介绍过的理想低通滤波器, 它的频率响应如图 4.20 所示。

并由下式给出:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \omega_c \\ 0 & |\omega| > \omega_c \end{cases} \quad (4.63)$$

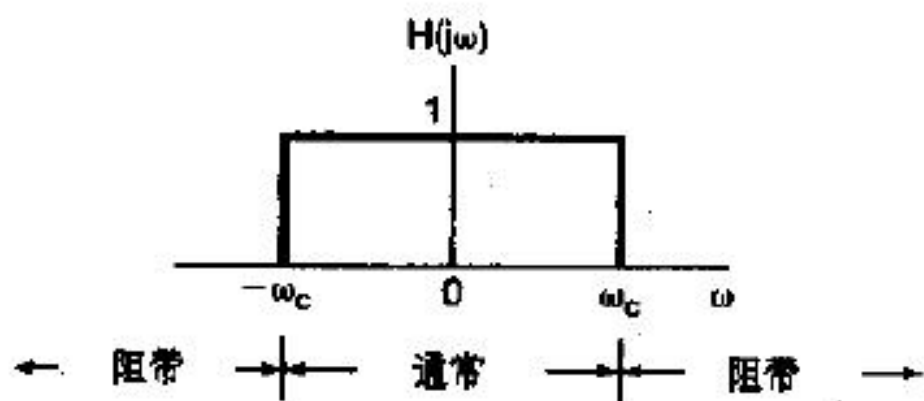


图 4.20 理想低通滤波器的频率响应

现在已经有了它的傅里叶变换表示，并且知道该理想滤波器的单位冲激响应 $h(t)$ 就是(4.63)式的反变换，利用例 4.5 的结果，就有

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad (4.64)$$

如图 4.21 所示。

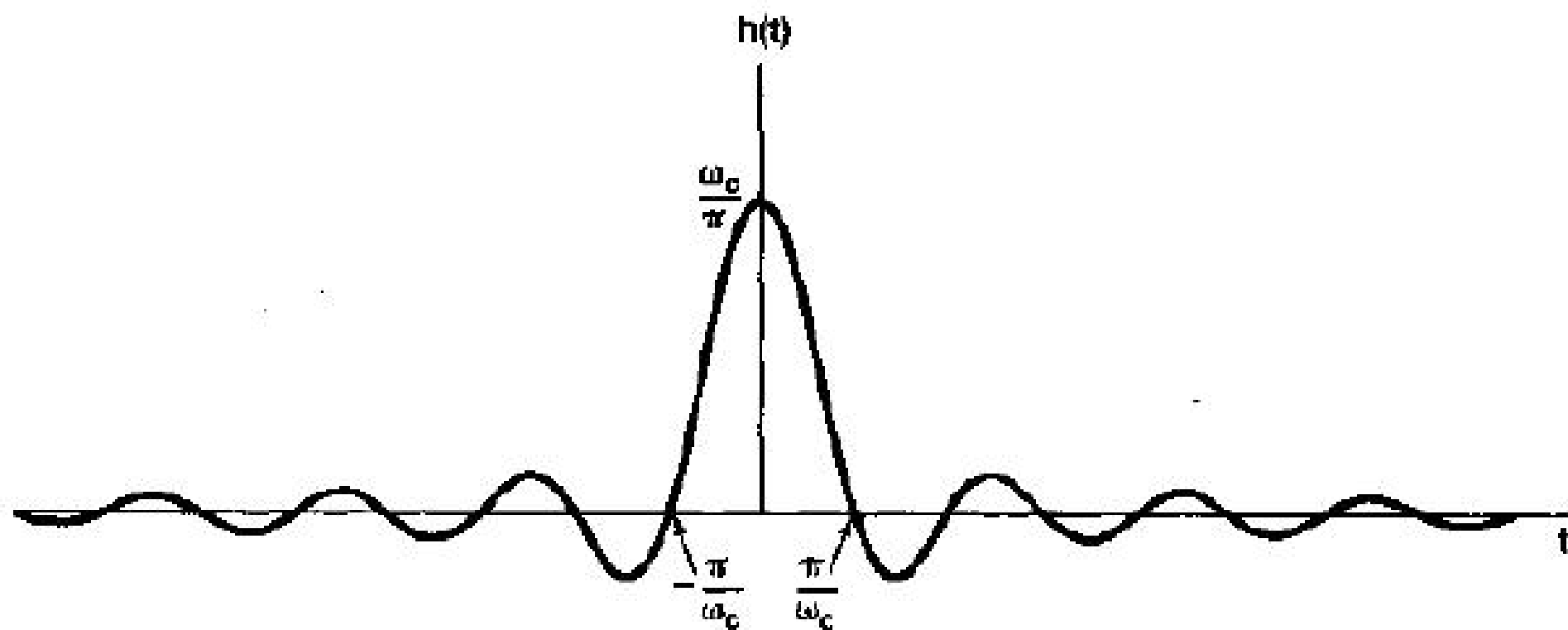
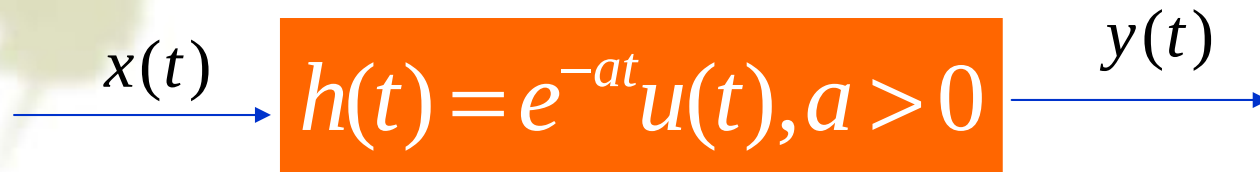


图 4.21 理想低通滤波器的单位冲激响应

- ❖ 在这个例子中。我们能够看到在滤波器设计中所出现的一些问题，**滤波器设计中涉及到时域和频域两方面的要求**。尽管理想低通滤波器确实有非常完美的频率选择性，但是它的单位冲激响应的某些特性却可能是不希望的，如汽车减震系统的设计，显然一个低通滤波器单位冲激响应中的**起伏振荡特性**是我们所不希望的（我们希望是成**指数衰减特性**）。
- ❖ 滤波器设计方面的讨论，在理想频率选择性这样的频域特性与时域特性之间做一些折衷和权衡。

P₂₂₆ 例题 4.19

已知 *LTI* 系统：



$$x(t) = e^{-bt}u(t), b > 0$$

求： $y(t) = ?$

例4.19 考虑一LTI系统对输入 $x(t)$ 的响应，系统的单位冲激响应是 $h(t)$

$$h(t) = e^{-at}u(t), \quad a > 0$$

$$x(t) = e^{-bt}u(t), \quad b > 0$$

解：不采用直接去计算
 $y(t) = x(t) * h(t)$ ，而是将问题变换到频域：

$$X(j\omega) = \frac{1}{b + j\omega}$$

$$H(j\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

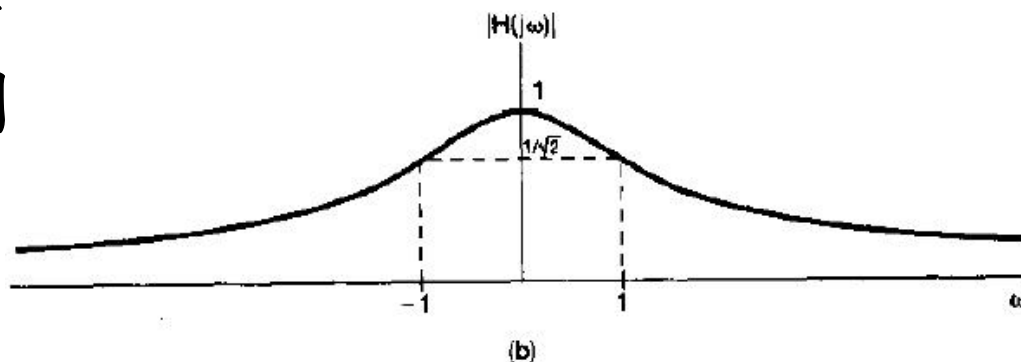
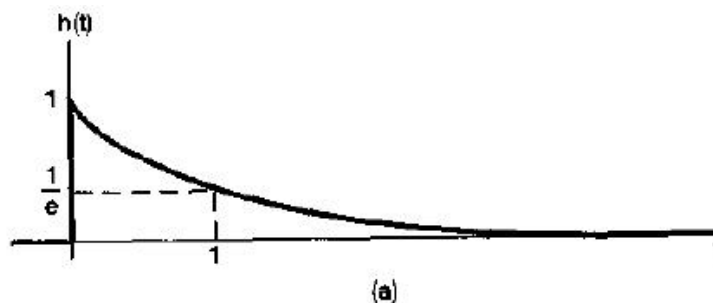


图 4.22 (a)(4.65)式 LTI 系统的单位冲激响应；(b)该系统频率响应的模特性

❖ 因此，有

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) = \frac{1}{(b+j\omega)(a+j\omega)}$$

❖ 假设 $a \neq b$ 将其展开为部分分式：

$$Y(j\omega) = \frac{A}{b+j\omega} + \frac{B}{a+j\omega}$$

傅里叶反变换式

$$Ae^{-bt}u(t)$$

$$Be^{-at}u(t)$$

得到：

$$A = \frac{1}{b-a} = -B$$

所以

$$y(t) = \frac{1}{b-a} [e^{-at}u(t) - e^{-bt}u(t)]$$

❖ 当 $a=b$ 时，部分分式展开不成立，此时

$$Y(j\omega) = \frac{1}{(a+j\omega)^2} = j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right]$$

❖ 对傅里叶变换式，两边对 ω 微分

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\frac{dX(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{+\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t} dt$$

于是，有 $-jtx(t) \xleftrightarrow{F} \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

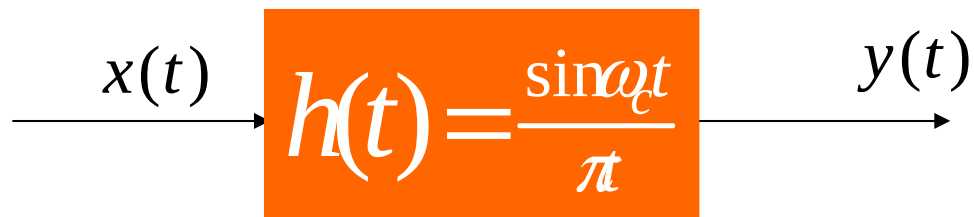
即： $tx(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}$

所以有： $te^{-at}u(t) \xleftrightarrow{F} j \frac{d}{d\omega} \left[\frac{1}{a+j\omega} \right]$

$$y(t) = te^{-at}u(t)$$

P₂₂₈ 例题 4.20

已知 *LTI* 系统：



$$x(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi}$$

求：

$$y(t) = ?$$

例 4.20 卷积性质应用的另一个例子是考虑求一个理想低通滤波器对具有 sinc 函数 $x(t)$ 的响应问题, 即

$$x(t) = \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}$$

当然, 该理想低通滤波器的冲激响应具有与 $x(t)$ 相类似的形式, 即

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}$$

因此, 滤波器的输出 $y(t)$ 就是这两个 sinc 函数的卷积。现在来证明, 它还是一个 sinc 函数。导出这一结果的特别方便的方法是先看一下

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

式中

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_i \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

和

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

因此有

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_0 \\ 0, & \text{其余 } \omega \end{cases}$$

这里 ω_0 等于 ω_i 和 ω_c 中较小的一个。最后, $Y(j\omega)$ 的反变换为

$$y(t) = \begin{cases} \frac{\sin \omega_c t}{\pi t}, & \text{若 } \omega_c \leq \omega_i \\ \frac{\sin \omega_i t}{\pi t}, & \text{若 } \omega_i \leq \omega_c \end{cases}$$

即, 取决于 ω_c 和 ω_i 中哪一个较小, 输出要么等于 $x(t)$, 要么等于 $h(t)$ 。

4.5 相乘性质

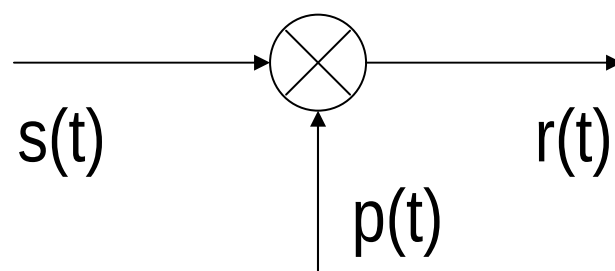
- ❖ 卷积性质说的是时域内的卷积对应于频域内的乘积。由于时域和频域之间的对偶性，有一个相应的对偶性质存在，即：**时域内的乘积对应于频域内的卷积。**

$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)]$$

- ❖ 一个信号被另一个信号去乘，可以理解为用一个信号去**调制**另一个信号的振幅，因此两个信号相乘往往也称之为**幅度调制**。

4.5 相乘性质

乘法器模型:

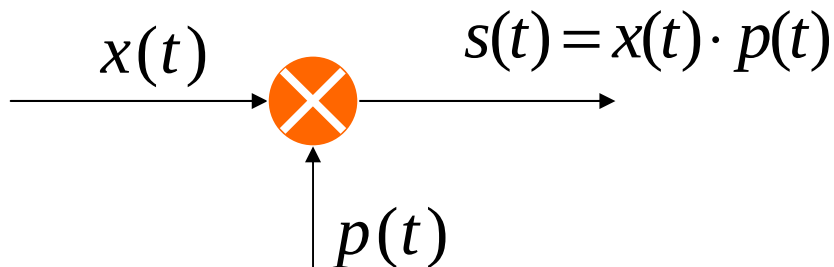


$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{FT} R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * P(j\omega)$$

例题 4. 21 4. 22 4. 23

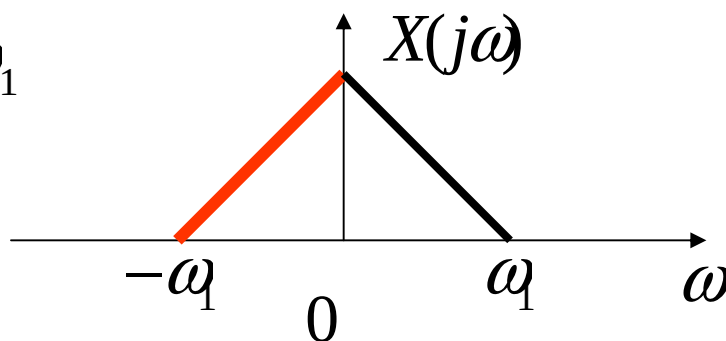
P₂₂₉ 例题4.21

已知双边带调制电路：



$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$\omega_0 > 2\omega_1$$



试画出 $S(j\omega)$ 的波形图. $p(t) = e^{-j\omega_0 t}$ 时呢?

例4.21 设信号 $s(t)$ 的频谱 $S(j\omega)$,
同时另一个信号 $p(t)$ 。

$$p(t) = \cos \omega_0 t$$

那么

$$P(j\omega) = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

利用相乘性质

$$\begin{aligned} R(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} [S(j\omega) * P(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2} S(j(\omega - \omega_0)) + \frac{1}{2} S(j(\omega + \omega_0)) \end{aligned}$$

如图4.23(c)所示。这里已假定 $\omega_0 > \omega_1$ ，所以 $R(j\omega)$ 中两个非零的部分互不重叠。很显然， $r(t)$ 的频谱是由 $S(j\omega)$ 移位并受到加权的两个部分所组成的。

由(4.71)式和图4.23可见，当该信号 $s(t)$ 被一正弦信号相乘以后，虽然信号中所包含的信息全都搬移到较高的频率中去了，但是在 $s(t)$ 中的全部信息却被原封不动地保留了下来！这一点就构成了通信中正弦幅度调制系统的基础。

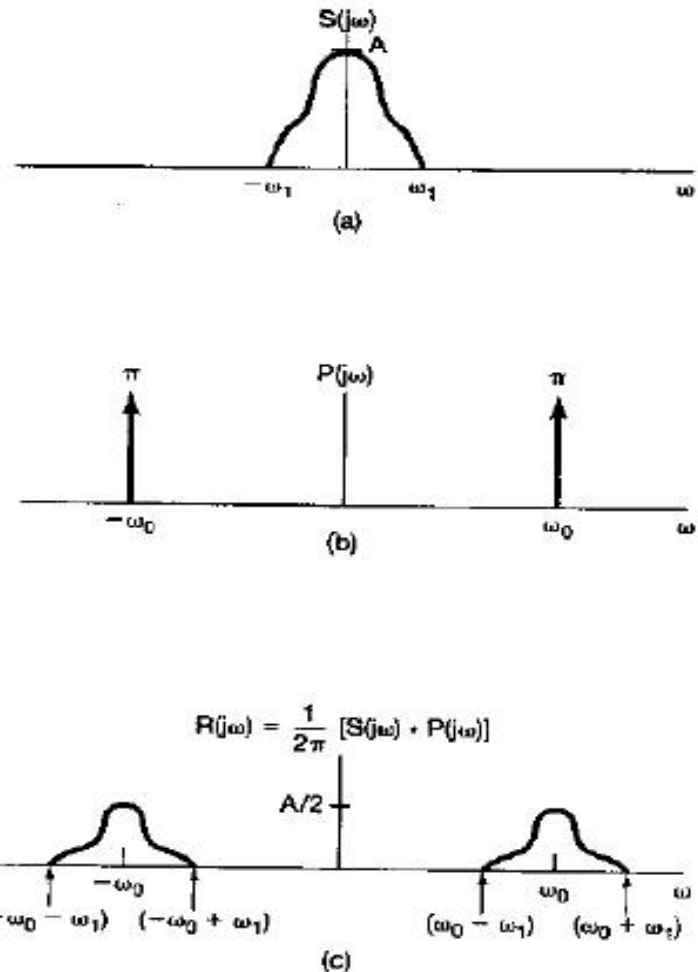
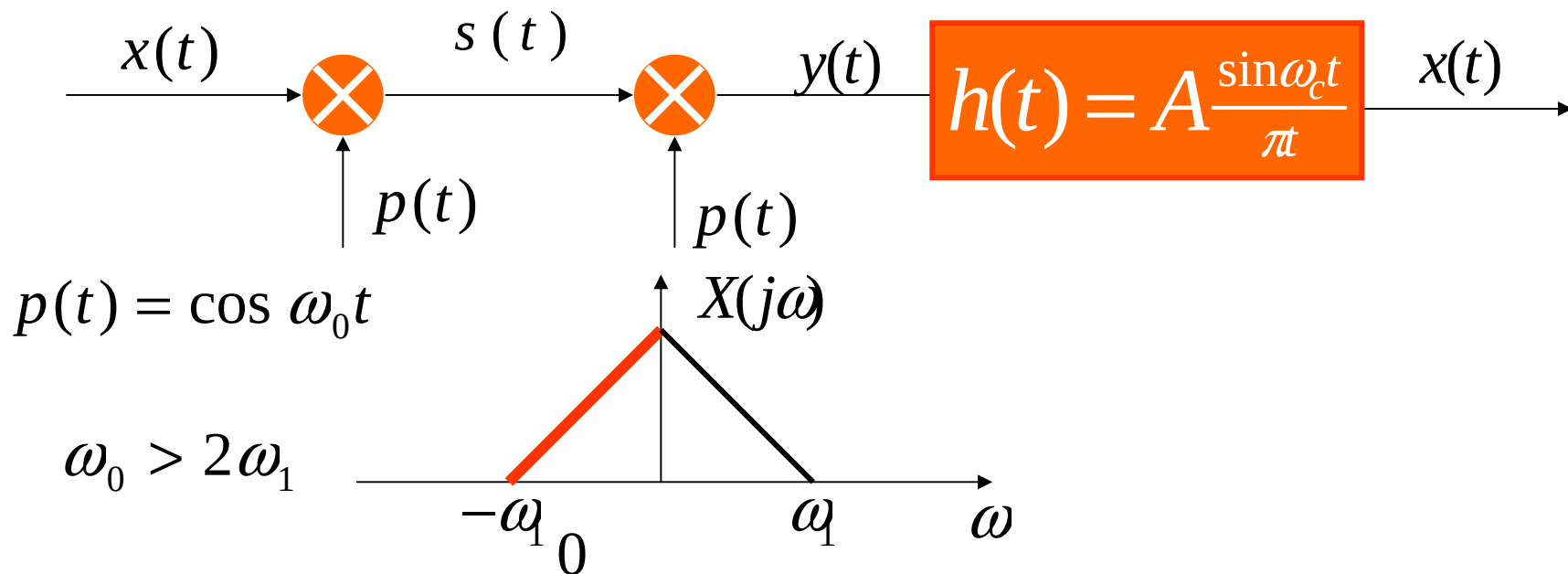


图 4.23 例 4.21 中相乘性质的应用：

P₂₃₀ 例题 4.22

已知系统：



试画出 $H(j\omega)$ 的波形图. 常数 $A = ?$

例 4.22 现在考虑在例 4.21 中得到的信号 $r(t)$, 并令

$$g(t) = r(t)p(t)$$

这里 $p(t) = \cos\omega_0 t$ 。这时, $R(j\omega)$, $P(j\omega)$ 和 $G(j\omega)$ 均如图 4.24 所示。

由图 4.24(c) 并根据傅里叶变换的线性性质, 可见 $g(t)$ 是 $(1/2)s(t)$ 与一个其频谱仅在较高的频率上(以 $\pm 2\omega_0$ 为中心附近)为非零的信号之和。假设将信号 $g(t)$ 作为一个输入加在一个频率响应 $H(j\omega)$ 只局限在低频域(如 $|\omega| < \omega_1$), 而在 $|\omega| > \omega_1$ 的高频域为零的频率选择性低通滤波器上, 那么系统的输出频谱就为 $H(j\omega)G(j\omega)$, 由于对 $H(j\omega)$ 给以如上的特殊选取, 它除了在幅度上有一个加权外, 就是 $S(j\omega)$ 。因此, 输出就是一个受到加权的 $s(t)$ 。到第 8 章, 当更详细地讨论幅度调制的原理后, 将会大大扩展这一概念。

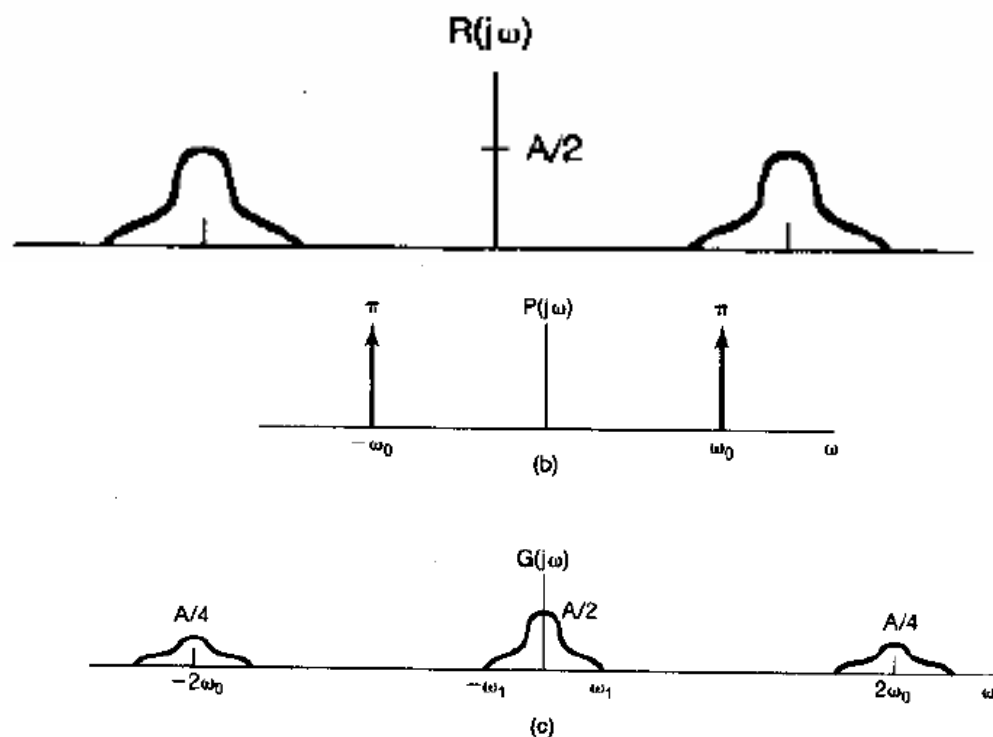


图 4.24 例 4.22 中考虑的各信号的频谱: (a) $R(j\omega)$; (b) $P(j\omega)$; (c) $G(j\omega)$

P₂₃₀ 例题 4.23

已知：

$$x(t) = \frac{\sin(t) \cdot \sin(t/2)}{\pi^2}$$

求

1) $x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega) = ?$

2) 画出 $X(j\omega)$ 的波形图.

例 4.23 作为傅里叶变换相乘性质的另一个应用是用来求下面信号 $x(t)$ 的傅里叶变换

$$x(t) = \frac{\sin(t)\sin(t/2)}{\pi t^2}$$

这里的关键是要将 $x(t)$ 当作两个 sinc 函数的乘积:

$$x(t) = \pi \left(\frac{\sin(t)}{\pi t} \right) \left(\frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right)$$

应用傅里叶变换的相乘性质, 就得到

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t)}{\pi t} \right\} * \mathcal{F} \left\{ \frac{\sin(t/2)}{\pi t} \right\}$$

注意: 每一个 sinc 函数的傅里叶变换都是

一个矩形脉冲, 把这两个脉冲卷积就得到 $X(j\omega)$, 如图 4.25 所示。

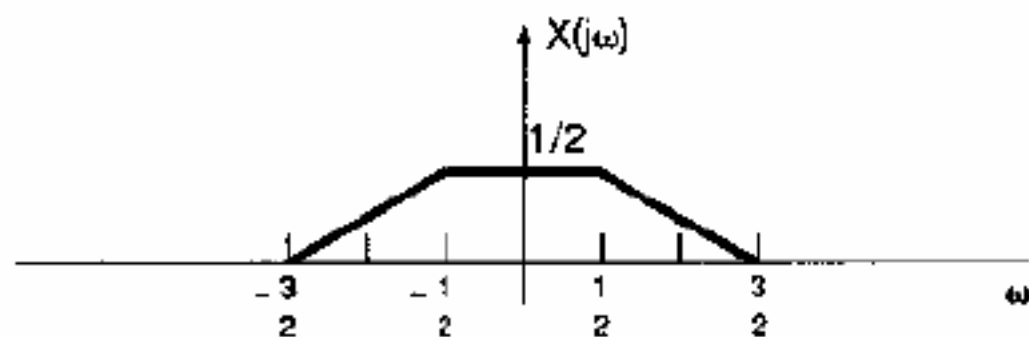


图 4.25 例 4.23 中 $x(t)$ 的傅里叶变换

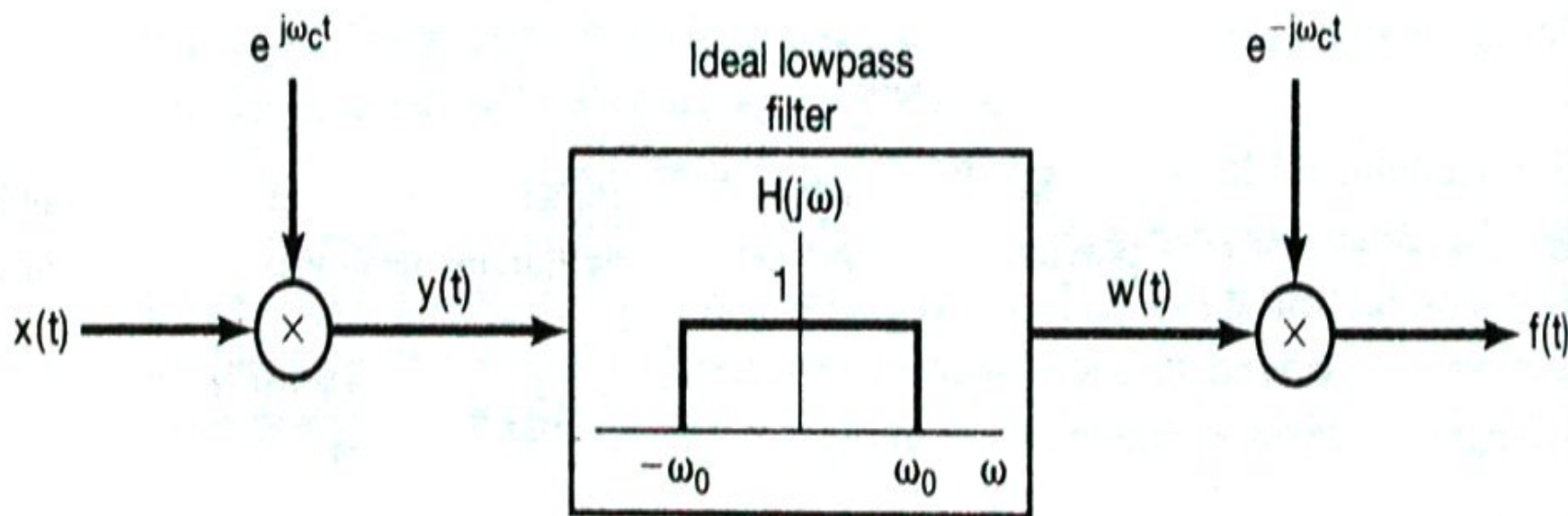
4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波

相乘性质的一个重要应用是在通信系统中的幅度调制。另一个重要应用是在**中心频率可调的频率选择性带通滤波的实现**上，其中心频率可以很简单地用一个调谐旋钮来调节。

- ❖ 在由电阻器、运算放大器和电容器构成的频率选择性带通滤波中，其中心频率决定于许多元件参数，如果直接调节中心频率，全部元件都需以一种正确的方式变化，很困难，且与仅制作一个固定特性的滤波器相比甚为麻烦。一种可行的方法是**利用一个固定特性的频率选择性滤波器，然后恰当地移动信号频谱的办法来改变滤波器的中心频率**，这其中就要用到正弦幅度调制的原理。

4.5.1 具有可变中心频率的频率选择性滤波

一个带通滤波器：



例如，考虑一下示于图 4.26 的系统。这里，输入信号 $x(t)$ 被一个复指数信号 $e^{j\omega_c t}$ 相乘，所得信号然后通过一个截止频率为 ω_c 的低通滤波器，其输出再乘以 $e^{-j\omega_c t}$ 。信号 $x(t)$ ，

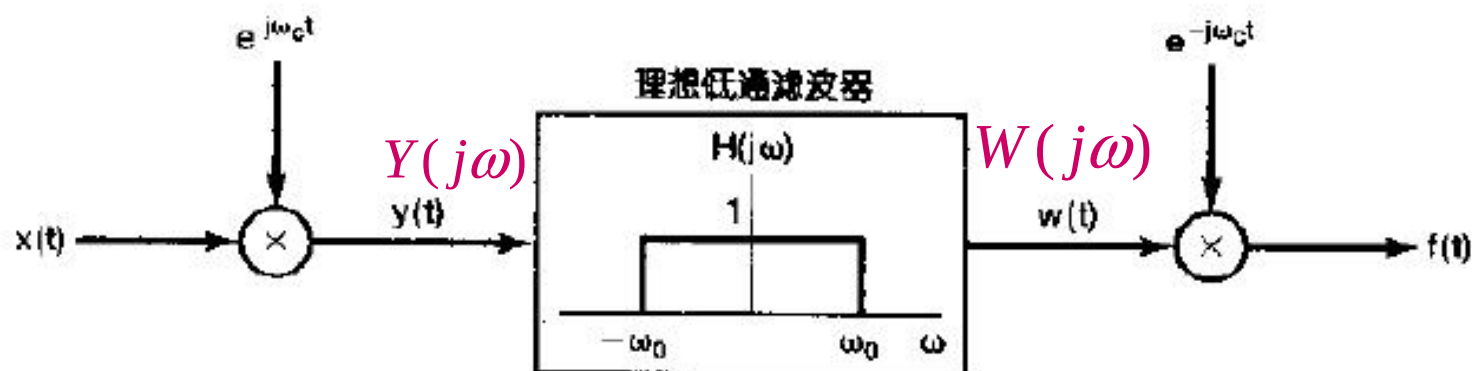


图 4.26 利用复指数载波的幅度调制实现带通滤波器

$y(t)$ ， $w(t)$ 和 $f(t)$ 的频谱如图 4.27 所示。无论从相乘性质或频移性质来看， $y(t) = e^{j\omega_c t} x(t)$ 的傅里叶变换都是

$$Y(j\omega) = \delta(\omega - \omega_c) * X(j\omega) = X(j(\omega - \omega_c))$$

$$e^{j\omega_c t} \xleftrightarrow{F} 2\pi\delta(\omega - \omega_c)$$

这样 $Y(j\omega)$ 就等于 $X(j\omega)$ 向右移 ω_c ，在 $X(j\omega)$ 中靠近 $\omega = -\omega_c$ 附近的频谱就移进该低通滤波器的通带内。同样， $f(t) = e^{j\omega_c t} w(t)$ 的傅里叶变换是

$$F(j\omega) = W(j(\omega + \omega_0))$$

$F(j\omega)$ 就是 $W(j\omega)$ 向左移 ω_c 。由图 4.27 可见，图 4.26 整个系统等效于一个中心频率为 $-\omega_c$ ，带宽为 $2\omega_0$ 的理想带通滤波器，如图 4.28 所示。随着复指数振荡器的频率 ω_c 的改变，该带通滤波器的中心频率也就改变了。

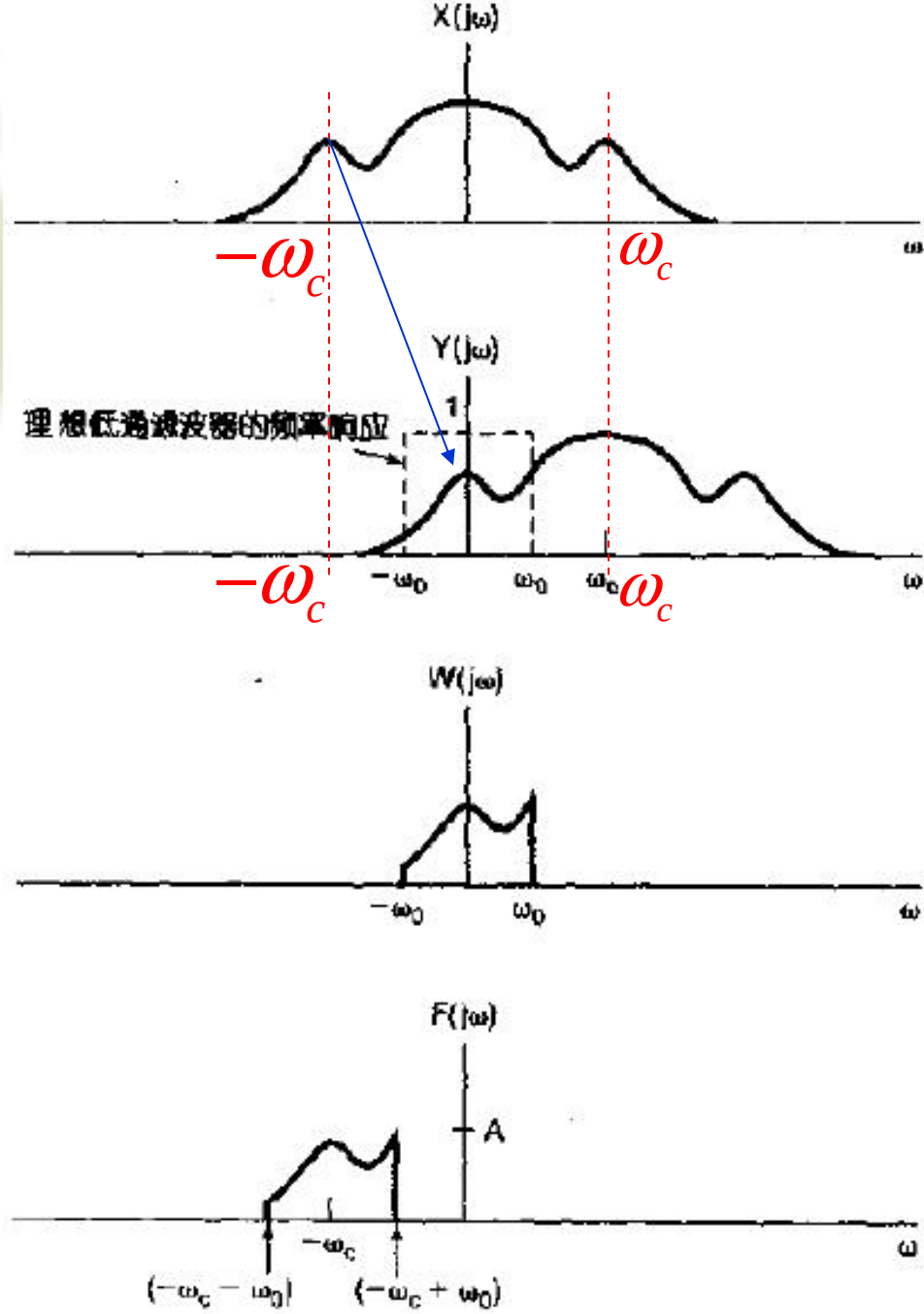
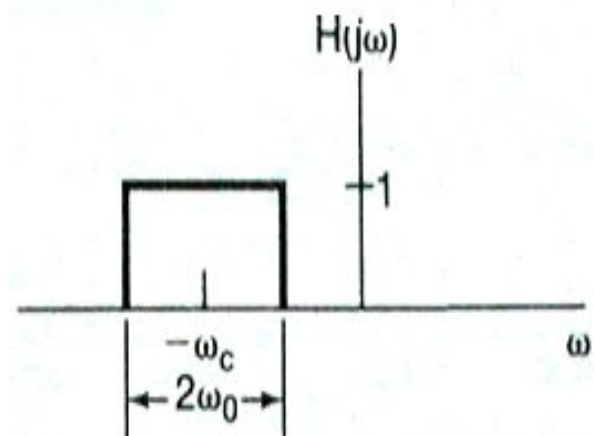
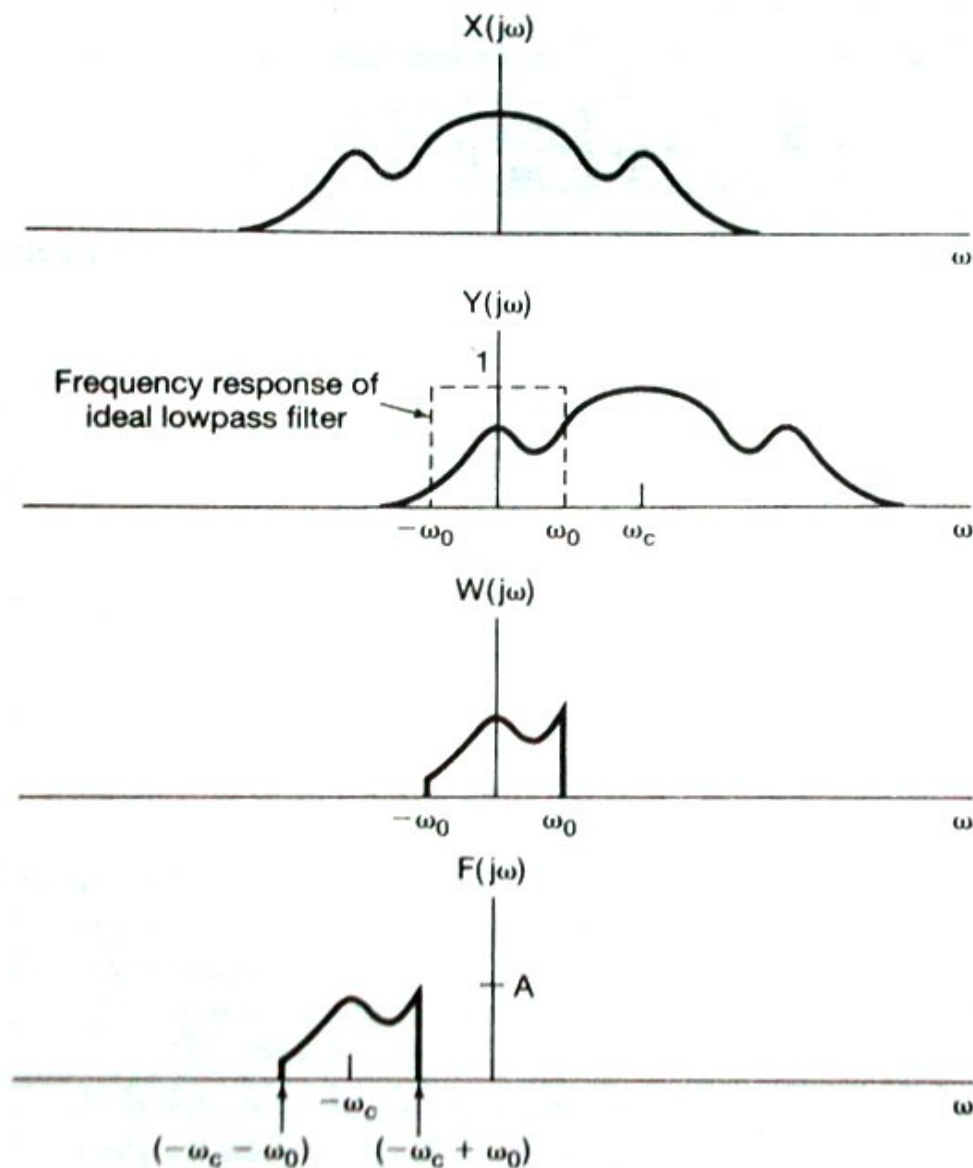


图 4.27 图 4.26 系统中各信号的频谱



带通滤波器

4.6 傅里叶变换性质和傅里叶变换对列表

表 4.1

表 4.2

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

❖ N阶微分方程

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad \text{式4.72}$$

❖ 现考虑一个由式4.72表征的LTI系统。由卷积性质

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$$

❖ 现在，对式4.72两边取傅里叶变换

$$F \left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = F \left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

❖ 由傅里叶变换的线性性质，上式变为

$$\sum_{k=0}^N a_k F \left\{ \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} = \sum_{k=0}^M b_k F \left\{ \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\}$$

并且由傅里叶变换的微分性质，可得：

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

等效为

$$Y(j\omega) \sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k = X(j\omega) \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k$$

因此，有：

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k}$$

4.7 由线性常系数微分方程表征的系统

常系数微分方程:

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{dx^k(t)}{dt^k}$$

傅里叶变换

$$\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k X(j\omega)$$

定义:
$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j\omega)^k} \text{ (system function)}$$

例题 4.24 4.25 4.26

P₂₃₆ 例题 4.24

已知稳定LTI系统：

$$y'(t) + ay(t) = x(t) \quad a > 0$$

求

该系统的单位冲激响应： $h(t) = ?$

例 4.24 有一稳定的 LTI 系统, 由如下微分方程表征:

$$\frac{dy(t)}{dt} + ay(t) = x(t) \quad (4.77)$$

其中 $a > 0$ 。由(4.76)式, 频率响应为

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a} \quad (4.78)$$

将该式与例 4.1 的结果作比较, 可见(4.78)式就是 $e^{-at}u(t)$ 的傅里叶变换。因此该系统的单位冲激响应就是

$$h(t) = e^{-at}u(t)$$

P₂₃₆ 例题 4.25

已知稳定LTI系统：

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

求

该系统的单位冲激响应： $h(t) = ?$

例 4.25 一稳定的 LTI 系统由下面微分方程所表征：

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + 2x(t)$$

由(4.76)式，频率响应是

$$H(j\omega) = \frac{(j\omega) + 2}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3} \quad (4.79)$$

为了求出相应的单位冲激响应，要求 $H(j\omega)$ 的反变换，这就要用到在例 4.19 中所用的并在附录中详细讨论的部分分式展开[具体见例 A.1，其中详细地对(4.79)式的部分分式展开作了计算]。作为第一步，要将(4.79)式右边的分母因式分解为较低阶项的乘积：

$$H(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \quad (4.80)$$

然后，利用部分分式展开，求得

$$H(j\omega) = \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 3}$$

这里每一项的反变换都能从例 4.24 中得出，其结果是

$$h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)$$

P₂₃₆ 例题4.26

已知稳定LTI系统：

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = x'(t) + 2x(t)$$

输入： $x(t) = e^{-t}u(t)$

求：

该系统的输出： $y(t) = ?$

例 4.26 假设例 4.25 系统的输入是

$$x(t) = e^{-t}u(t)$$

那么应用(4.80)式, 有

$$Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) = \left[\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 3)} \right] \left[\frac{1}{j\omega + 1} \right] = \frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)^2(j\omega + 3)} \quad (4.81)$$

正如附录中所指出的, 这种情况, 其部分分式展开应为

$$Y(j\omega) = \frac{A_{11}}{j\omega + 1} + \frac{A_{12}}{(j\omega + 1)^2} + \frac{A_{21}}{j\omega + 3} \quad (4.82)$$

其中 A_{11} , A_{12} , A_{21} 均是待定常数。为了确定这些常数, 可以应用附录中例 A.2 的部分分式展开法求得为

$$A_{11} = \frac{1}{4}, A_{12} = \frac{1}{2}, A_{21} = -\frac{1}{4}$$

于是得到

$$Y(j\omega) = \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{2}}{(j\omega + 1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{j\omega + 3} \quad (4.83)$$

(4.83)式中每一项的反变换都能直接得到, 其中第一项和第三项与前两个例子的形式相同, 而第二项的反变换可以从表 4.2 中得到, 或者像例 4.19 那样, 利用微分性质的对偶性质(4.40)式, 对 $1/(j\omega + 1)$ 作频域微分求得。这样(4.83)式的反变换为

$$y(t) = \left[\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t} - \frac{1}{4}e^{-3t} \right] u(t)$$

作业

4.4

4.21(a)(h)

4.22(c)(d)

4.25

4.28(a)

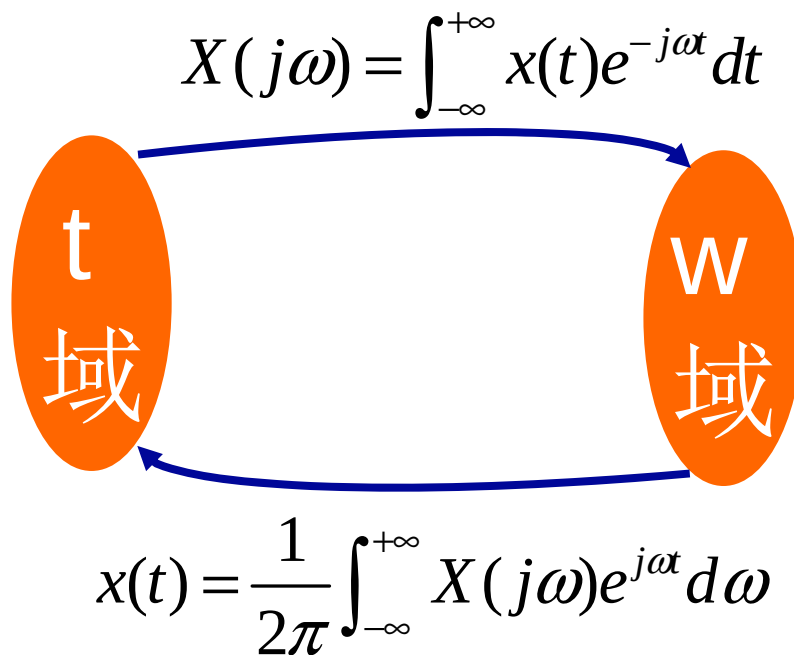
4.33

4.34

4.36

小结---本章知识点很重要

❖ (1) 傅里叶变换定义式



小结--- (2) 基本信号的傅里叶变换

1. 矩形脉冲: $x(t) = \begin{cases} 1 & |t| < T_1 \\ 0 & |t| > T_1 \end{cases} \xleftrightarrow{FT} \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega}$

2. 单边指数: $x(t) = e^{-at} u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega} \text{Re}\{a\} > 0$

3. 双边指数: $x(t) = e^{-a|t|} u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \text{Re}\{a\} > 0$

4. 冲激函数: $\delta(t) \xleftrightarrow{FT} 1$

5. 直流信号: $1 \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega)$

6. 符号函数: $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{FT} \frac{2}{j\omega}$

7. 阶跃函数: $u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$

8. $e^{j\omega_0 t} \xleftrightarrow{FT} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

(3) 傅里叶变换性质

将复杂图形化为常见基本信号的组合形式，然后利用性质来求解 $X(j\omega)$ 。