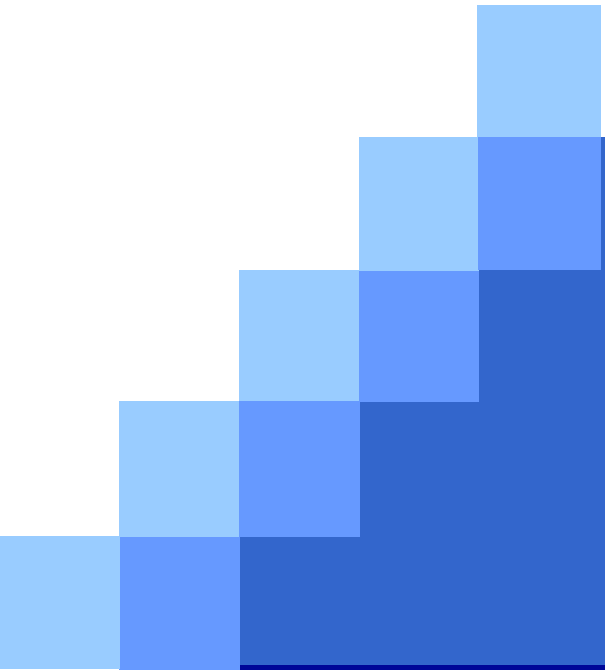




第7章 采样

sampling

学习内容(2学时)



❖ 采样定理



❖ 欠采样的效果：混叠现象

❖ 本章主要讨论的问题有

1. 首先介绍并建立采样的概念和从样本值重建一个连续时间信号的过程。
2. 一个连续时间信号能真正由它的样本值恢复出来的条件，并研究当这些条件不满足时所产生的后果。
3. 研究经由采样已经变换到离散时间信号的连续时间信号处理。
4. 讨论离散时间的采样，以及有关的抽取和内插的概念。

学习目标

- ❖ 1. 理解采样的概念；
- ❖ 2. 掌握采样定理。
- ❖

7.0 引言

- ❖ 在一定条件下，一个连续时间信号完全可以用该信号在等时间间隔点上的值或**样本**来表示，并且可以用这些样本值把该信号全部恢复出来。
- ❖ 听起来有点不可思议，其原理来自于**采样定理**。
- ❖ 采样的概念使人们找到了这样一种方法：利用离散时间系统技术来实现连续时间系统并处理连续时间信号，可以利用采样先把一个连续时间信号进行变换为一个离散时间信号，再用一个离散时间系统将该离散信号处理以后，再把它变换回到连续时间中来。

7.0 引言

❖ **采样（抽样）**：用离散化的一组样本值表示连续函数的过程或方法。

“采样定理”告诉我们：在一定条件下，一个连续时间信号或离散序列均可唯一地用其等间隔的样本值来表示，这种表示是完全和充分的。

7.1 用信号样本表示连续时间信号：采样定理

- ❖ 一般来讲，在没有任何附加条件下或说明下，我们不能指望一个信号都能唯一地由一组等间隔的样本值来表征。例如 $x_1(kT) = x_2(kT) = x_3(kT)$ ，在 T 的整数倍时刻点上，它们有相同的值。

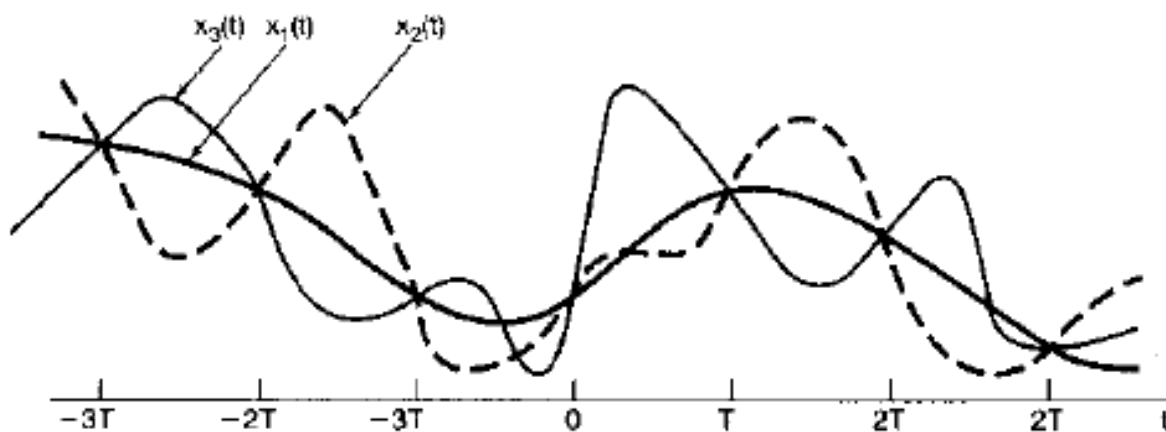
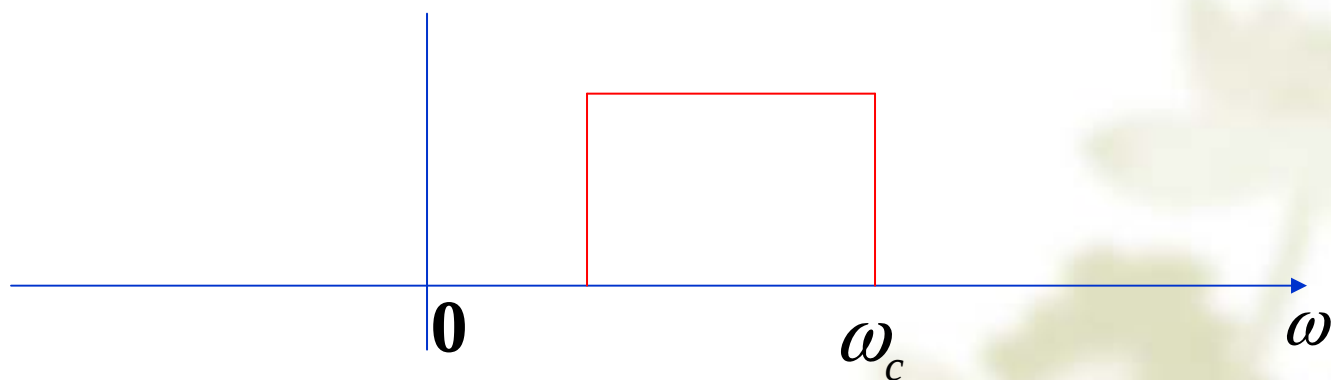


图 7.1 在 T 的整数倍时刻点上具有相同值的三个连续时间信号

- ❖ 很明显，有无限多个信号都可以产生一组给定的样本值。

❖ 然而，将会看到，如果一个信号是带限的（即它的傅里叶变换在某一有限频带以外均为零），并且它的样本取得足够密的话（样本数 $\gg \omega_c$ ，**相对于信号中的最高频率而言**），那么这些样本值就能**唯一地**用来表征这一信号，并且能从这些样本中把信号完全恢复出来。这一结果就是采样定理。



7.1 用信号样本表示连续时间信号：采样定理



？怎样得到一个连续时间
信号 $x(t)$ 的样本值

$$\{x(nT), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$$

答案：冲激串采样。

7.1.1 冲激串采样

❖ 为了建立采样定理，我们需要一种方法来表示一个连续时间信号在均匀间隔上的采样，即通过用一个周期冲激串去乘待采样的连续时间信号 $x(t)$ 。这一方法称为**冲激串采样**。该周期冲激串 $p(t)$ 称为**采样函数**，周期 T 称为**采样周期**，而 $p(t)$ 的基波频率 $\omega_s = 2\pi / T$ 称为**采样频率**。

❖ 在时域中有

$$x_p(t) = p(t)x(t)$$

其中

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$$

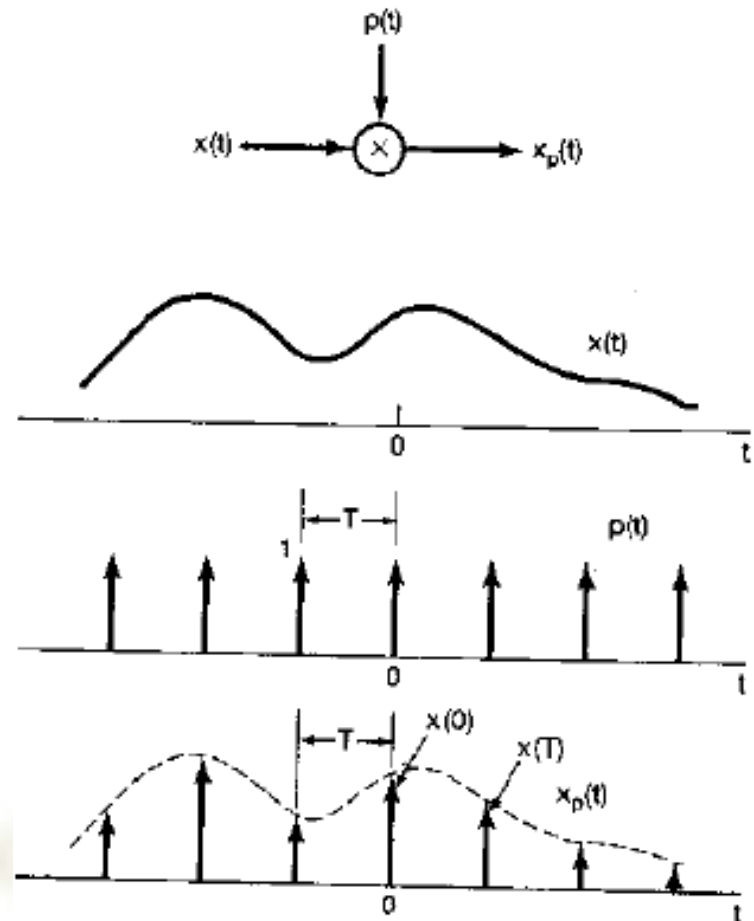


图 7.2 冲激串采样

❖ 由在1.4.2节曾讨论过的单位冲激函数的性质有：

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

于是有

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t-nT)$$

可见 $x_p(t)$ 本身就是一个冲激串，其冲激的幅度等于 $x(t)$ 在以 T 为间隔处的样本值。

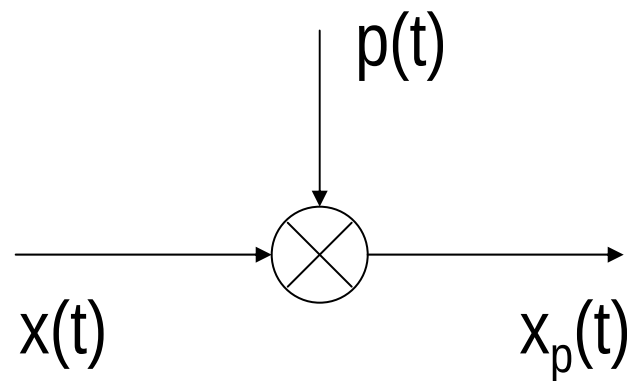
由傅里叶变换的相乘性质知道：

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)]$$

7.1.1 冲激串采样

(1) 采样

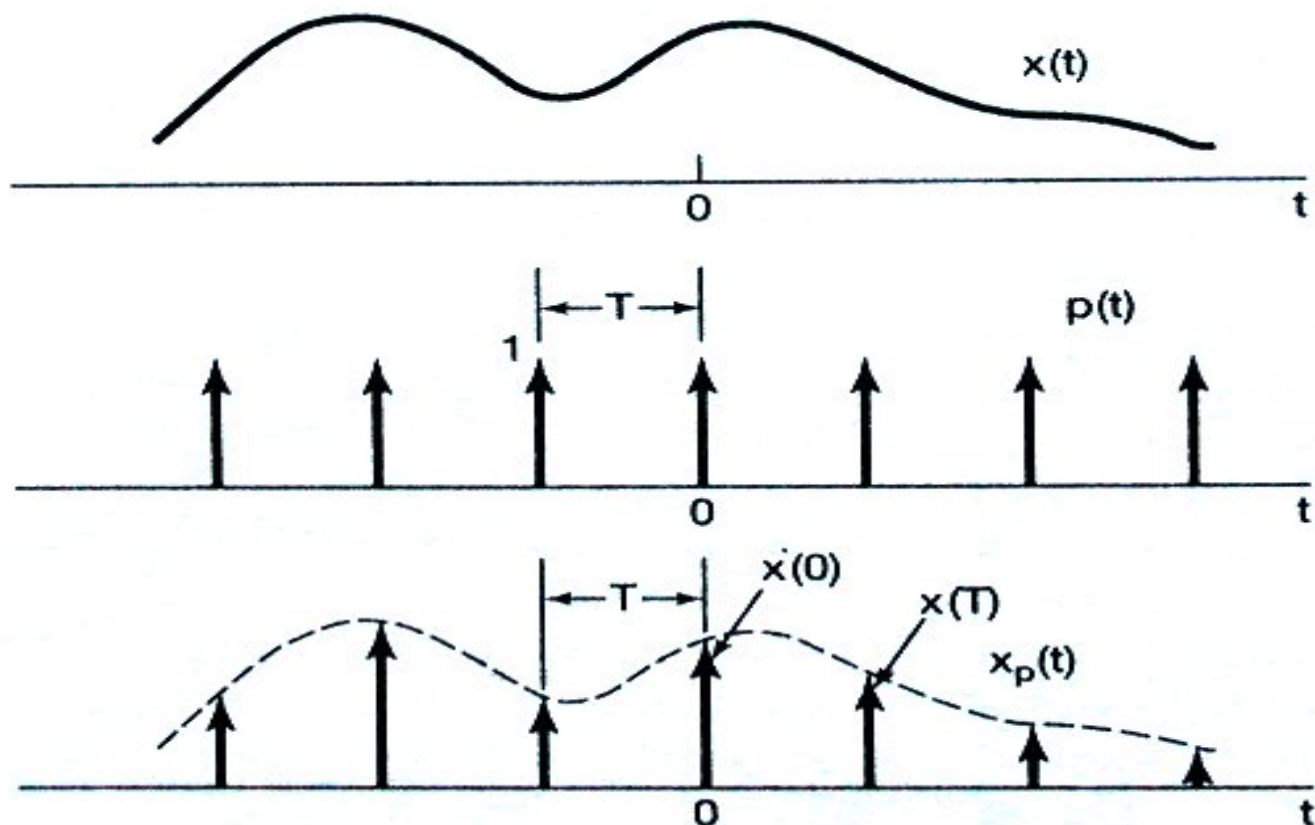
$$\begin{cases} x_p(t) = x(t)p(t) \\ X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] \end{cases}$$



冲激串: $p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT)$

2、在时域中：冲激串采样的时域波形

$$x_d(t) = x(t) \cdot \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT)$$



在时域中很难想象，由这些样本值就能充分表示整个信号！

3、频域中考虑

$$x(t) \xleftrightarrow{FT} X(j\omega)$$

$$p(t) \xleftrightarrow{F.S.} a_k = \frac{1}{T} \quad (\text{周期信号})$$

由例4.8可得

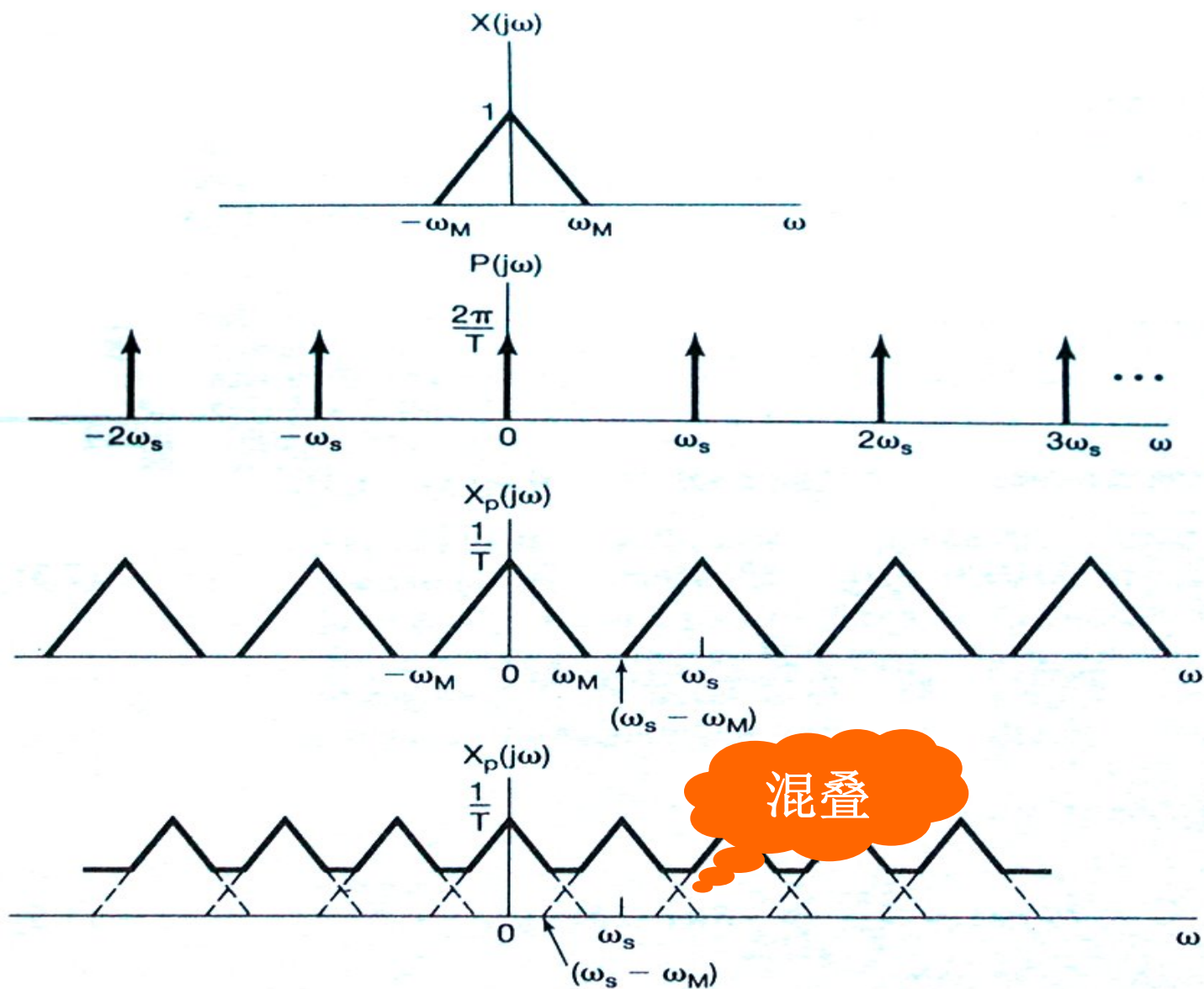
$$p(t) \xleftrightarrow{FT} P(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_s) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{T} \delta(\omega - k\omega_s)$$

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

❖ 而信号与一个单位冲激函数的卷积就是该信号的移位，即 $X(j\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(j(\omega - \omega_0))$ ，于是有

$$\begin{aligned} X_p(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * P(j\omega)] \\ &= \frac{1}{2\pi} [X(j\omega) * \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_s)] \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j\omega) * \delta(\omega - k\omega_s) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

时域采样在频域中的效果



 试问：要使移位的 $X(j\omega)$ 不重叠，应满足什么限制条件？

答：必须满足：

$$\omega_s - \omega_M > \omega_M$$

即：

$$\omega_s > 2\omega_M$$

总结

- ❖ 这就是说, $X_p(j\omega)$ 是频率 ω 的周期函数, 它由一组移位的 $X(j\omega)$ 的叠加所组成, 但在幅度上标以 $1/T$ 的变化。
- ❖ 在图c中, 由于 $\omega_M < \omega_s - \omega_M$ 即 $\omega_s > 2\omega_M$, 因此在互相移位的这些 $X(j\omega)$ 之间, 并无重叠现象出现; 而在图d中, 由于 $\omega_s < 2\omega_M$, 从而存在重叠。

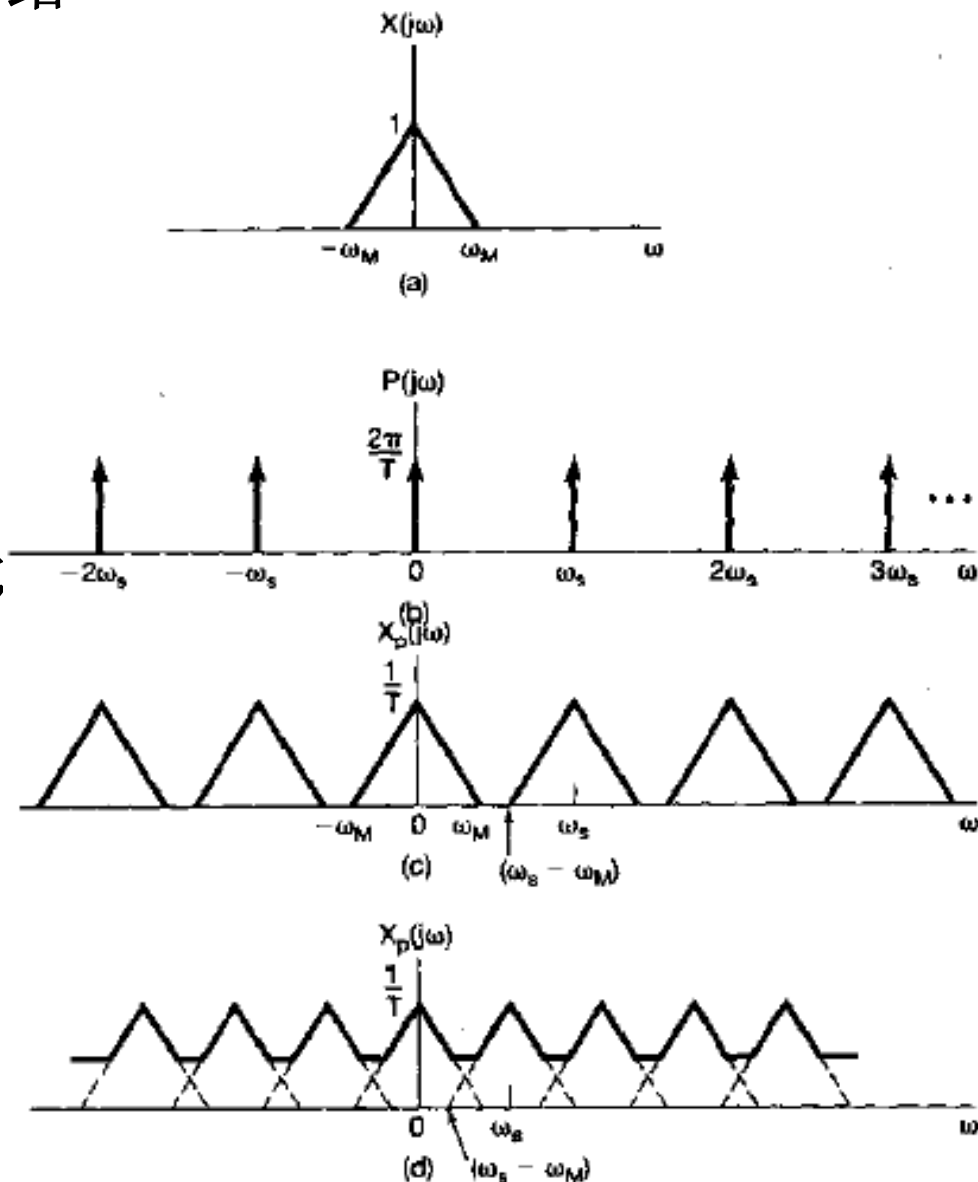
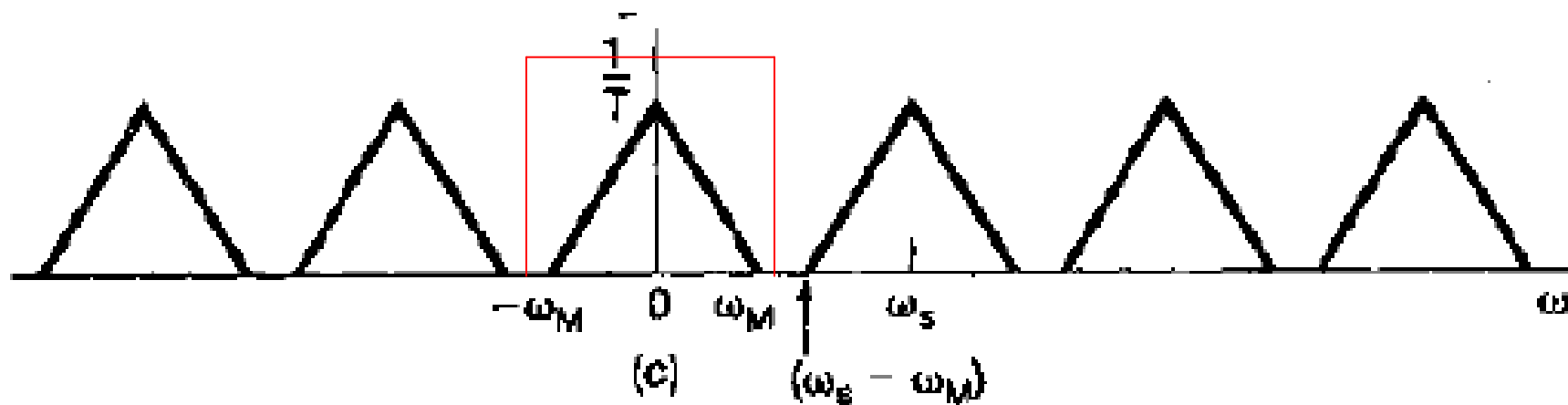


图 7.3 时域采样在频域中的效果:

(a)原始信号频谱; (b)采样函数的频谱;

(c) $\omega_s > 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱; (d) $\omega_s < 2\omega_M$ 时已采样信号的频谱

- ❖ 对于图c的情况, $X(j\omega)$ 如实地在采样频率的整数倍上重现, 因而, 如果 $\omega_s > 2\omega_M$, $x(t)$ 就能完全用一个低通滤波器从 $x_p(t)$ 中恢复出来。该低通滤波器的增益为 T , 截止频率大于 ω_M , 但小于 $\omega_s - \omega_M$ 。



- ❖ 在采样定理中, 采样频率必须大于 $2\omega_M$, 该频率 $2\omega_M$ 一般被称为奈奎斯特率。

4、采样定理

设 $x(t)$ 是某一个带限信号，即

$$x(t) \xleftrightarrow{CTFT} X(j\omega),$$

且

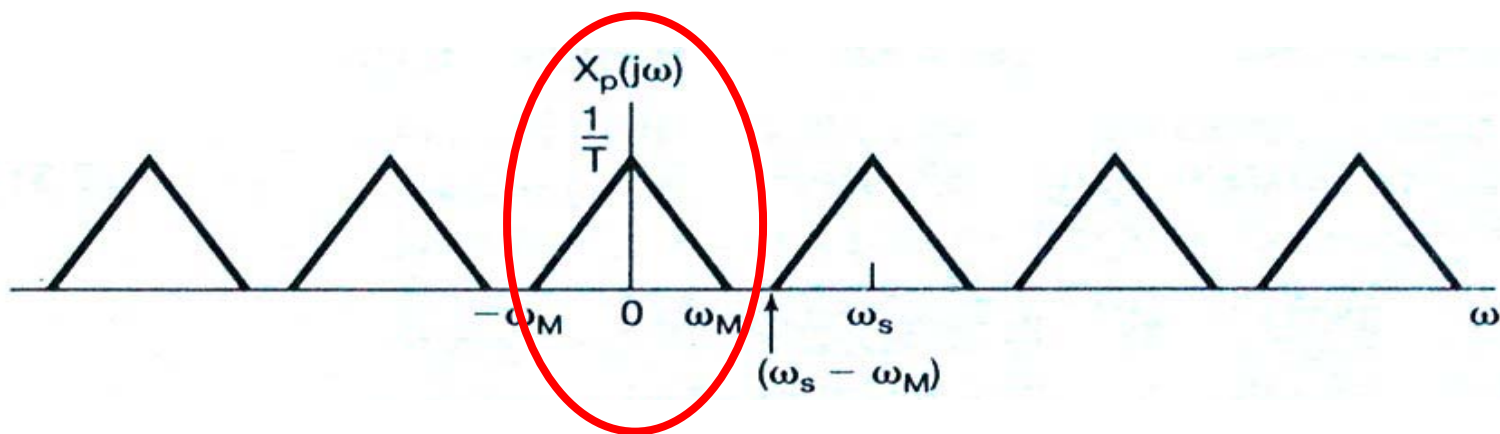
$$X(j\omega) = 0, |\omega| > \omega_M$$

如果抽样间隔 T 满足：

$$T \leq \frac{\pi}{\omega_M} \quad \text{or,} \quad \omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_M$$

ω_M 为信号最高频率。则 $x(t)$ 就唯一地由其样本值 $\{x(nT_s), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 所确定。

5、从样本中恢复一个连续时间信号（Recovery）

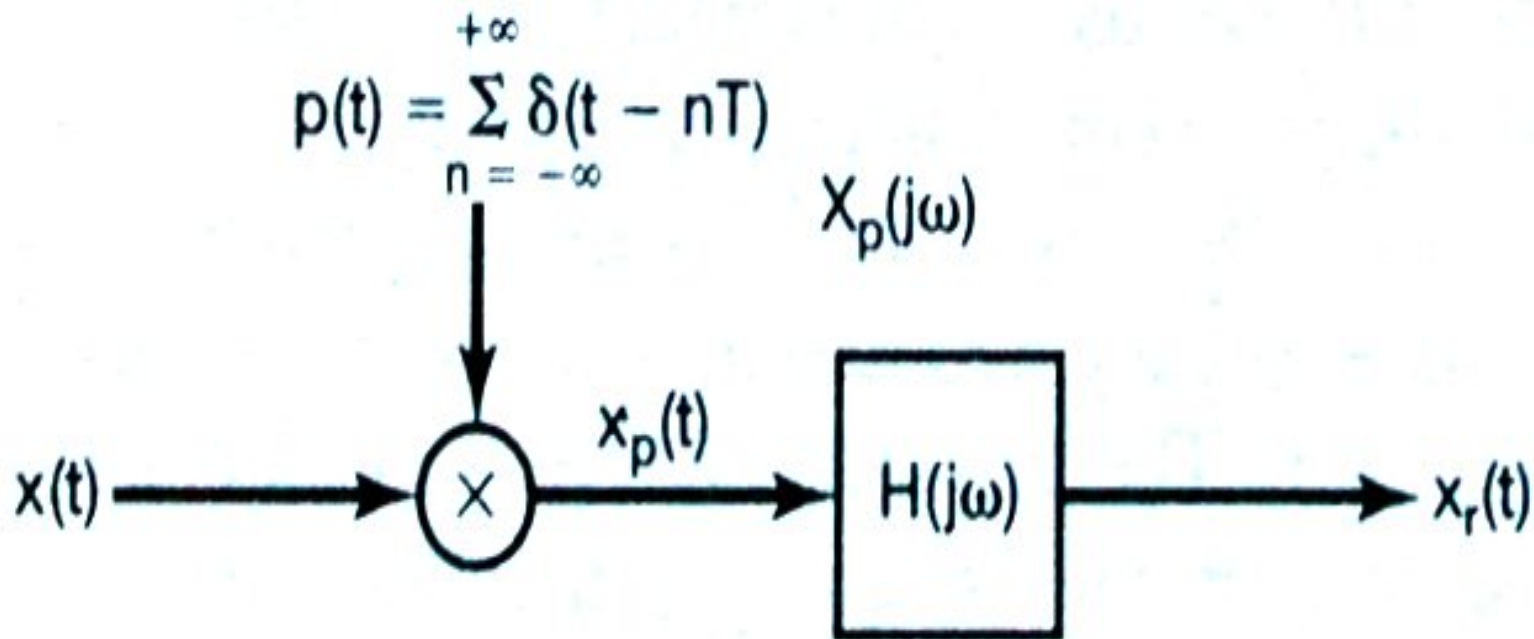


❖ 满足采样定理的条件

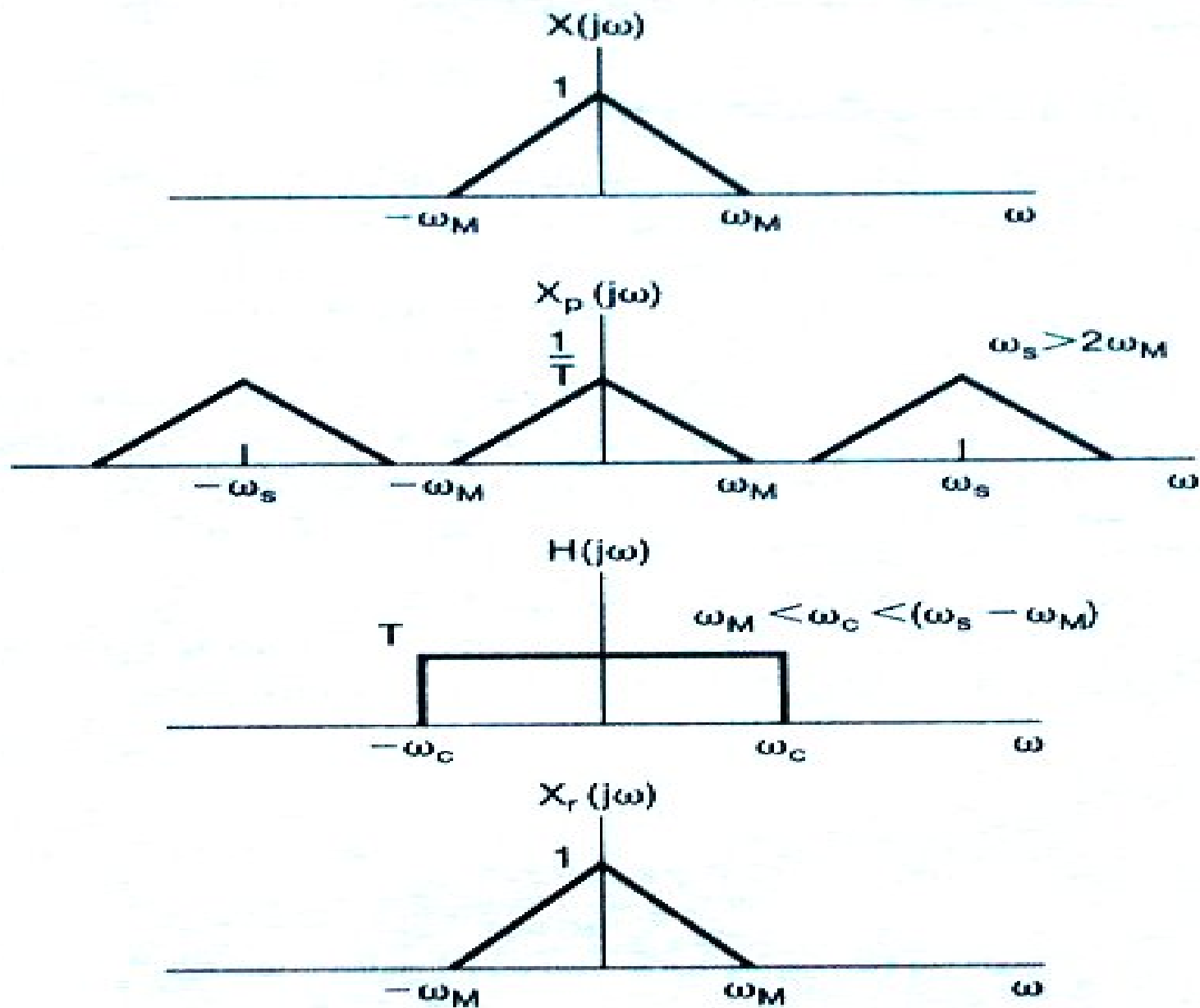
❖ 低通滤波器

$$H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases}, \quad \omega_M < \omega_c < \omega_s - \omega_M$$

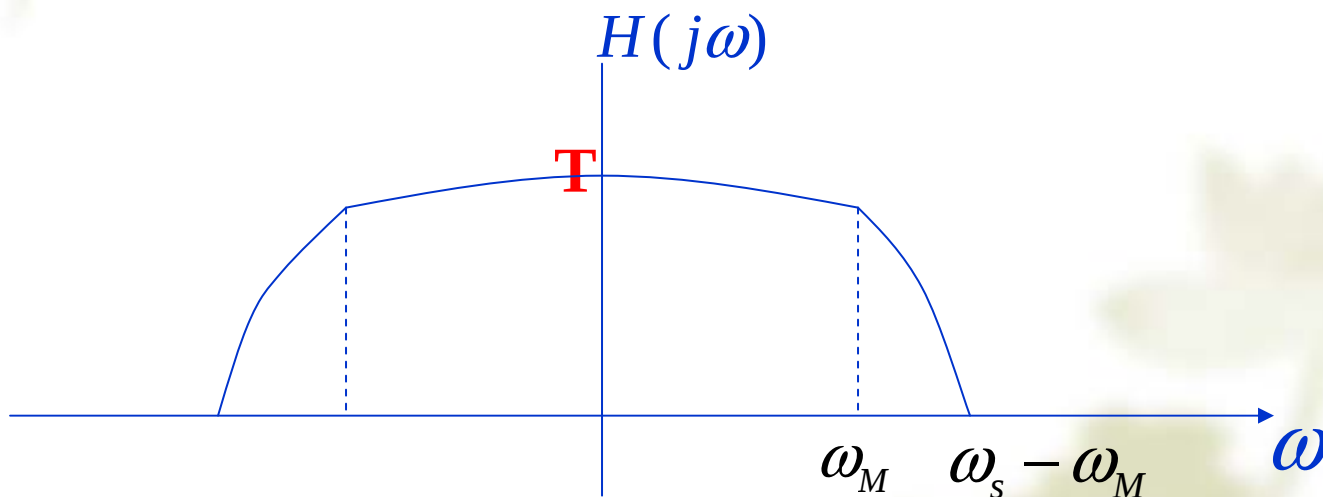
6、采样与恢复系统



系统的采样与重建



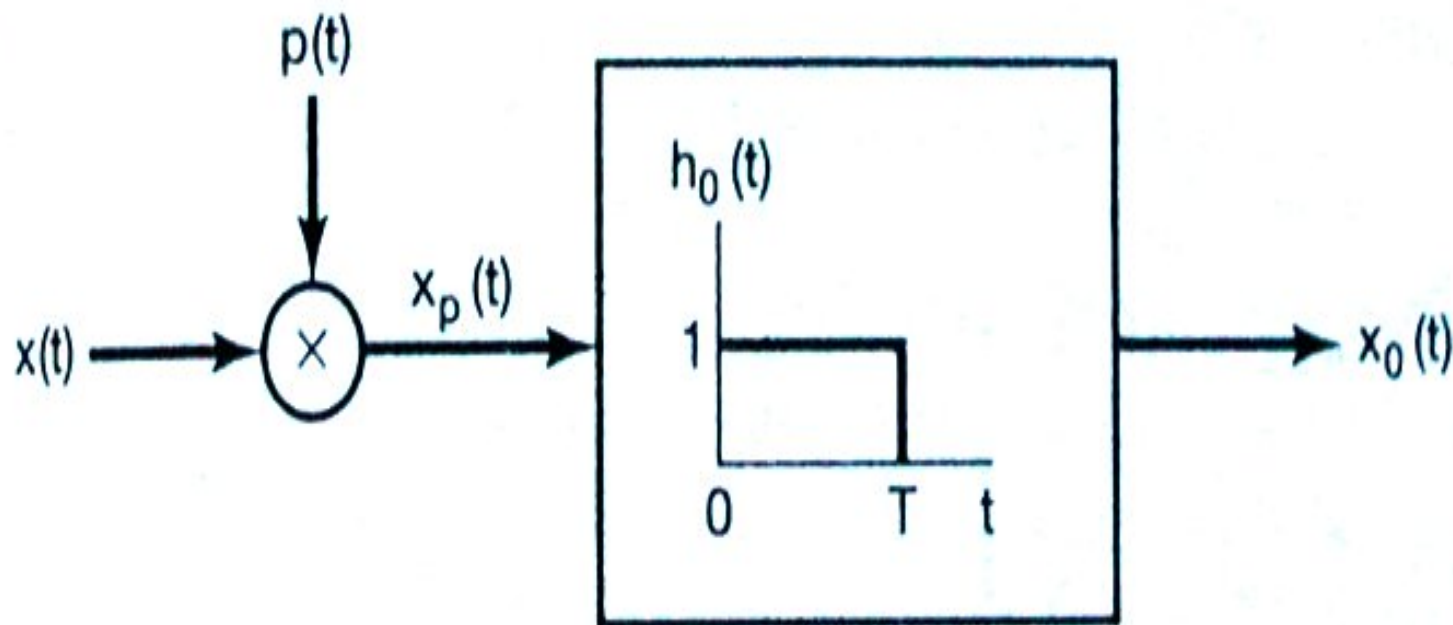
❖ 正如第6章所讨论的，在实际应用中，理想低通滤波器都是被一个非理想滤波器 $H(j\omega)$ 所代替，该 $H(j\omega)$ 对于所关心的问题来说已足够准确地近似于所要求的频率特性，即当 $|\omega| < \omega_M, H(j\omega) \approx T, |\omega| > \omega_s - \omega_M, H(j\omega) \approx 0$



- ❖ 从已采样信号中恢复原信号所允许的最低采样频率等于 $2\omega_M$ ，称为**奈奎斯特 (Nyquist) 频率**
- ✓ 以 $\omega_s = 2\omega_M$ 进行采样，称为**临界采样**
- ✓ 以 $\omega_s > 2\omega_M$ 进行采样，称为**过采样**
(Oversampling)
- ✓ 以 $\omega_s < 2\omega_M$ 进行采样，称为**欠采样**
(Undersampling)

7.1.2 零阶保持采样

(1) 采样系统结构



❖ 从已采样信号中恢复原信号所允许的最低采样频率等于 $2 \omega_M$ ，称为奈奎斯特（Nyquist）频率。

以 $\omega_s = 2 \omega_M$ 进行采样，称为临界采样。

以 $\omega_s > 2 \omega_M$ 进行采样，称为过采样（Oversampling）。

以 $\omega_s < 2 \omega_M$ 进行采样，称为欠采样（Undersampling）。

7.1.2 零阶保持采样

- ❖ 利用冲激串采样存在这样一个问题，即实际上对于产生和传输窄而幅度大的脉冲（这就很近似于冲激）都是相当困难的。因此以所谓**零阶保持**的方式来产生采样信号往往更方便些。
- ❖ 在一个给定的瞬时对 $x(t)$ 采样，并保持这一样本值直到下一个样本被采到为止。



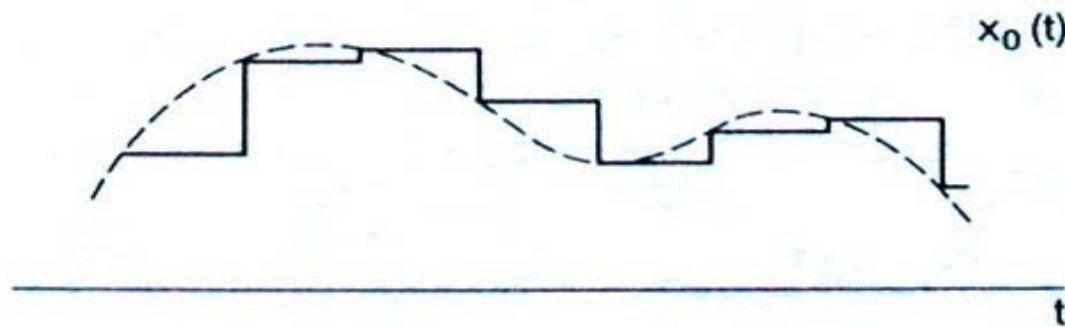
图 7.5 利用零阶保持采样

- ❖ 由一个零阶保持系统的输出来重建 $x(t)$ 仍然可以用低通滤波的办法来实现。但是，这一情况下，所要求的滤波器特性不再是在通带内具有恒定的增益。

7.1.2 零阶保持采样

❖ (1) 零阶保持系统:

在给定的等间隔时刻对 $x(t)$ 采样，并保持这一样本值直到下一个采样时刻为止



❖ 为了求得所要求的滤波器特性，首先注意到这个零阶保持的输出 $x_0(t)$ 在原理上可以用冲激串采样，再紧跟着一个LTI系统（该系统具有短形的单位冲激响应）来得到。

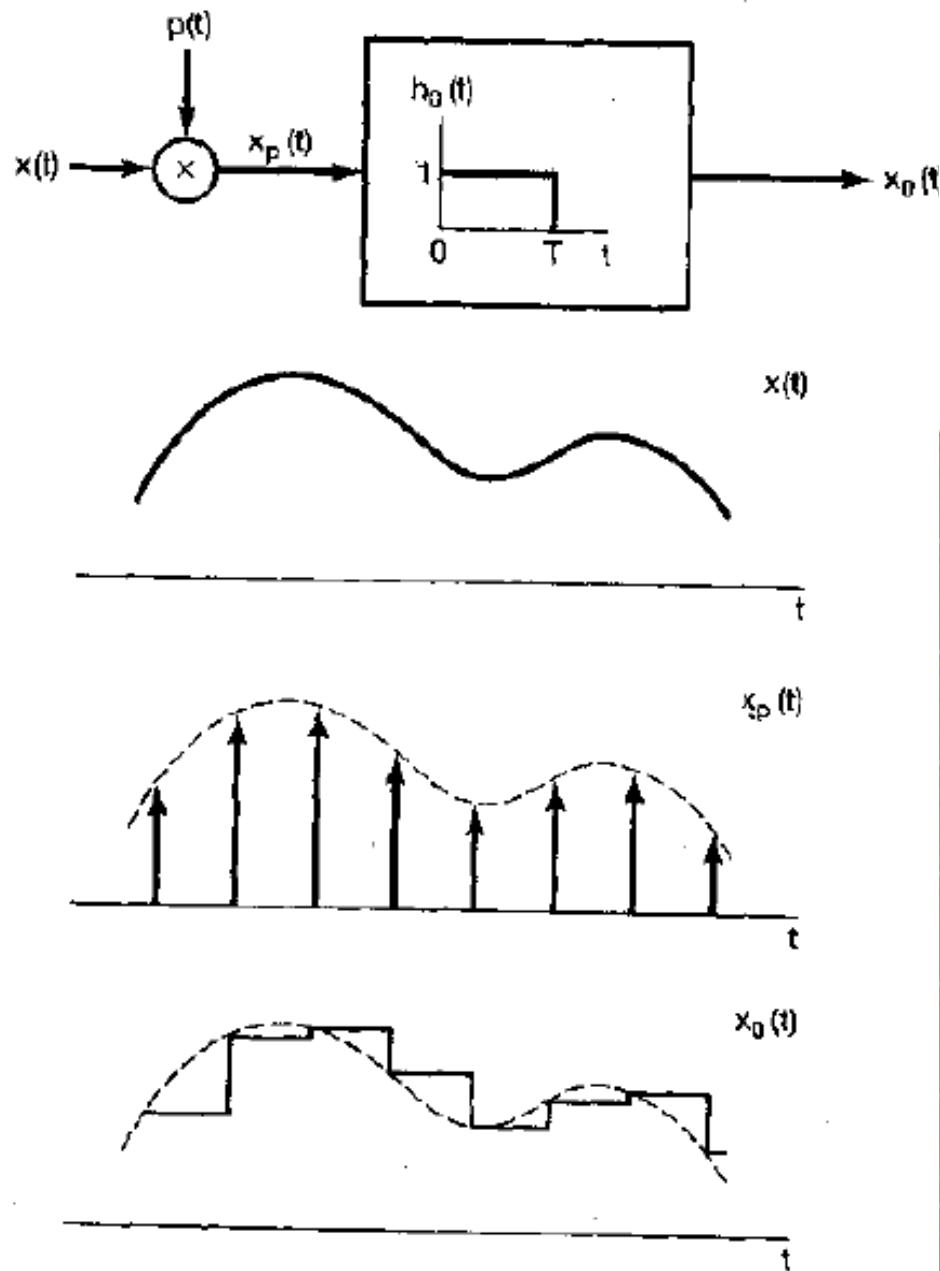
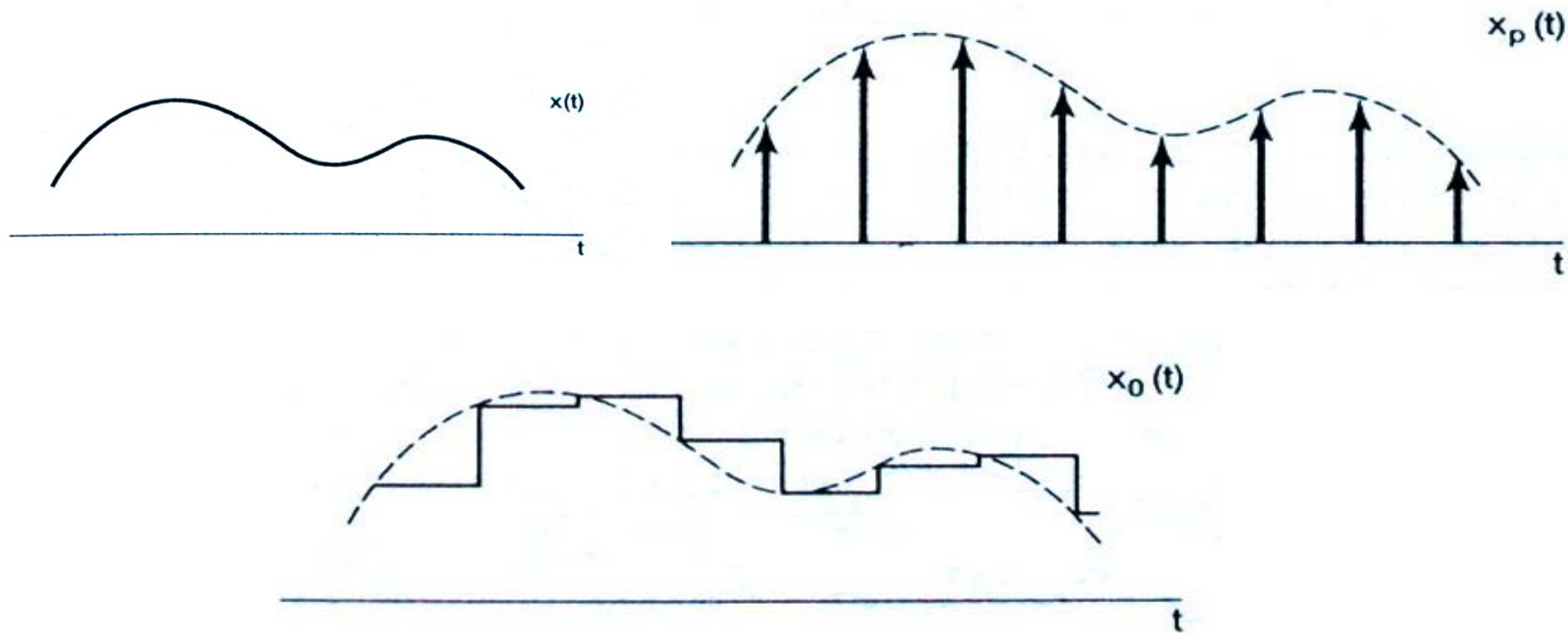
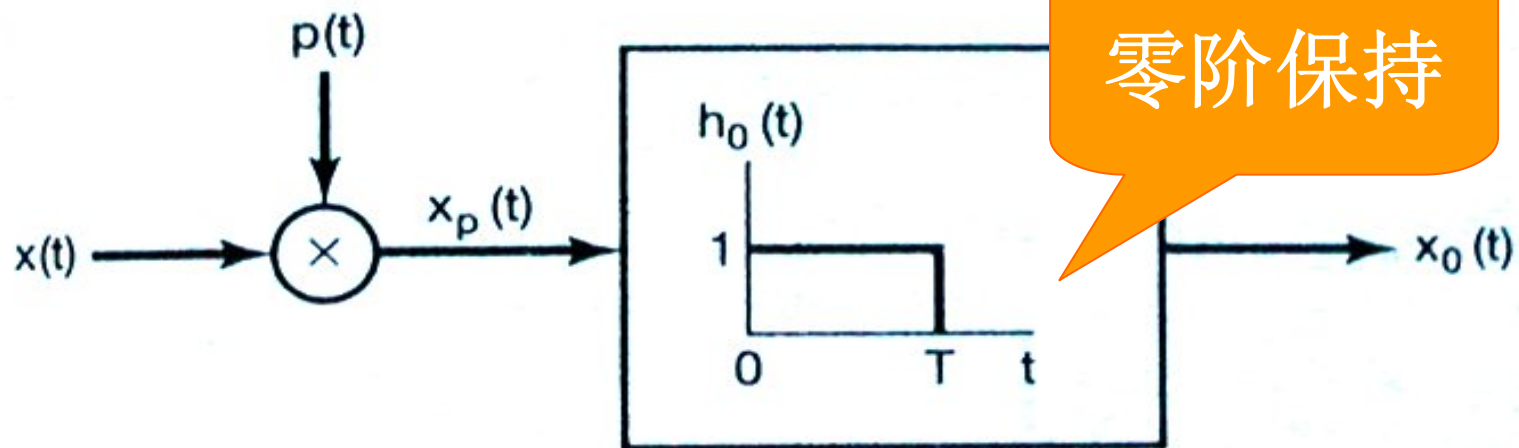
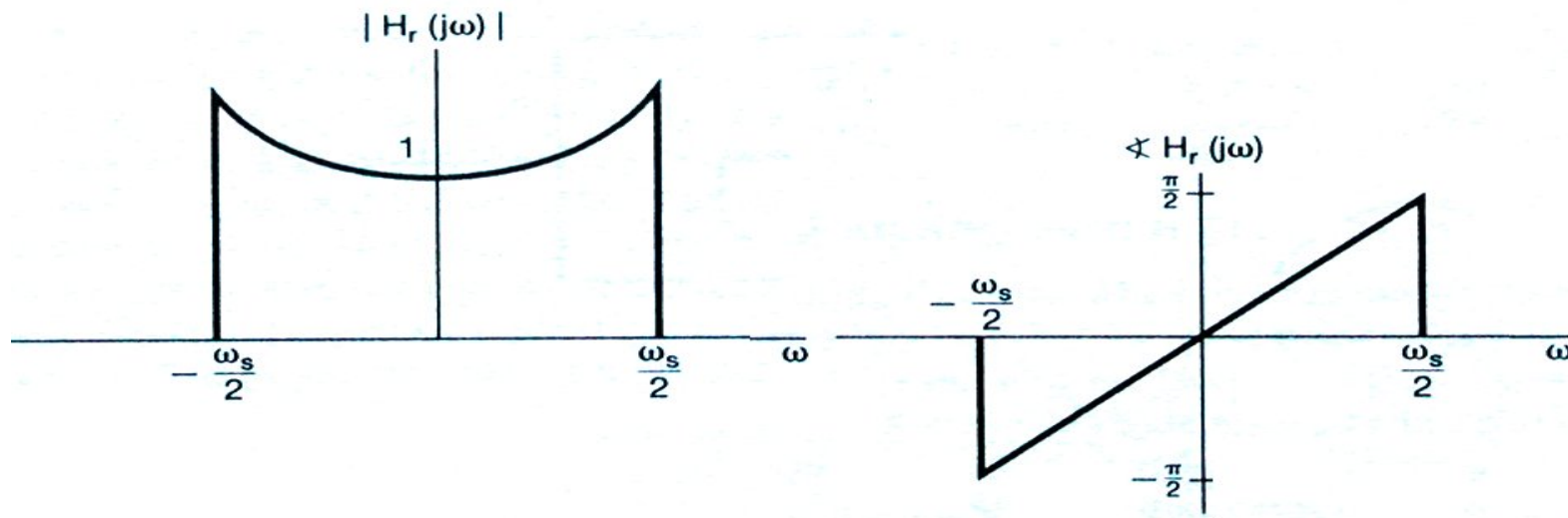
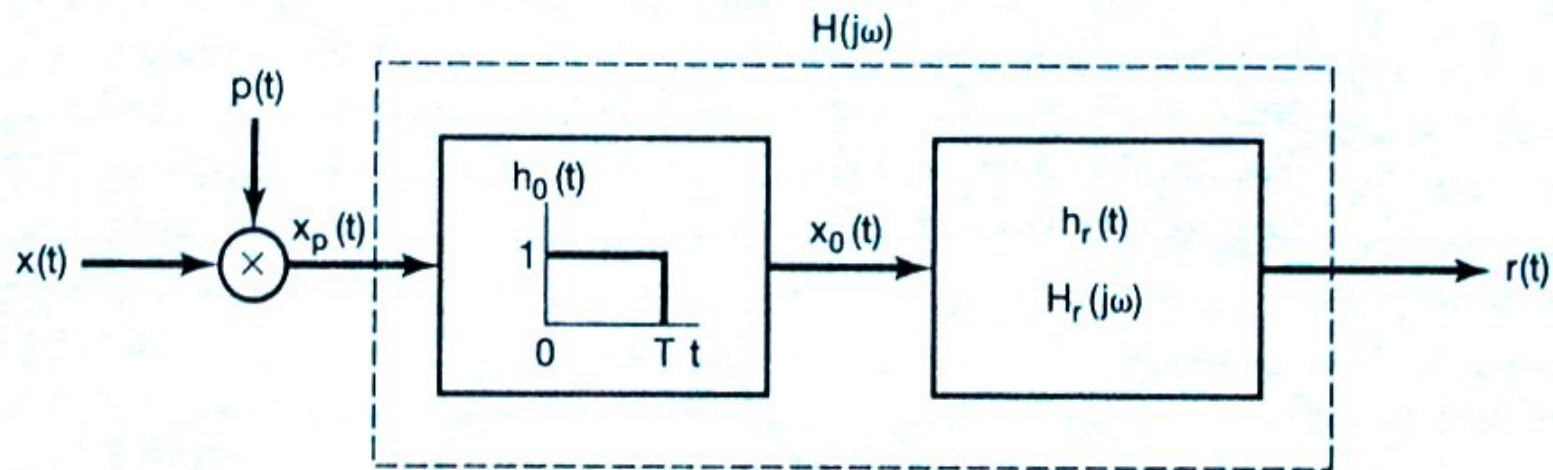


图 7.6 作为冲激串采样,再紧跟一个具有矩形单位冲激响应的 LTI 系统的零阶保持



信号恢复



- ❖ 为了由 $x_0(t)$ 重建 $x(t)$ ，考虑用一个单位冲激响应 $h_r(t)$ ，频率响应为 $H_r(j\omega)$ 的LTI系统来处理 $x_0(t)$ 。这个系统与图7.6的系统级联（级联系统的总频率响应是各分系统频率响应的乘积），如图6.7

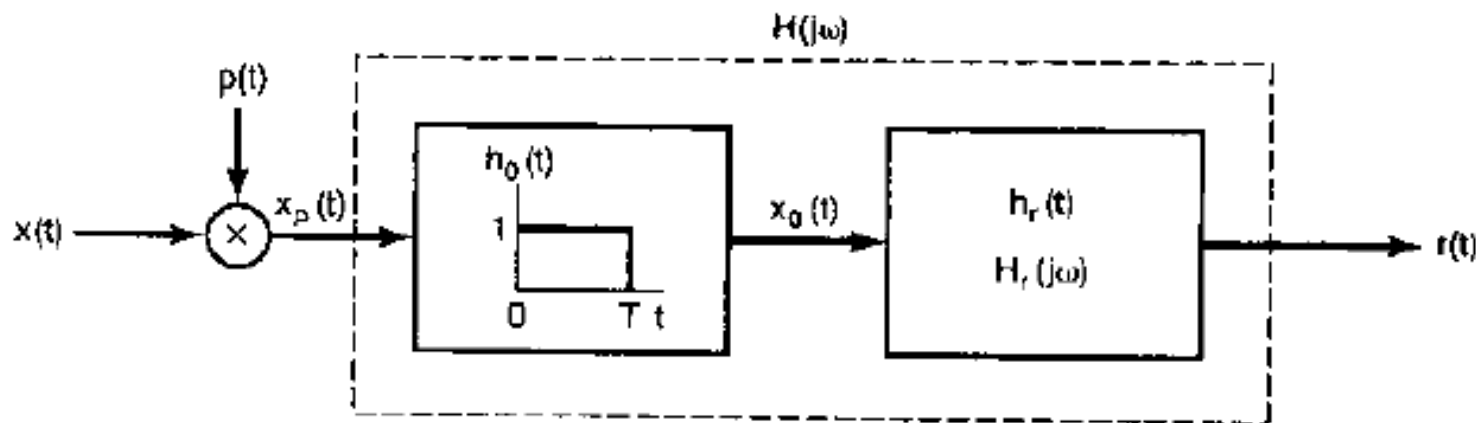


图 7.7 零阶保持(图 7.6)与一个重建滤波器的级联

- ❖ 在这里，我们希望给出一个 $H_r(j\omega)$ ，以使得 $r(t)=x(t)$ 。如果 $h_0(t)$ 和 $h_r(t)$ 级联后的特性是图7.4中所用的理想低通滤波器 $H(j\omega)$ 的特性的话，那么 $r(t)=x(t)$ 。

❖ 根据例4.4和4.3.2节傅里叶变换的时移性质，有

$$H_0(j\omega) = e^{-j\omega T/2} \left[\frac{2 \sin(\omega T / 2)}{\omega} \right]$$

❖ 这就要求

$$H_r(j\omega) = \frac{e^{j\omega T/2} H(j\omega)}{\frac{2 \sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}}$$

❖ 例如，若 $H(j\omega)$ 的截止频率等于 $\omega_s / 2$ ，则在零阶保持系统后面的重建滤波器的理想模和相位特性如图所示：

$$H(j\omega) = \begin{cases} T, & |\omega| < \omega_s / 2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s / 2 \end{cases}$$

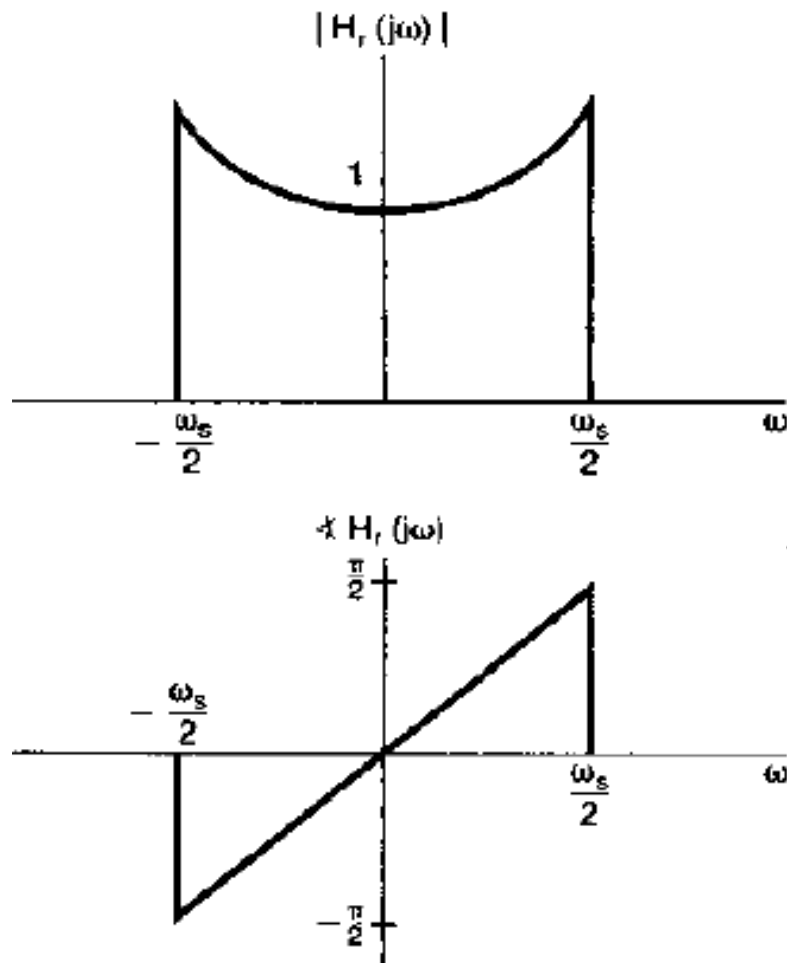
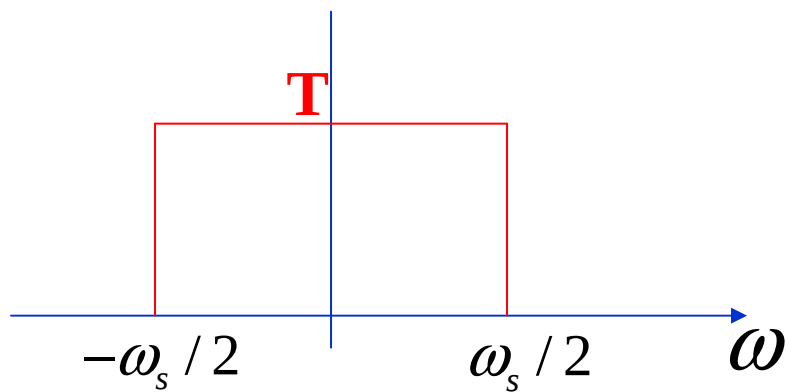


图 7.8 为零阶保持采样重建信号的重建滤波器的模和相位特性

7.2 利用内插由样本重建信号

- ❖ 内插：就是用一连续信号对一组样本值的拟和，也就是说用样本值来重建某一函数的过程。
- ❖ 线性内插：就是将相邻的样本点用直线连接起来。

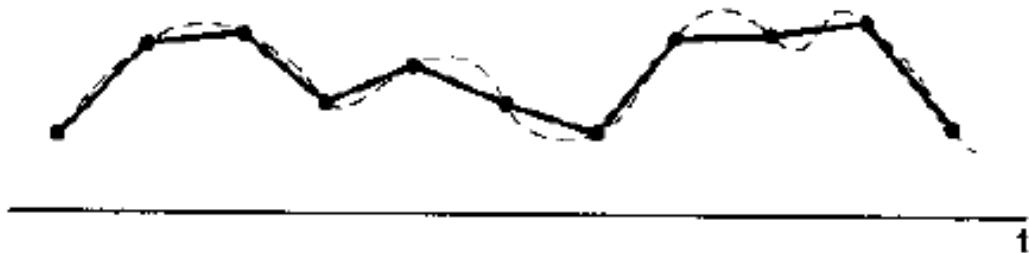


图 7.9 样本点之间的线性内插。
虚线代表原始信号,实线就是线性内插

- ❖ 更为复杂的内插公式，样本点之间用高阶多项式或其他数学函数来进行拟和。

- ❖ 在7.1节已知，一个带限信号，如果采样足够密的话，那么信号就能完全被恢复。这就是说，通过应用一个低通滤波器在样本点之间的真正内插就可以实现。
- ❖ 考虑图7.4中该低通滤波器的在时域中的效果

输出：

$$H(j\omega) \xrightarrow{F^{-1}} h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi \omega_c t}$$

内插函数

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t)$$

$$= \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \delta(t - nT) \right] * h(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) h(t - nT)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT) \frac{\omega_c T}{\pi} \frac{\sin(\omega_c (t - nT))}{\omega_c (t - nT)}$$

❖ 在 $\omega_c = \omega_s / 2$ 时的重建信号过程

❖ 这种利用理想低通滤波器的单位冲激响应的内插通常称为**带限内插**。因为这种内插，只要 $x(t)$ 是带限的，而采样频率又满足采样定理中的条件，就实现了信号的**真正重建**。

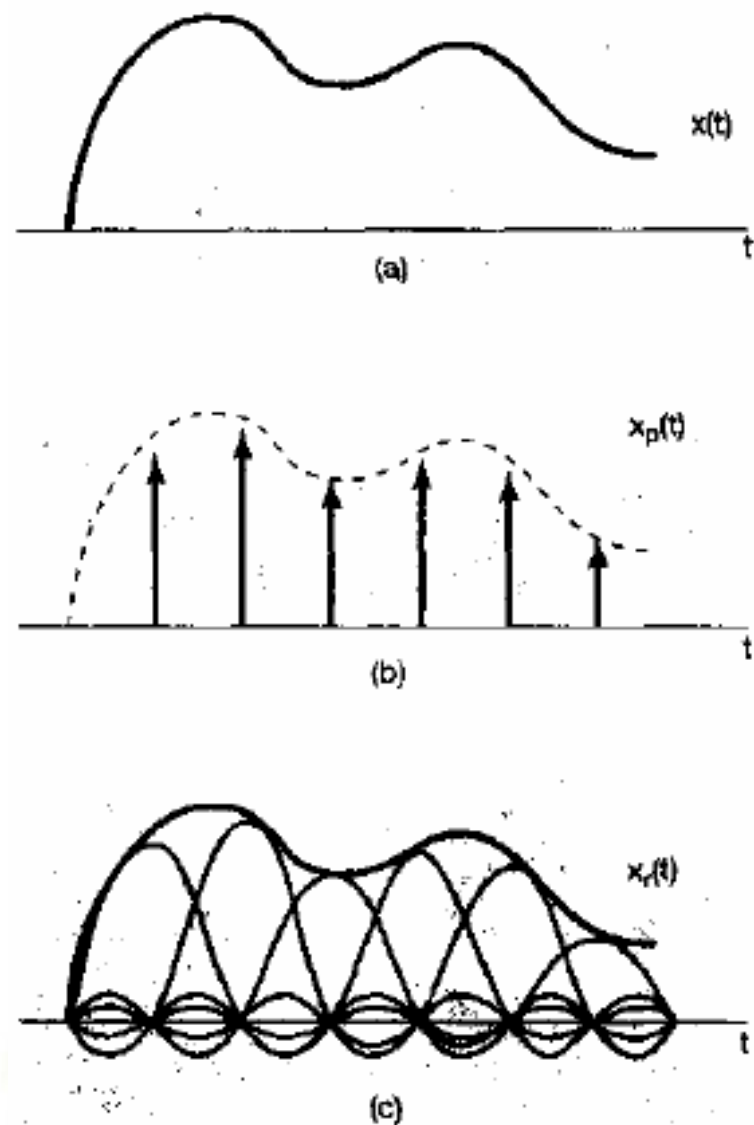


图 7.10 利用 sinc 函数的理想带限内插：
 (a) 带限信号 $x(t)$ ；
 (b) $x(t)$ 的样本冲激串
 (c) 用 (7.11) 式的 sinc 函数的叠加取代冲激串的理想带限内插

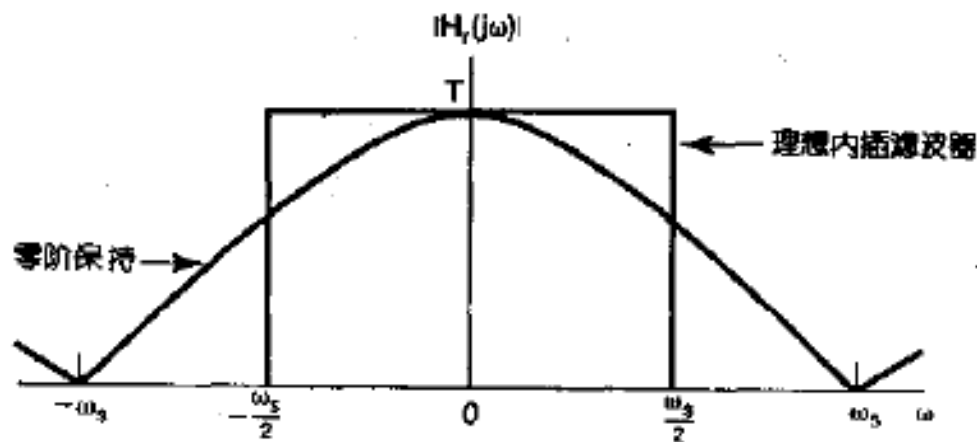
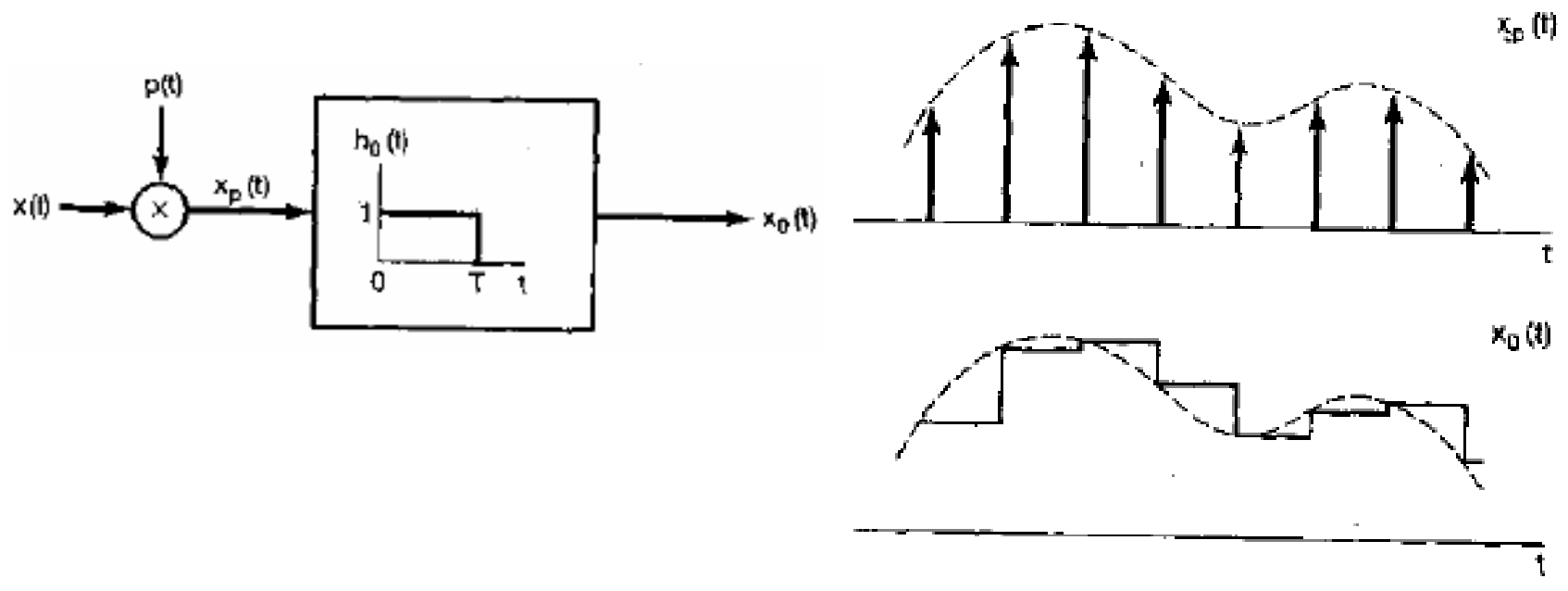


图 7.11 零阶保持和理想内插滤波器的传输函数

- ❖ 实际中，往往设计的都是准确性差一点，但简单一些的滤波器，或者说简单些的内插函数。例如上节讲的零阶保持，就可以看作是在样本值之间进行内插的一种形式，其内插函数就是图7.6所示的单位冲激响应 $h_0(t)$ 。显然此时的输出 $x_0(t)$ 是对原信号 $x(t)$ 近似。



❖ 尽管零阶保持是一种很粗糙的近似，但在某些情况下这已经是足够了。

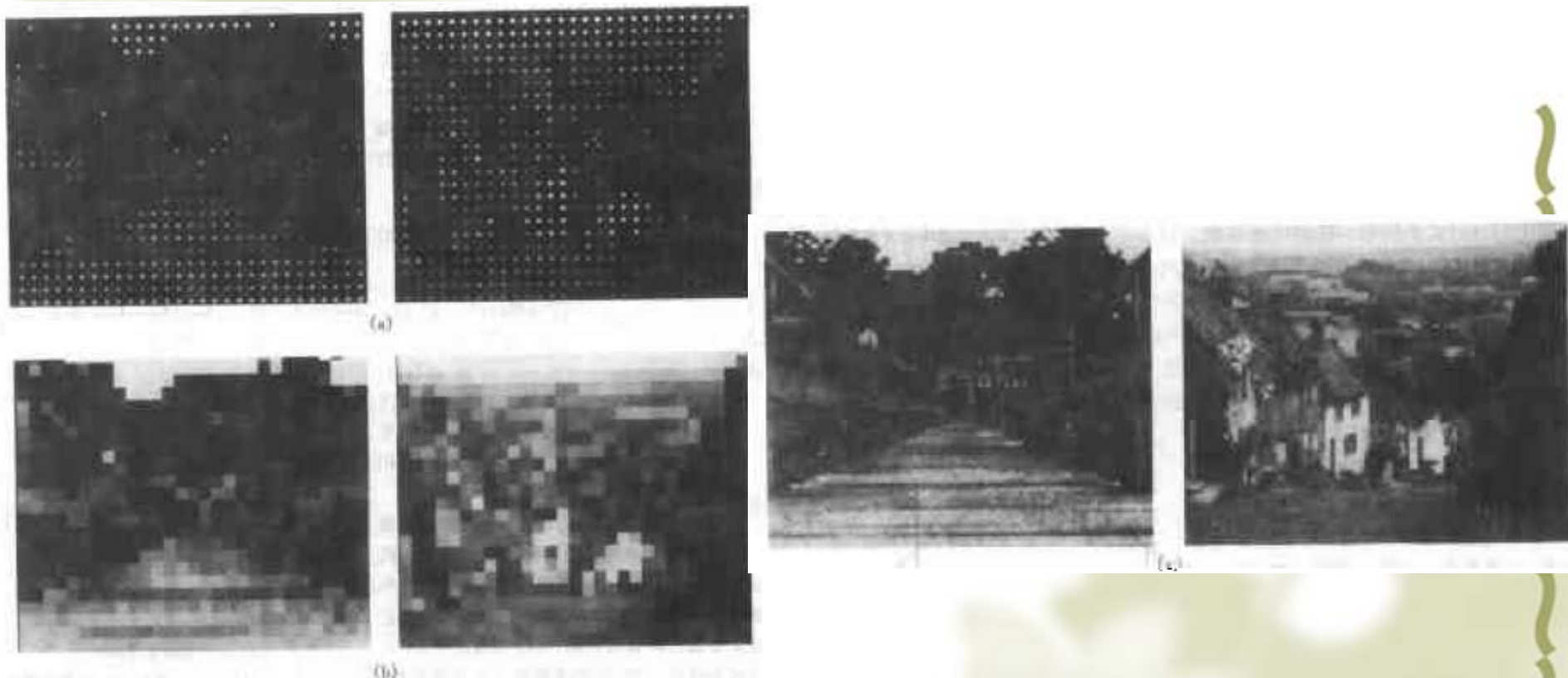


图 7.12 (a)将图 6.2(a)和(g)的照片冲激串采样的结果；

(b)对图(a)施加零阶保持滤波。由于人的视觉系统具有固有的低通过滤作用，其截止频率随距离而减小，因此当从远距离观察时。图 7.12(b)中镶嵌的不连续处受到平滑；

(c)水平和垂直方向采样间隔都只是图 7.12(a)和(b)时的 $1/4$ ①，仍用零阶保持过滤的结果

- ❖ 如果由零阶保持所给出的粗糙内插不够满意，可以使用各种更为平滑的内插手段，其中的一些合起来统称为**高阶内插**。
- ❖ 特别是零阶保持产生如图7.5所示的输出信号是不连续的：



图 7.5 利用零阶保持采样

- ❖ 而与此相比，线性内插产生的恢复信号是连续的。然而由于在各样本点上斜率的改变而导致导数是不连续的。

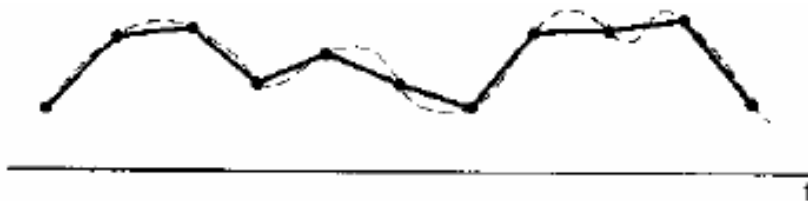
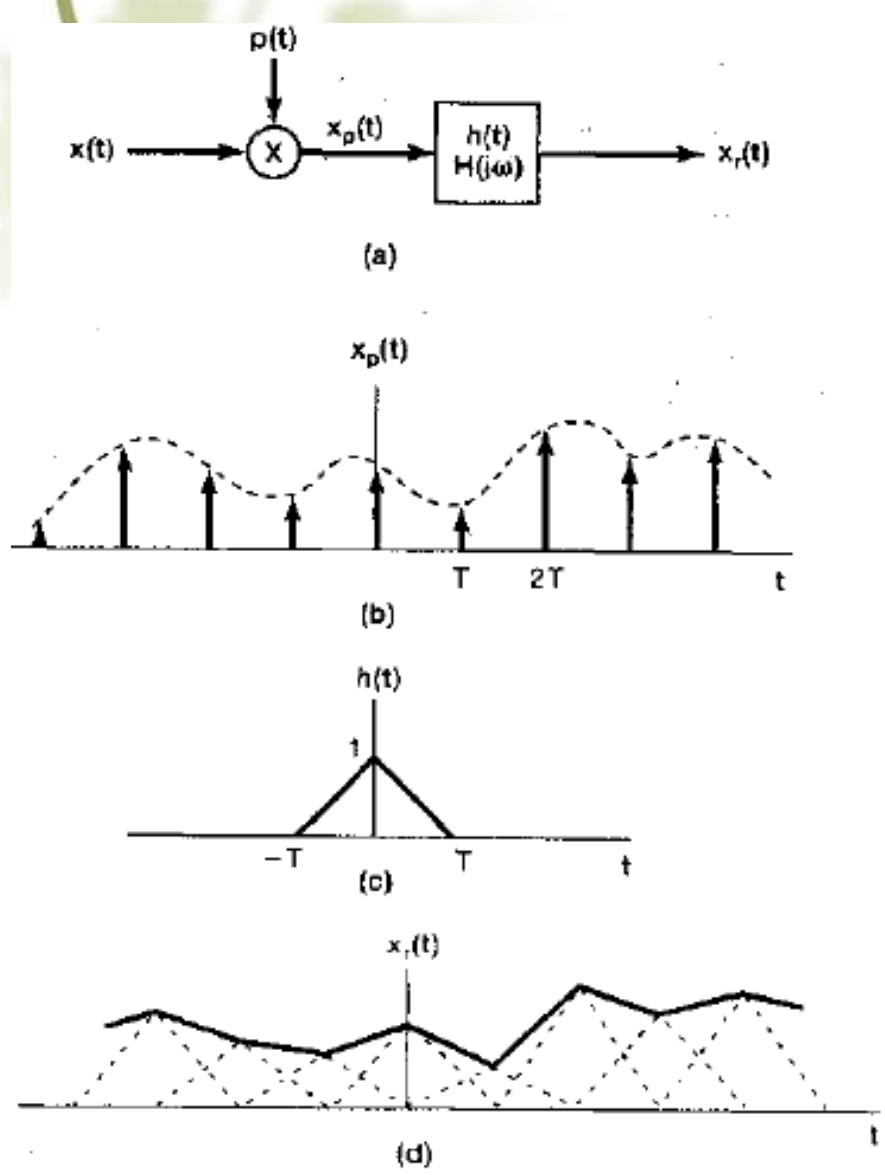


图 7.9 样本点之间的线性内插。
虚线代表原始信号,实线就是线性内插

❖ 线性内插，也称为一阶保持，其 $h(t)$ 为三角形特性。



$$H(j\omega) = \frac{1}{T} \left[\frac{\sin(\omega T / 2)}{\omega / 2} \right]^2$$

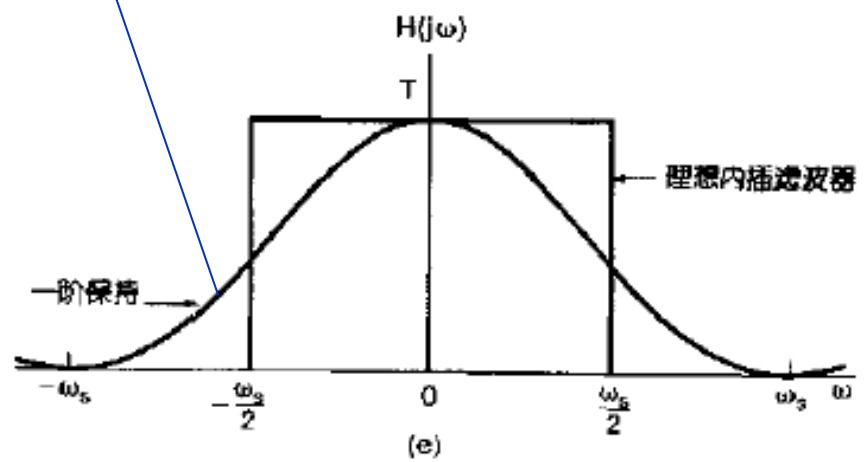


图 7.13 把线性内插(一阶保持)看作冲激串采样与三角形冲激响应特性卷积的结果：
 (a)采样与恢复系统；(b)冲激串采样；
 (c)一阶保持的单位冲激响应；
 (d)对已采样信号施加一阶保持；
 (e)理想内插和一阶保持传输函数的比较



图 7.14 在水平和垂直方向采样间隔都是图 7.12(a)和(b)所用的采样间隔的 $1/4$ 时的冲激串采样,再用一阶保持内插的结果

- 当然，也可以定义二阶或高阶保持系统，它们所恢复的信号具有更好的平滑度。例如二阶保持系统的输出在样本值间的内插可以给出**连续的曲线**。

7.3 欠采样的效果：混叠现象

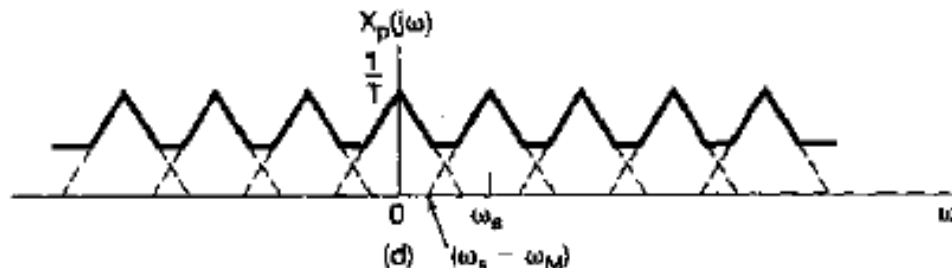
❖ 混叠现象：当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时，式（7.6）中的 $X(j\omega)$ 和它的像产生重叠，将**绝无可能**无失真地恢复或重建原信号。



7.3 欠采样的效果：混叠现象

- ❖ 当 $\omega_s < 2\omega_M$ 时，在7.6式中那些单个项发生重叠，这一现象称为混叠。

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(j(\omega - k\omega_s))$$



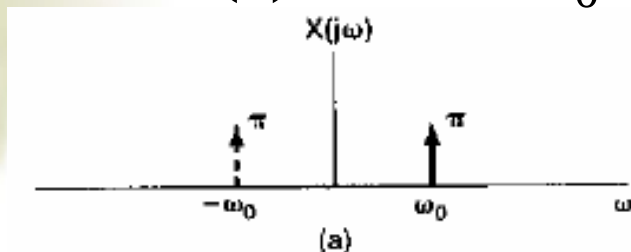
- ❖ 现在，这种情况下，即使用带限内插得到的恢复信号 $x_r(t)$ 也不会等于 $x(t)$ 。但是，原始信号 $x(t)$ 与 $x_r(t)$ 在那些采样瞬间总是相等的，即对任意选取的 ω_s ，都有

$$x_r(nT) = x(nT), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

❖ 以正弦信号为例，讨论 $\omega_s < 2\omega_M$ 时的情况

$$x(t) = \cos \omega_0 t$$

其频谱：



❖ 我们讨论对一个固定的采样频率 ω_s 来说，当 ω_0 改变后对 $X_p(j\omega)$ 所产生的影响。低通滤波器的通带是 $\omega_c = \omega_s / 2$

$$(a) \quad \omega_0 = \frac{\omega_s}{6};$$

$$x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$$

$$(b) \quad \omega_0 = \frac{2\omega_s}{6};$$

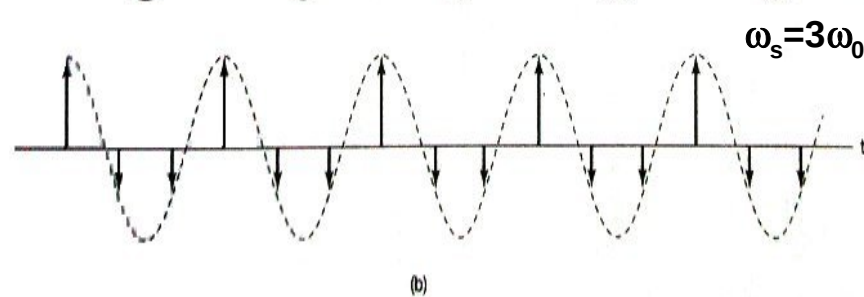
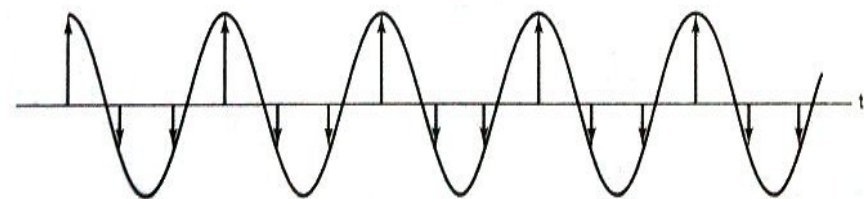
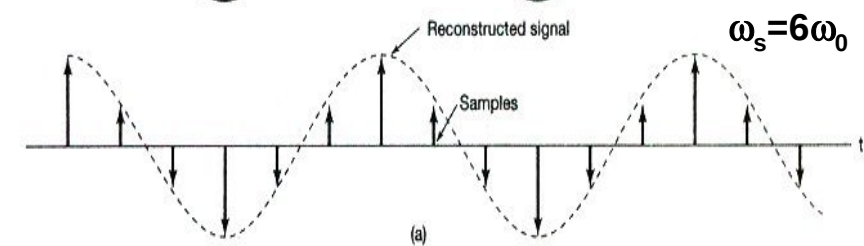
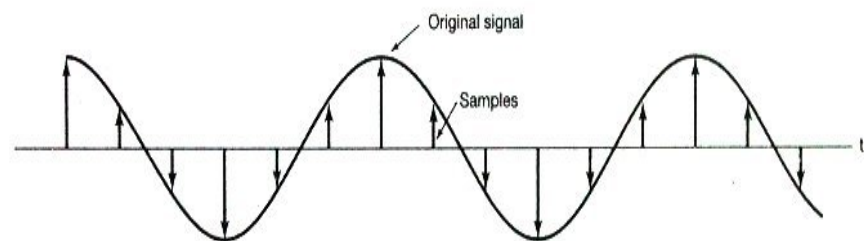
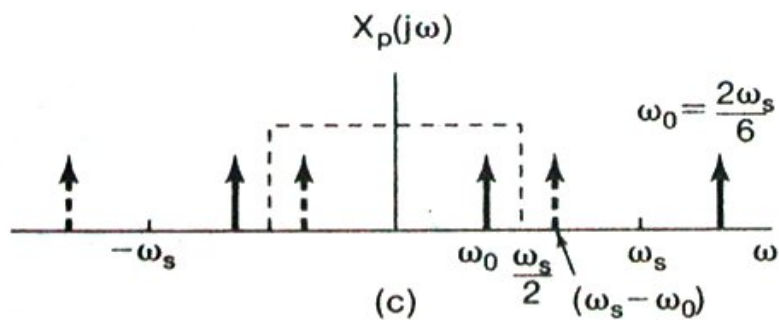
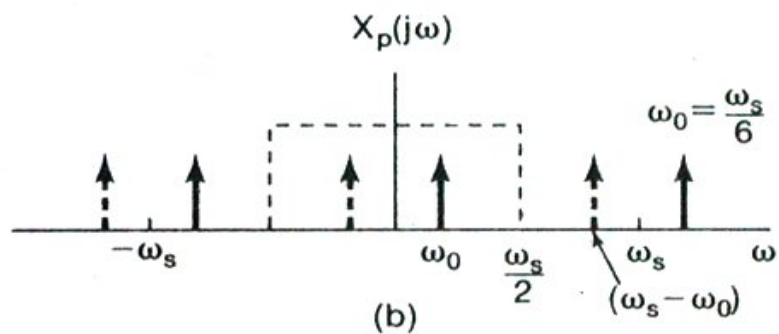
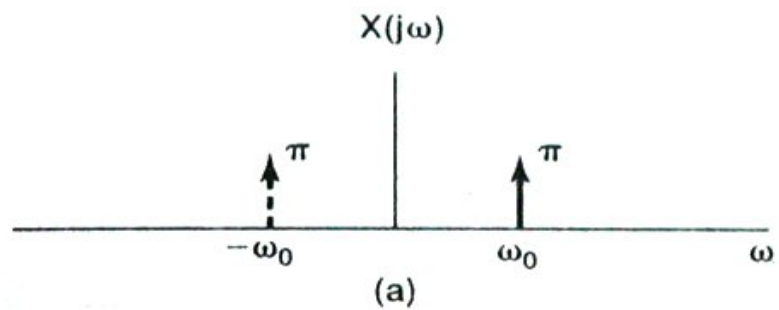
$$x_r(t) = \cos \omega_0 t = x(t)$$

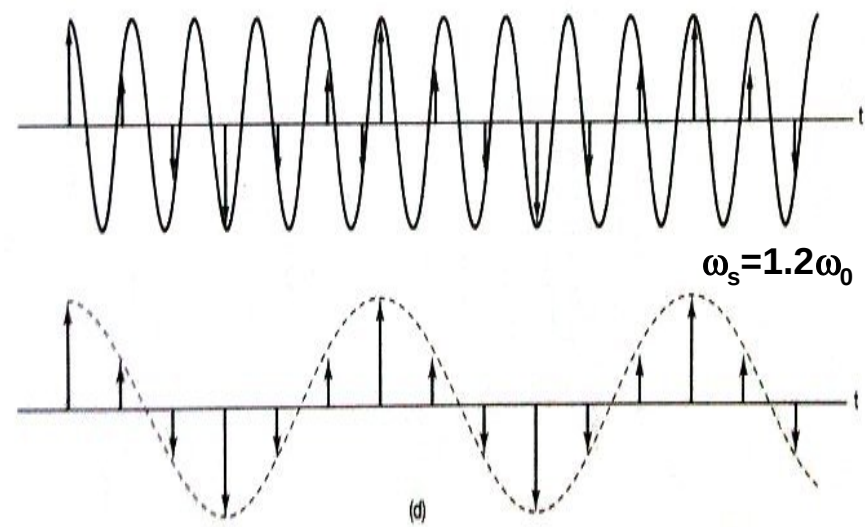
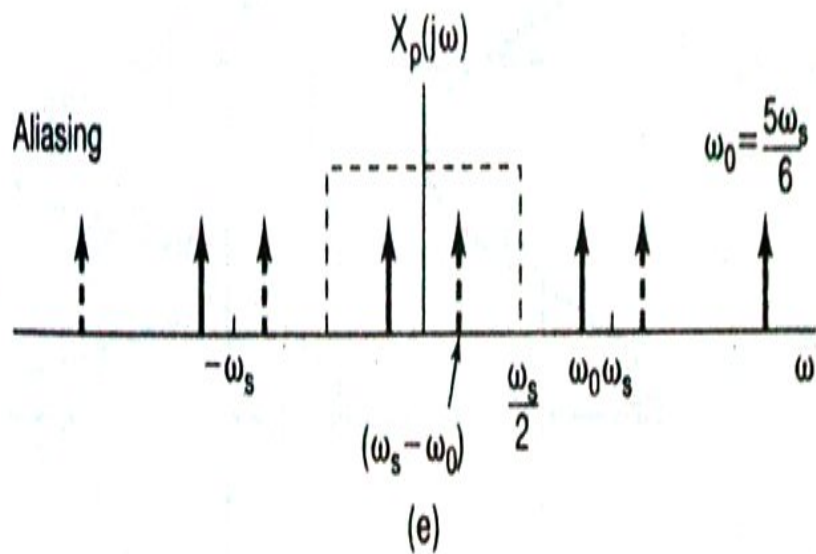
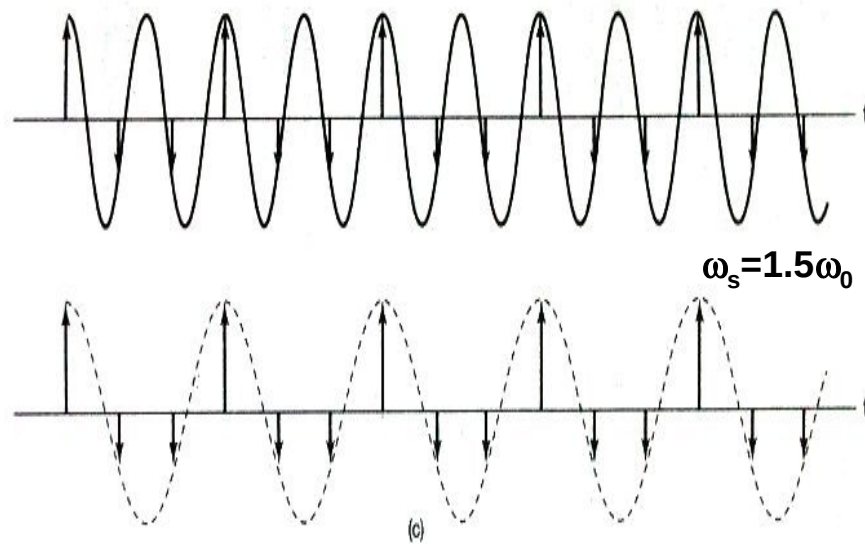
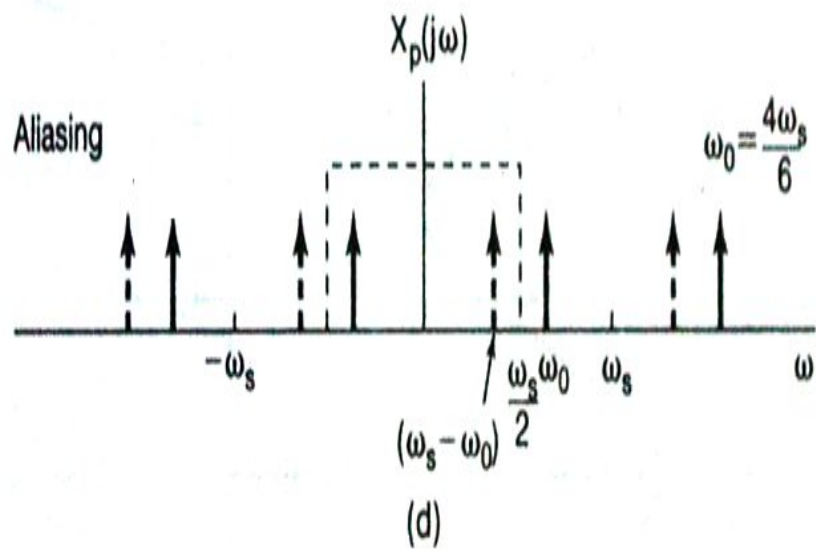
$$(c) \quad \omega_0 = \frac{4\omega_s}{6};$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$$

$$(d) \quad \omega_0 = \frac{5\omega_s}{6};$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t \neq x(t)$$





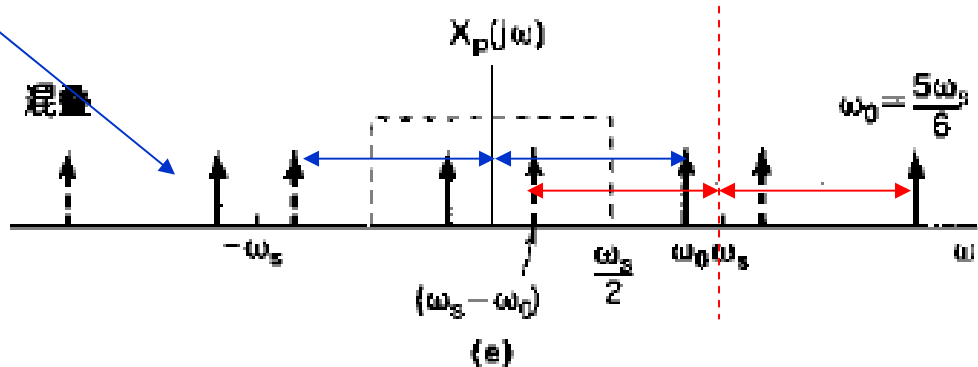
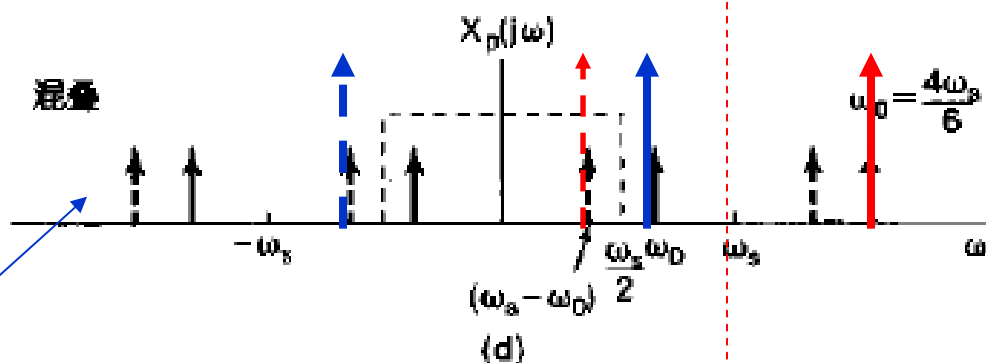
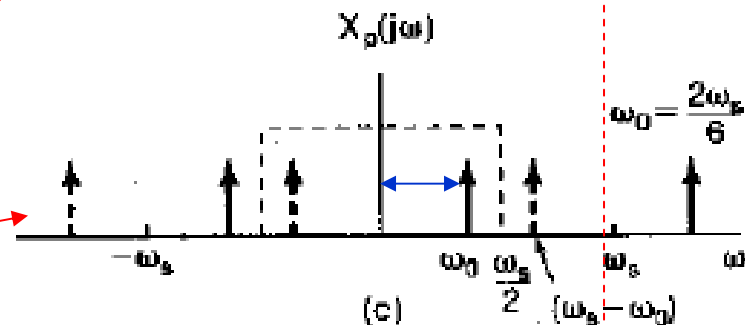
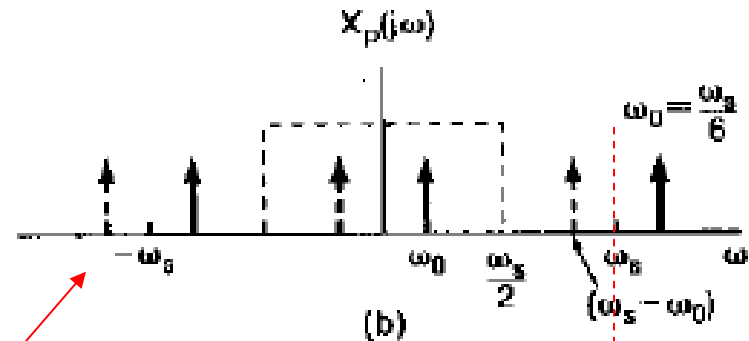
❖ 可以看到，图b和图c中，
由于 $\omega_0 < \omega_s / 2$ ，因此没有
出现混叠现象；而在图d和
图e中混叠现象出现了。

$$X_r = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$X_r = \pi\delta[\omega - (\omega_s - \omega_0)] + \pi\delta[\omega + (\omega_s - \omega_0)]$$

$$x_r(t) = \cos(\omega_s - \omega_0)t$$



❖ 当混叠现象发生时，原始频率 ω_0 就被混叠成一个较低的频率 $\omega_s - \omega_0$ 。欠采样的效果，较高频率被折到较低频率。

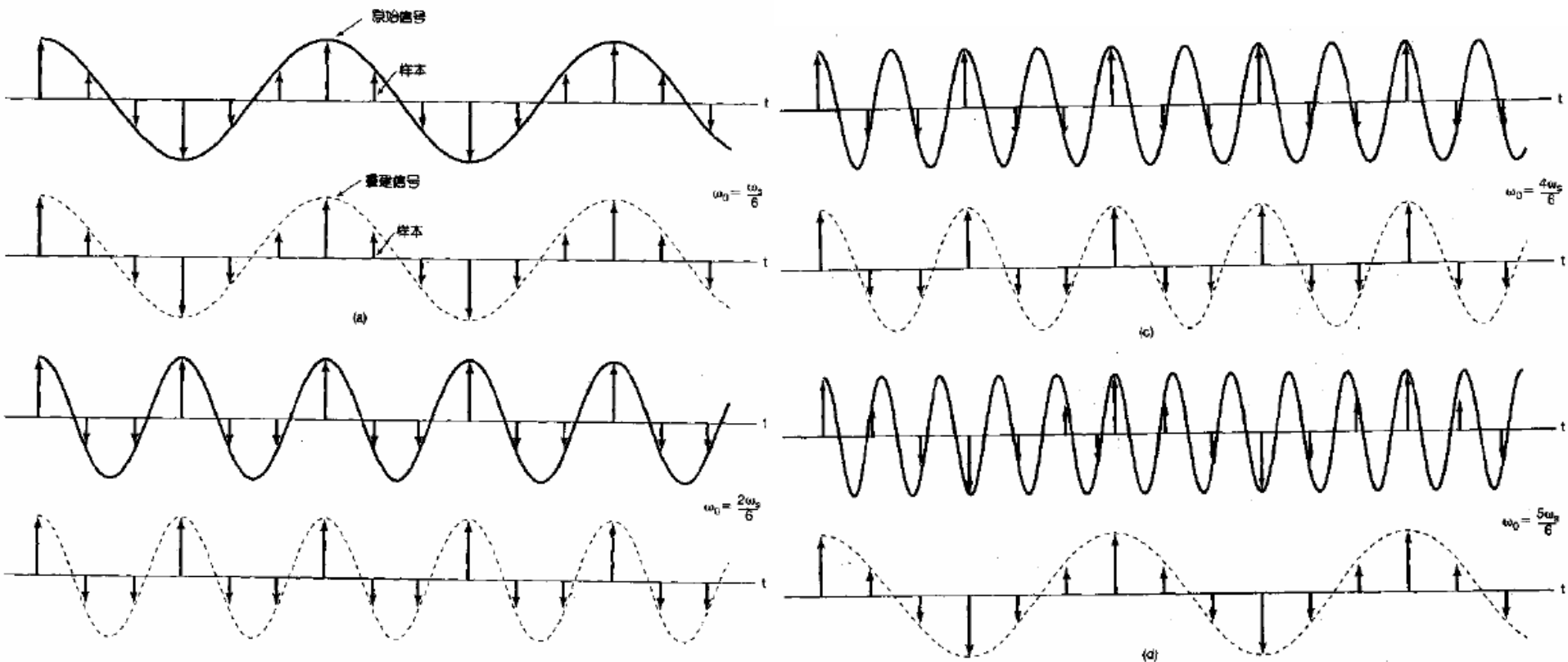


图 7.16 在一个正弦信号上混叠的效果。对应于四种不同的 ω_0 值，画出了原始正弦信号（实线），它的样本和重建信号（虚线）：

(a) $\omega_0 = \omega_s/6$; (b) $\omega_0 = 2\omega_s/6$; (c) $\omega_0 = 4\omega_s/6$; (d) $\omega_0 = 5\omega_s/6$

在(a)和(b)中没有混叠发生，而在(c)和(d)中则存在混叠

❖ 频闪效应

比较极端的情况，若闪光灯只在圆盘转一周时闪烁拍片一次（这就相当于 $\omega_s = \omega_0$ ）那时，这根径线看起来好像静止不动似的，这就相当于圆盘的旋转频率及其谐波都被混叠到零频率上去了。

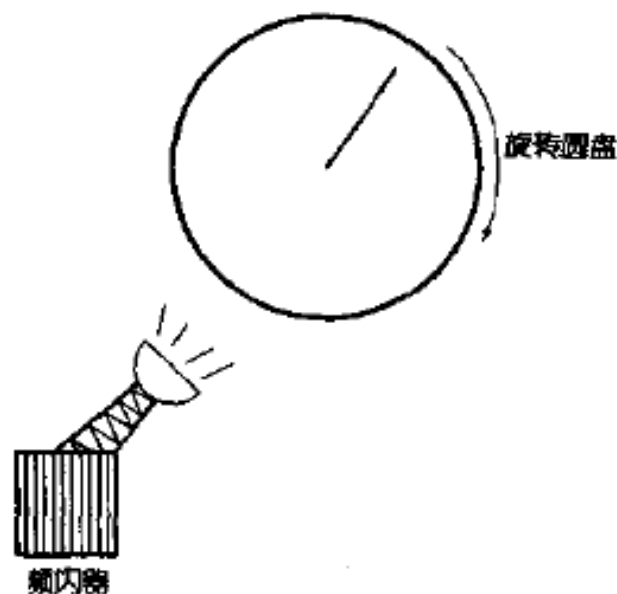


图 7.18 频闪效应

在上面讨论中，把频闪效应看作在欠采样下所产生混叠的一种应用的例子来说明是很有启发性的。在测量仪器中有一种取样示波器，它就是借助于采样原理把欲观察而又不便于显示的很高频率混叠到一个更容易显示的低频率上来，这就是在欠采样情况下，混叠现象另一个有用的例子。关于取样示波器将在习题 7.38 中进行更为详细的讨论。

❖ **混叠效应**使原信号中的一些高频分量混叠到较低的频率上，会造成信号的失真，这种失真为**混叠失真**。

抗混叠滤波器：限制信号最高频率小于采样频率的一半。

7.4 连续时间信号的离散时间处理

- ❖ 离散时间信号的处理可以借助某一通用或专业计算机、各种微处理器，或任何面向离散时间信号处理而专门设计的装置（**DSP**芯片）来实现。



图 7.19 连续时间信号的离散时间处理

- ❖ 在满足采样定理的情况下，连续时间信号 $x_c(t)$ 可以用一串瞬时样本值 $x_c(nT)$ 来表示；也就是说，离散时间序列 $x_d[n] = x_c(nT)$ 。同理，有 $y_d[n] = y_c(nT)$ 。



图 7.20 连续到离散时间转换和离散到连续时间转换的概念。 T 代表采样周期

- ❖ 连续时间到离散时间的转换，缩写为C/D，用于实现C/D转换的器件就叫模拟数字（A/D）转换器；离散时间到连续时间的转换，缩写为D/C，用于实现D/C转换的器件就叫数字模拟（D/A）转换器

❖ 进一步说明连续信号 $x_c(t)$ 和它的离散时间表示 $x_d[n]$ 之间的关系，可以把连续时间到离散时间的变换表示为一个周期采样的过程，再紧跟着一个把冲激串映射为一个序列的环节。

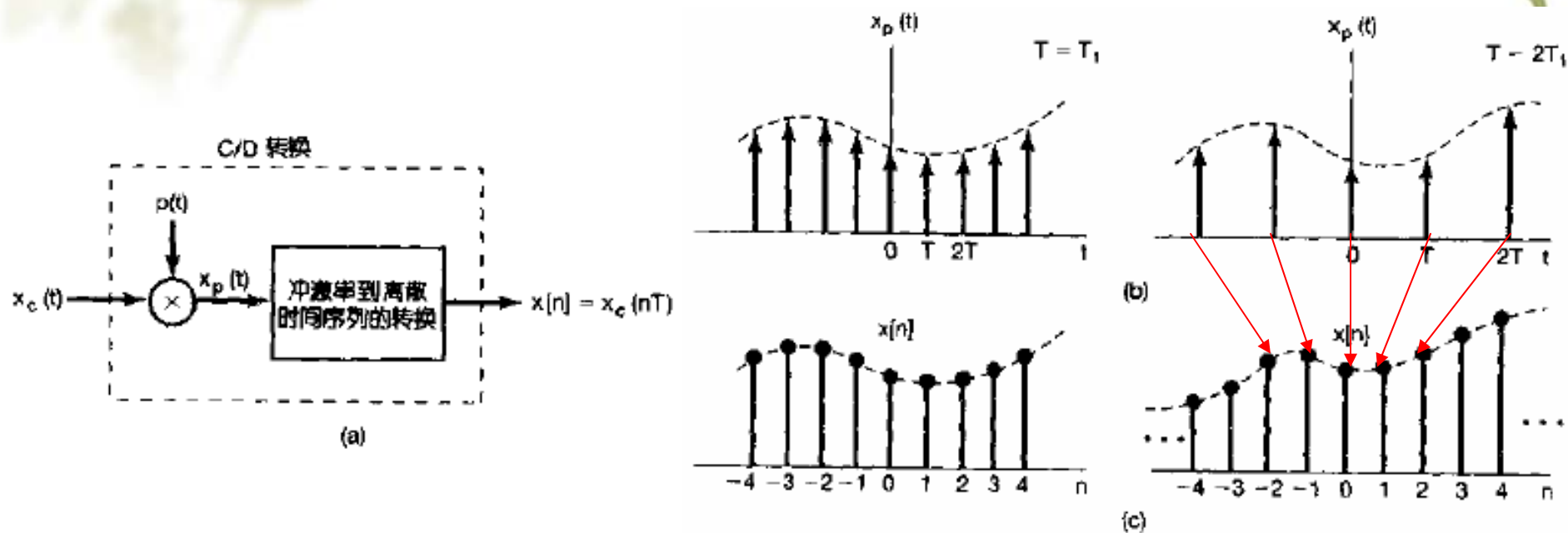
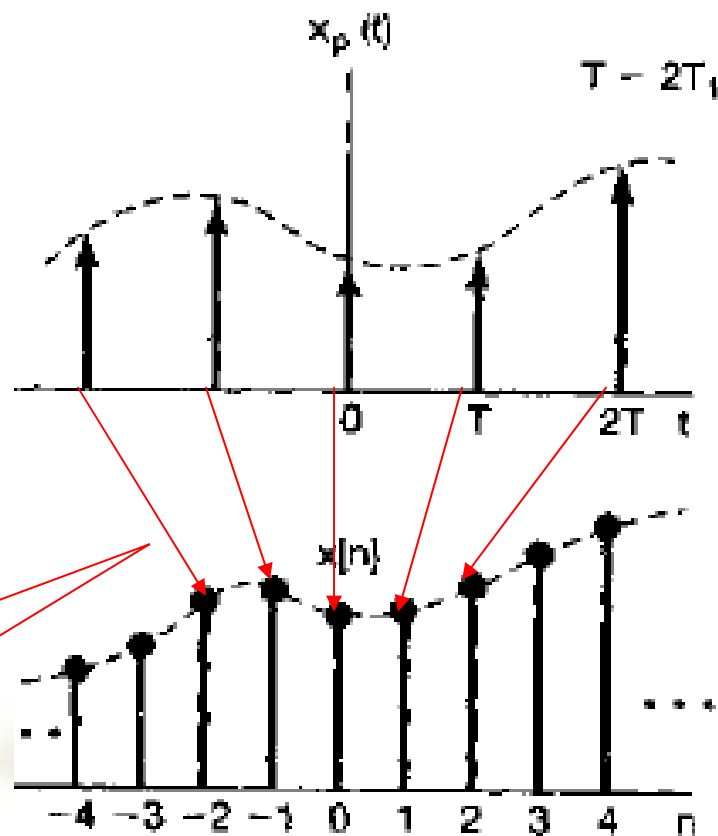


图 7.21 用一个周期冲激串采样,再跟着一个到离散时间序列的转换:
(a)整个系统;(b)两种采样率的 $x_p(t)$,虚线包络代表 $x_c(t)$;
(c)两种不同采样率的输出序列。

❖ 图7.21的第一步代表一个采样过程，冲激串 $x_p(t)$ 就是一个冲激序列，各冲激的幅度与 $x_c(t)$ 的样本值相对应，而在时间间隔上等于采样周期 T 。然后，在从冲激串到离散时间序列的转换中，得到 $x_d[n]$ ；这就是以 $x_c(t)$ 的样本值为序列值的同一序列，但是时间间隔是用新的自变量 n 。因此，实际上从**样本的冲激串到样本的离散序列的转换**可以认为是一个时间的归一化过程。



时域上自变量的尺度变换
 $x(t) \rightarrow x(2t)$ ，信号压缩

❖ 考察频域特性

在这里我们面临着既要在连续时间又要在离散时间处理傅里叶变换，因此，用 ω 表示连续时间的频率变量，用 Ω 表示离散时间的频率变量。

❖ 上节已知，样本的冲激串是

系数

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) \delta(t - nT)$$

又因为

$$\delta(t - nT) \xrightarrow{F} e^{-j\omega nT}$$

所以，有冲激串的频谱：

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT) e^{-j\omega nT}$$

- ❖ 现在我们考虑 $x_d[n]$ 的离散时间傅里叶变换，即

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_d[n]e^{-j\Omega n}$$

利用 $X_p(j\omega)$ 的表达式，有

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)e^{-j\Omega n}$$

- ❖ 这样以来，我们就用样本的冲激串来描述了样本离散序列的频谱。因此，得到下面的关系：

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) \quad \text{式7.21}$$

- ❖ 从而找出了样本的冲激串的频谱与样本离散序列的频谱之间的关系

❖ 而已知:

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\omega - k\omega_s)) \quad \text{式7.22}$$

因此得到

$$\begin{aligned} X_d(e^{j\Omega}) &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega/T - k\omega_s)) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega/T - k2\pi/T)) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - 2k\pi)/T) \quad \text{式7.23} \end{aligned}$$

❖ 图中, $X_d(e^{j\Omega})$ 就是 $X_p(j\omega)$ 的重复, 唯频率坐标有一个尺度变换:

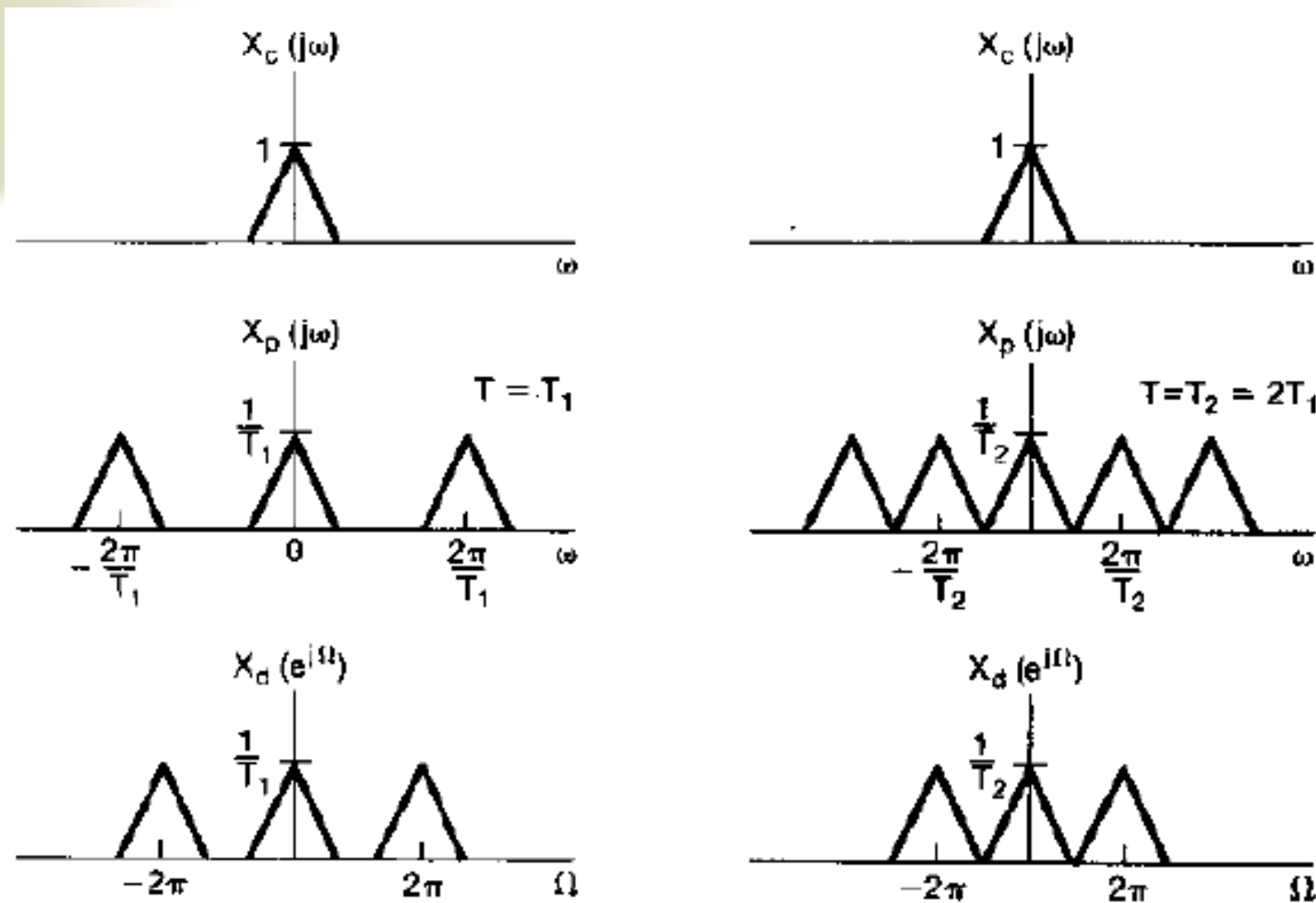


图 7.22 在两种不同采样率下, $X_c(j\omega)$, $X_p(j\omega)$ 和 $X_d(e^{j\Omega})$ 之间的关系

(7.22)式进行周期重复,然后再跟着一个按(7.21)式的线性频率尺度变换联系起来的。频谱的周期性重复是图 7.21 转换过程中第一步的结果,即冲激串采样;而按(7.21)式所作的线性频率尺度变换,可以不太正规地看成是由冲激串 $x_p(t)$ 转换到离散时间序列 $x_d[n]$ 时,所引入的时间归一化的结果。根据 4.3.5 节傅里叶变换的时域尺度变换性质,时间轴上有一个 $1/T$ 的变化,一定在频率轴上引入一个 T 倍的变化。因此, $\Omega = \omega T$ 的关系就与从 $x_p(t)$ 到 $x_d[n]$ 的转换过程中,时间轴上有一个 $1/T$ 的尺度变换,在概念上是完全一致的。

图 7.19 的系统中,经过离散时间系统处理以后,所得到的序列又转换为一个连续时间信号,这一过程就是图 7.21 中各步骤的逆过程。具体来说,就是可以由序列 $y_d[n]$ 产生一个连续时间冲激串 $y_p(t)$,而连续时间信号 $y_c(t)$ 的恢复就可以借助于图 7.23 低通滤波的办法来实现。

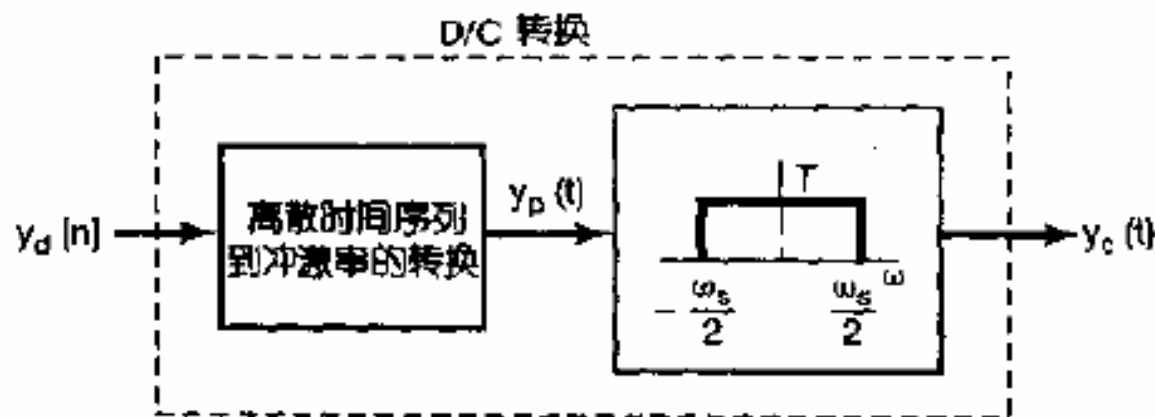


图 7.23 一个离散时间序列到连续时间信号的转换

❖ 让我们把这一节前面讲的内容用一个系统图来描述：

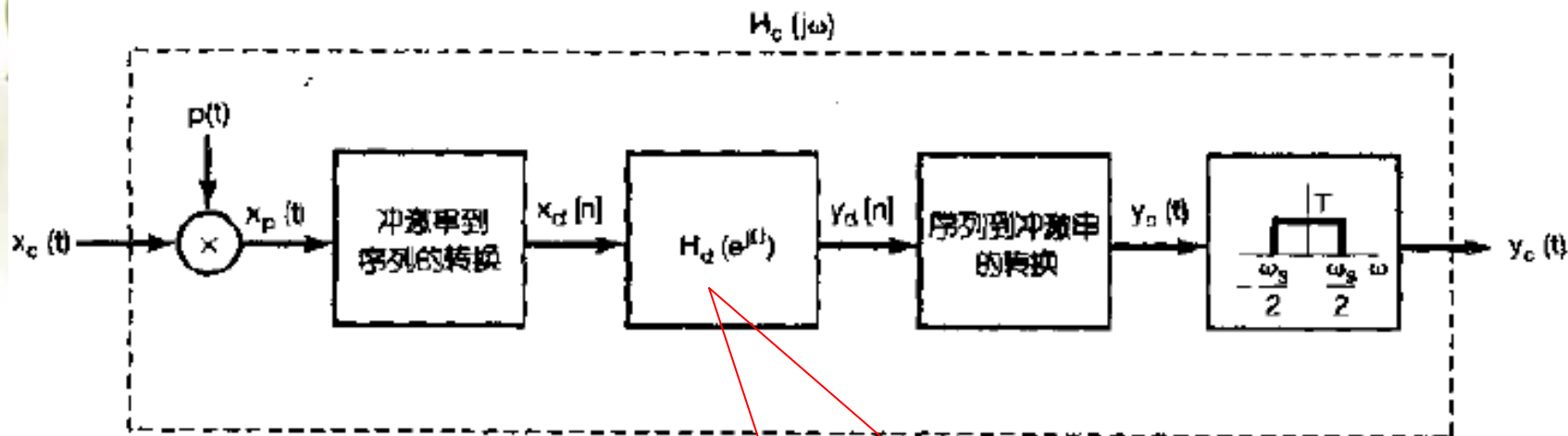
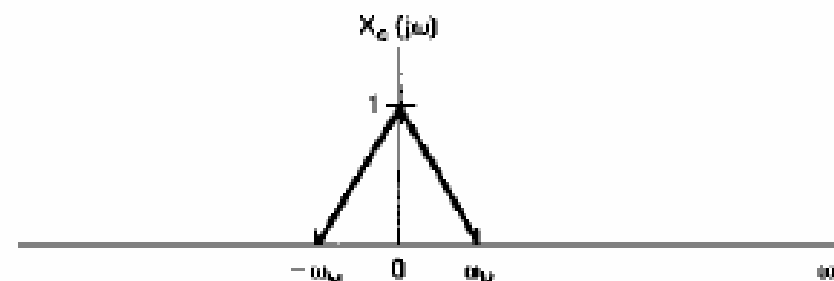


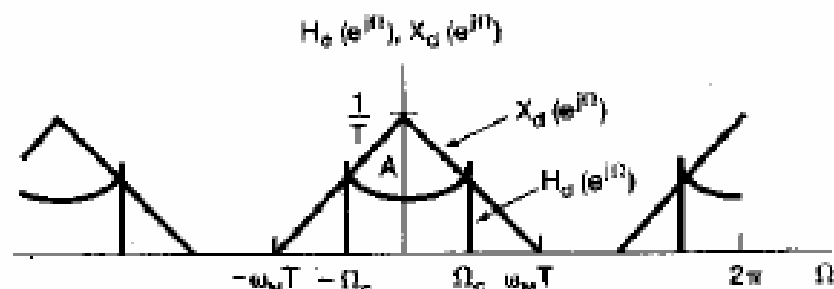
图 7.24 利用离散时间滤波器过滤连续时间信号的系统

离散时间系统的频率响应 $H_d(e^{j\Omega})$

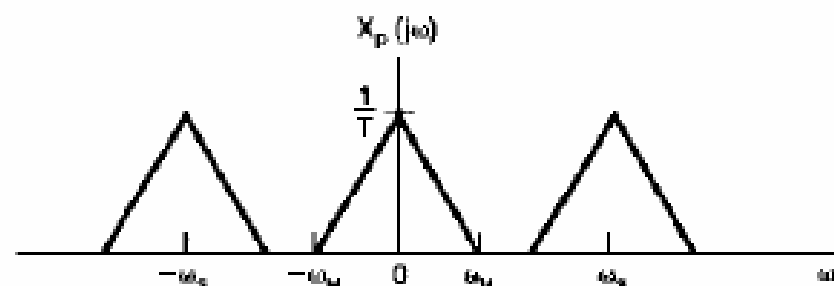
❖ 显然，如果图中的离散时间系统是一个恒等系统的话（即 $x_d[n] = y_d[n]$ ），而且假定满足采样定理中的条件，那么整个系统也是一个恒定系统。



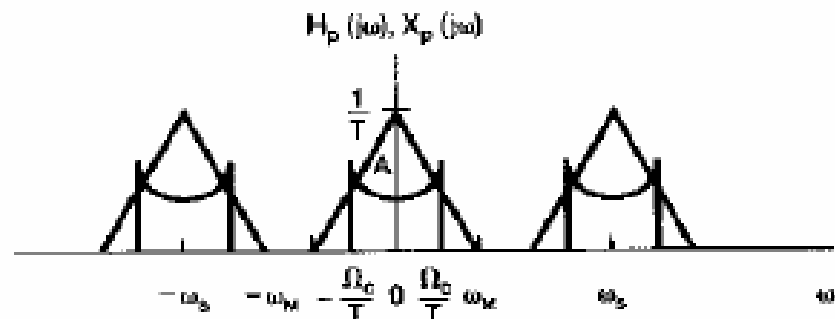
(a)



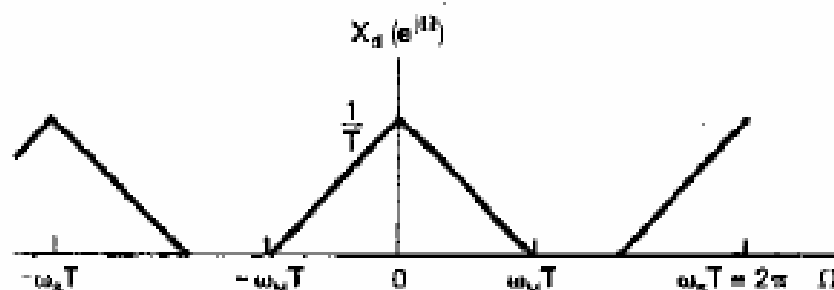
(d)



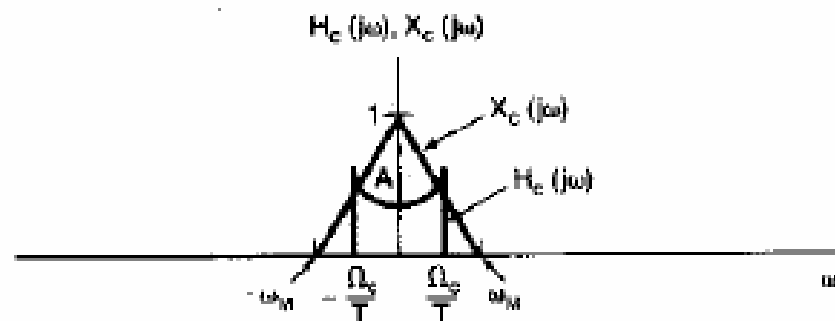
(b)



(e)



(f)



(g)

图 7.25 图 7.24 系统的频域说明:

(a) 连续时间信号的频谱 $X_c(j\omega)$; (b) 冲激串采样以后的谱;

(c) 离散时间序列 $x_d[n]$ 的谱; (d) $H_d(e^{j\Omega})$ 和 $X_d(e^{j\Omega})$ 相乘以后得到的 $Y_d(e^{j\Omega})$;

(e) $H_p(j\omega)$ 和 $X_p(j\omega)$ 相乘后得到的 $Y_p(j\omega)$; (f) $H_c(j\omega)$ 和 $X_c(j\omega)$ 相乘后得到的 $Y_c(j\omega)$

作业

7.21 7.22 7.27