第一章 电路基础

第一节　直流电路

一、电路的基本概念

二、电压电流的参考方向

三、基尔霍夫定律

四、电压源和电流源

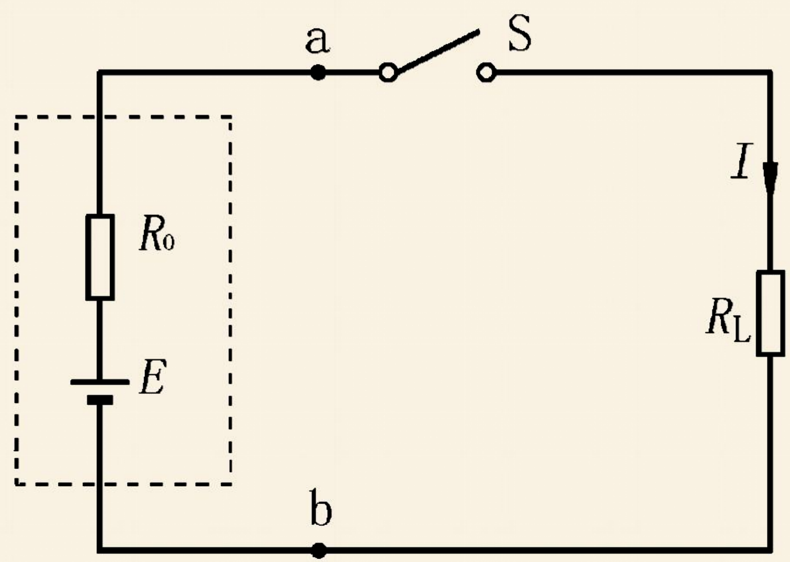
五、叠加定理

六、戴维南定理和诺顿定理

一、电路的基本概念

电路(circuit)：电流所流过的路径。

组成：
- 电源
- 负载
- 中间环节



电路的模型化：

将实际器件由理想化的电阻、电容、电感和电源元件来表征。

二、电压电流的参考方向

电流：电荷的定向流动，大小由电流强度表示：$I=\dfrac{Q}{t}$

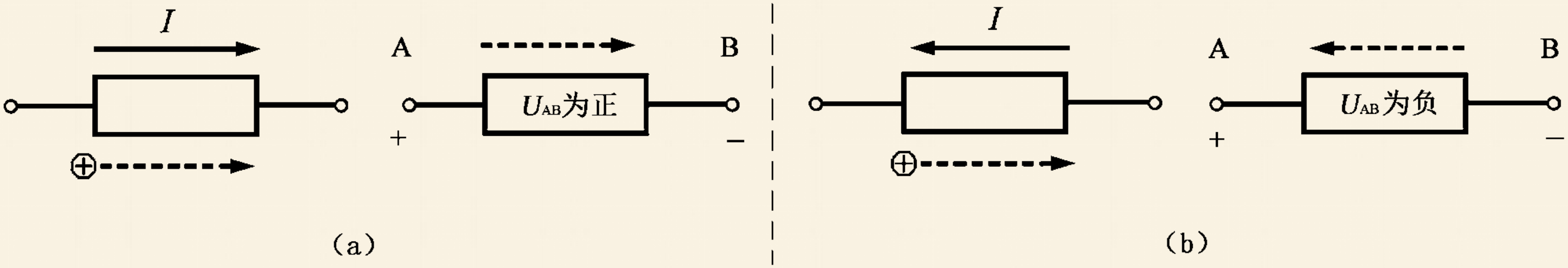
单位 A（安培）

电压：电场力对电荷作功能力的大小。 $U_{AB}=\dfrac{W_{AB}}{Q}$

单位 V（伏特）

- 电流和电压的方向有实际方向和参考方向之分，习惯上将正电荷运动的方向规定为电流的方向，电压的方向则规定为由高电势端指向低电势端。

参考方向



- 在分析复杂电路前，往往无法预先判定电流、电压的实际方向，故在计算时须设定一个方向为正方向，此即为参考方向。
- 如图所示，实际方向用虚线箭头表示，电流参考方向用实线箭头表示，电压参考方向用“+”“-”极性表示。参考方向与实际方向相同时，计算出的电压、电流值为正值，若相反则为负值。

三、基尔霍夫定律

基本概念：

1. 支路

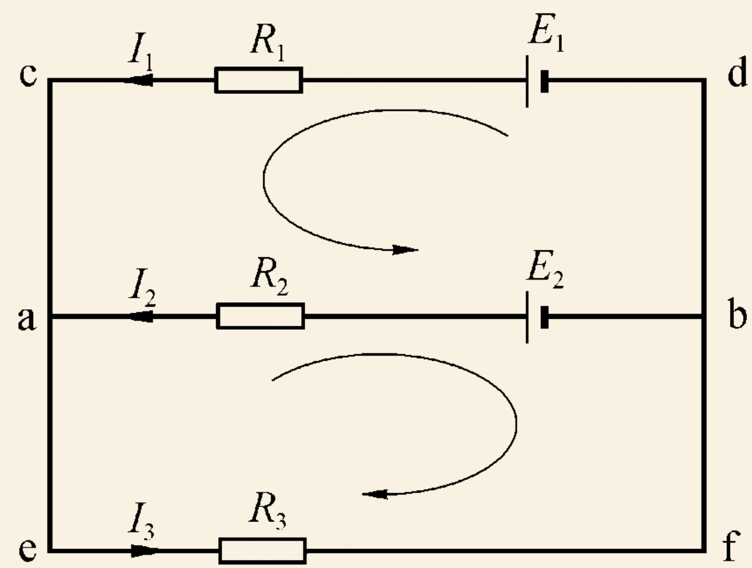
如图中的 acdb、ab、aefb段。

2. 节点

如图中的 a、b 点。

3. 回路

如图中的acdba、abfea、acfea 等都是回路。

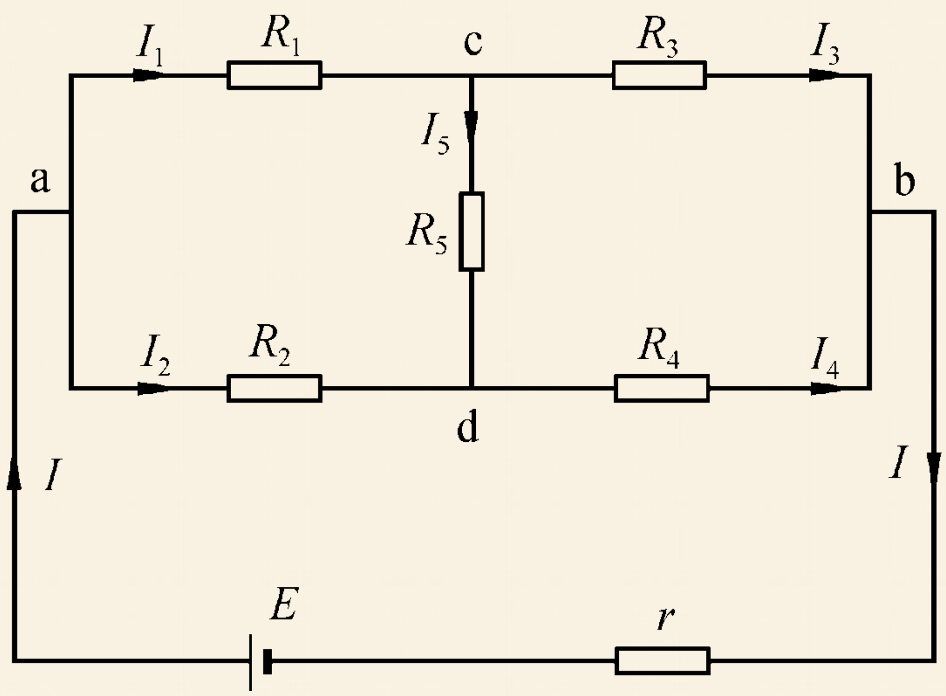


1. 基尔霍夫电流定理（KCL）

$$\sum I_i = 0$$

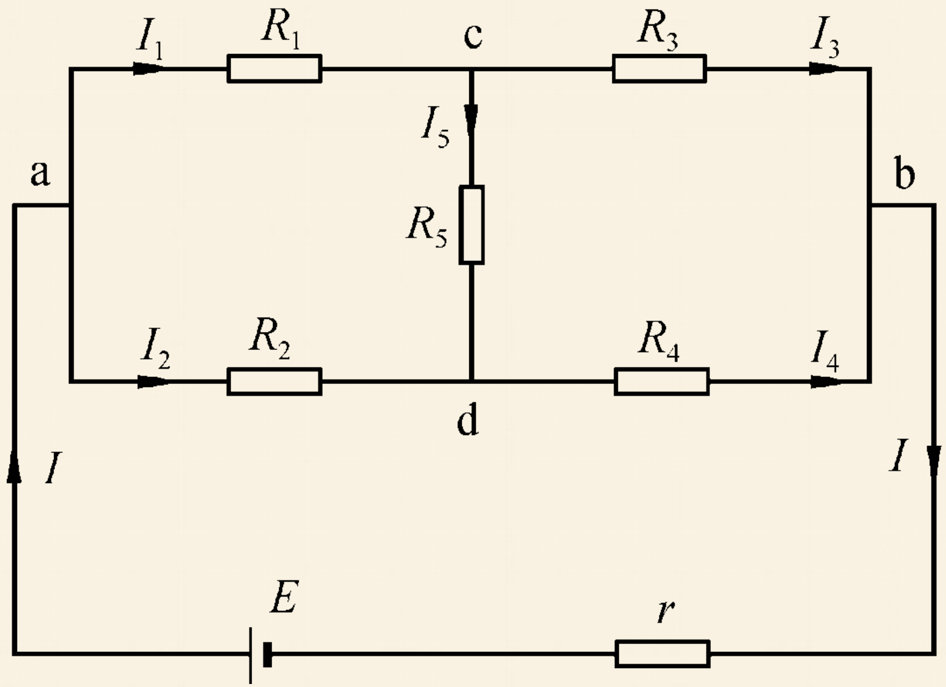
对节点 a 而言：

$$I_1 + I_2 - I = 0$$



2. 基尔霍夫电压定理（KVL）

$$\sum U_i = 0$$



对回路 adba 而言：

$$E - I_2R_2 - I_4R_4 - Ir = 0$$

3. 基尔霍夫定理的应用——支路电流法

假定电路有m条支路，n个节点。

步骤：

（1）标出各支路电流的参考方向几回路绕行方向；

（2）用KCL列出 (n-1) 个节点方程；

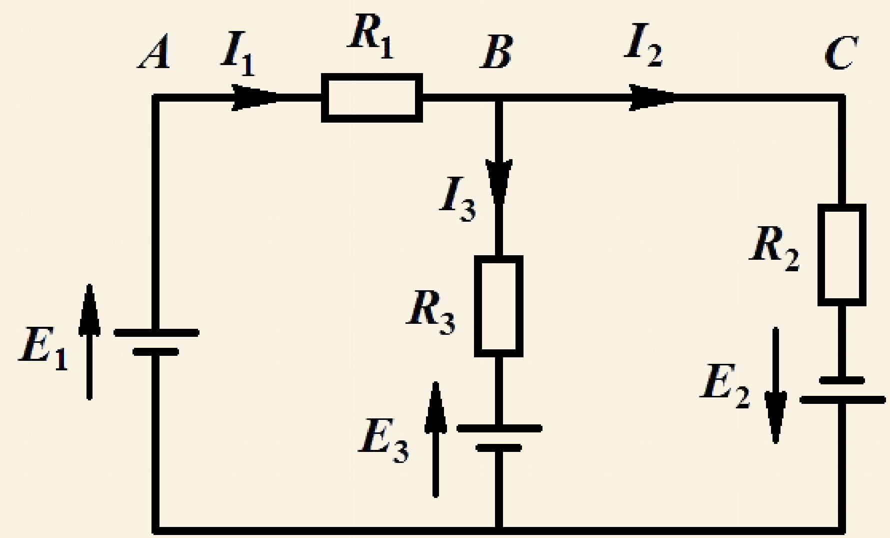
（3）用KVL列出 [m-(n-1)] 个独立的回路电压方程；

（4）联列方程组求解各支路电流。

4.　电路中电位的计算

零电位点（电位参考点）

一般以电路中的接地点作为零电位点。



步骤：

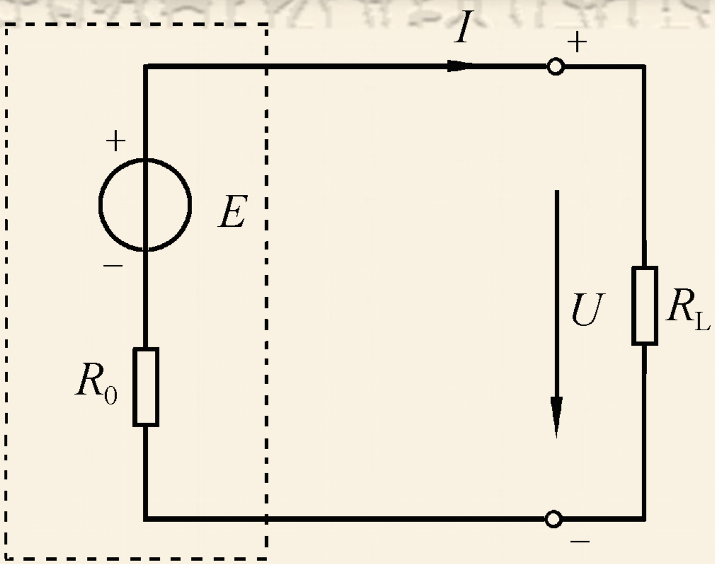
(1)选定零电位点；

(2)标定电压、电流方向。

(3)求某点电位，找到一条从零电位点到该点的路径，逐步计算路径上的电压降，并求电压降的代数和。

四、电压源和电流源

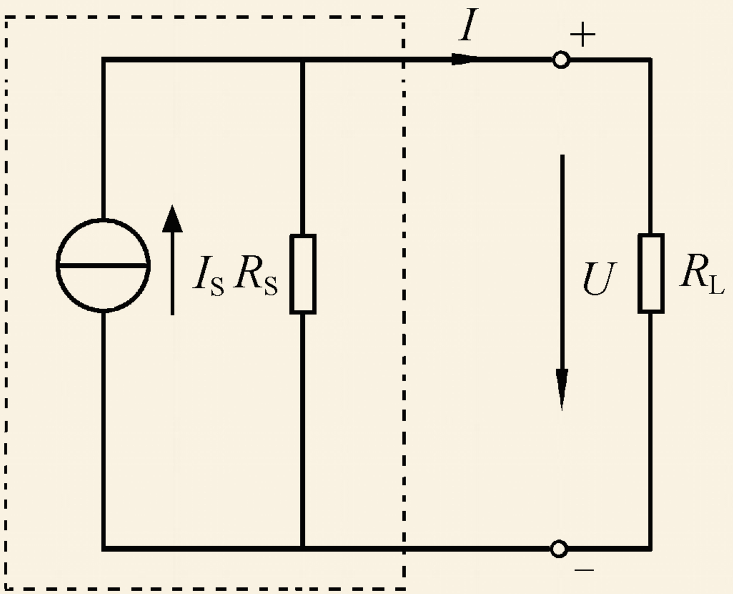
1. 电压源



- 不变的电动势和内阻串联的电源。若 $R_0 = 0$ 则称为理想电压源，此时端电压大小不随负载而改变。
- 一般地，当电源电压稳定在它的工作范围内，即可认为其为恒压源。
- 实际的电源可表示为一个理想电压源与一个内阻串联的形式。

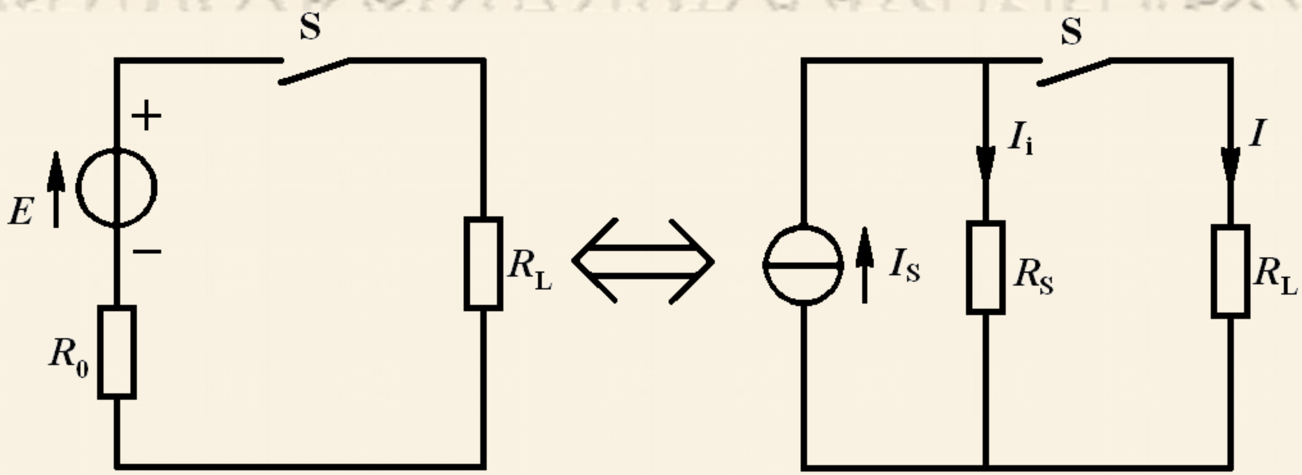
2. 电流源

- 输出恒定电流的电源，称为理想电流源，其输出电流的大小与负载无关。
- 实际的电源可表示为一个理想电流源与一个内阻并联的形式。



- 为了使电压源和电流源更接近理想的电压源和电流源，电压源的内阻 R_0 应越小越好，而电流源的内阻 R_S 应越大越好。

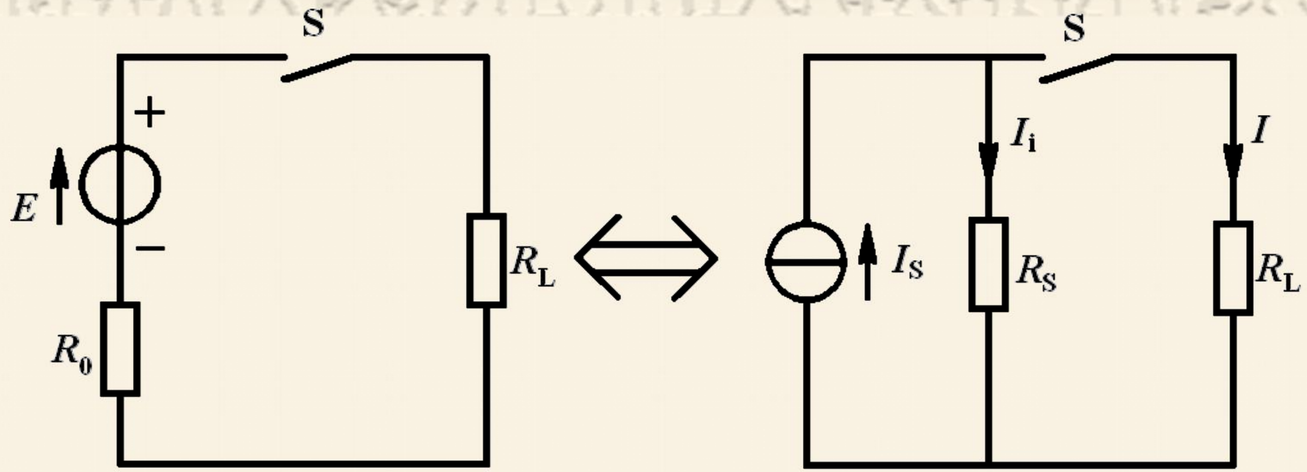
3. 电压源与电流源的等效变换



实际的电源既可表示为一个理想电压源与一个内阻串联的形式，也可表示为一个理想电流源与一个内阻并联的形式。

如果电路的外特性相同，则不论用那种形式的模型表示，计算的结果都是一样的。

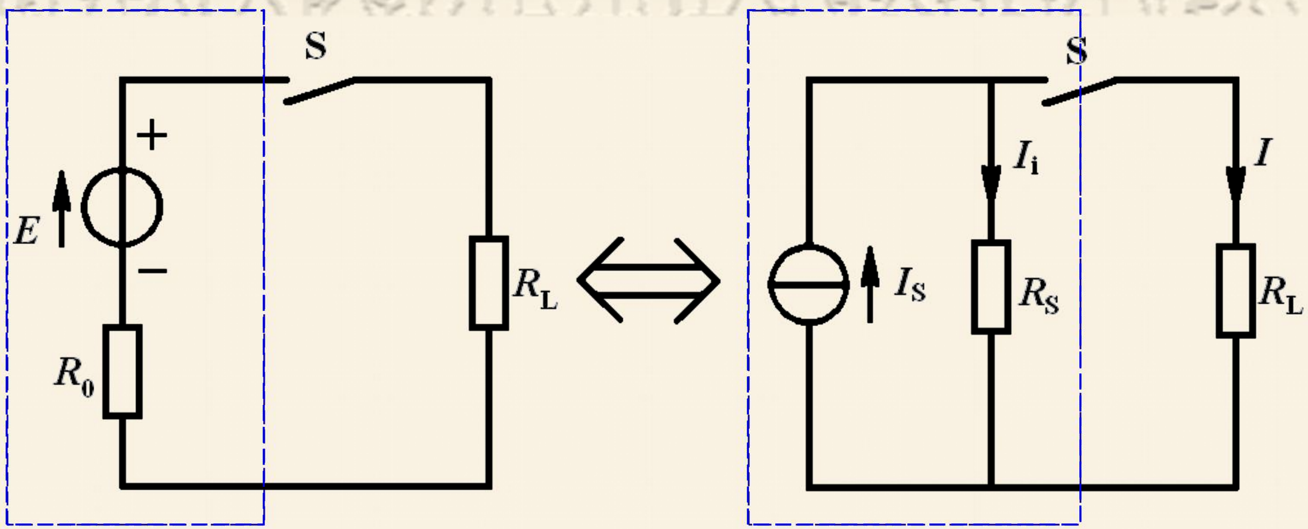
3. 电压源与电流源的等效变换



（1）电压源与电流源的等效变换只能对外电路（负载）有效，对内电路无效。

（2）电压源变为电流源时，电流源中的 I_s 等于电压源输出端短路电流，I_s 方向与电压源对外电路输出电流方向相同，电流源中的并联电阻 R_i 与电压源的内阻 R_0 相等。

3. 电压源与电流源的等效变换

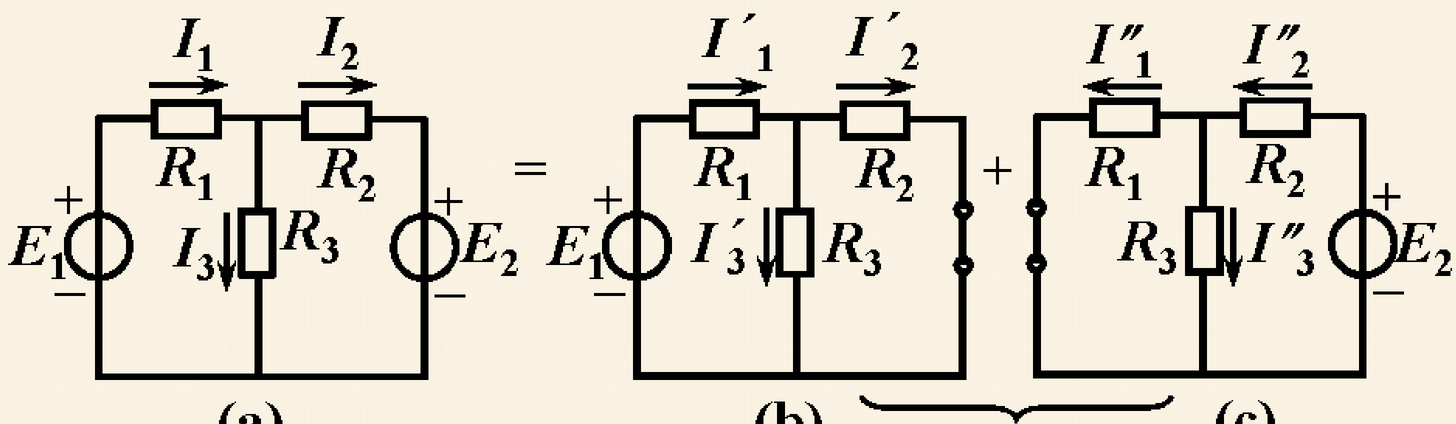


（3）电流源变为电压源时，电压源中的电动势 *E* 等于电流源输出端断路时的端电压，*E* 的方向与电流源对外输出电流的方向相同，电压源中的内阻 R_0 与电流源的并联电阻 R_i 相等。

（4）理想电压源与理想电流源之间不能等效变换。

五、叠加原理

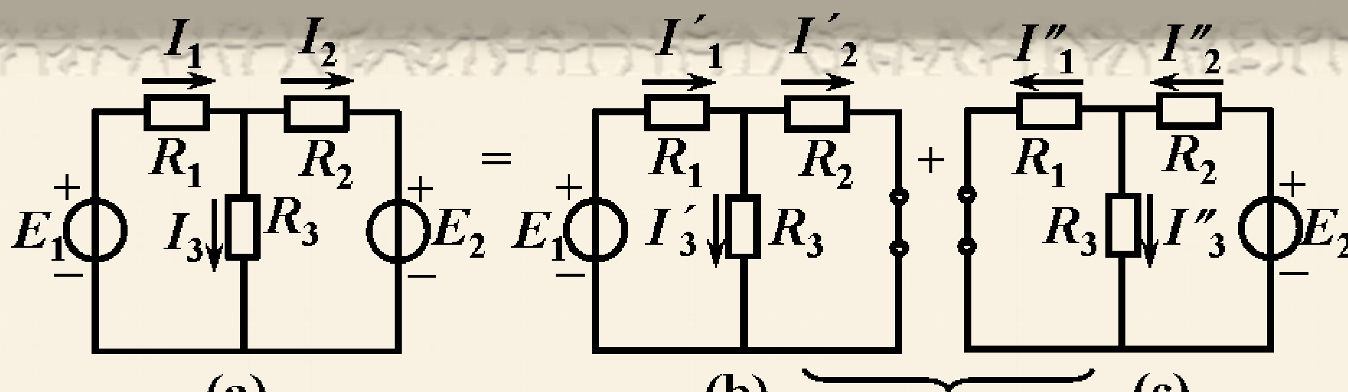
叠加原理：对于线性电路，任何一条支路的电流，都可以看成是由电路中各个电源（电压源或电流源）分别作用时，在此支路中所产生的电流的代数和。



(a) 原电路　　(b) E_1单独作用　　(c) E_2单独作用

叠加原理

单击导航



(a) 原电路　　(b) E_1单独作用　　(c) E_2单独作用

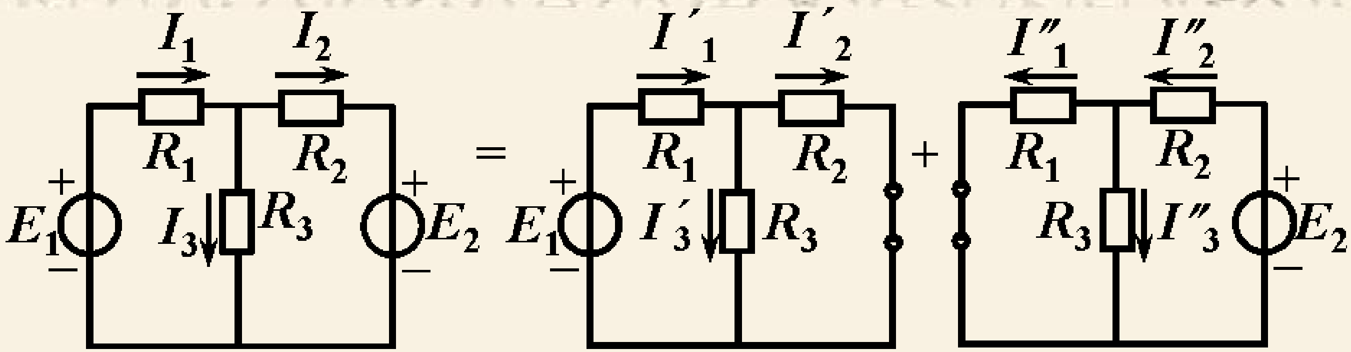
叠加原理

E_1 单独作用时((b)图)

$$I_1' = \frac{E_1}{R_1 + R_2 /\!/ R_3} = \frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} E_1$$

E_2单独作用时((c)图)

$$I_1'' = \frac{R_3}{R_1 + R_3} \times \frac{E_2}{R_2 + R_1 /\!/ R_3} = \frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1} E_2$$



(a) 原电路

(b) E_1单独作用

(c) E_2单独作用

叠加原理

$$I_1 = \left(\frac{R_2 + R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\right)E_1 - \left(\frac{R_3}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1}\right)E_2$$

同理：

$$I_2 = -I_2' + I_2''$$

$$I_3 = I_3' + I_3''$$

注意事项：

① 叠加原理只适用于线性电路。

② 线性电路的电流或电压均可用叠加原理计算，但功率*P*不能用叠加原理计算。例：

$$P_1 = I_1^2 R_1 = (I_1' + I_1'')^2 R_1 \neq I_1'^2 R_1 + I_1''^2 R_1$$

③ 不用电源的处理：

$E = 0$，即将E 短路；$I_s = 0$，即将 I_s 开路 。

④ 解题时要标明各支路电流、电压的参考方向。若分电流、分电压与原电路中电流、电压的参考方向相反时，叠加时相应项前要带负号。

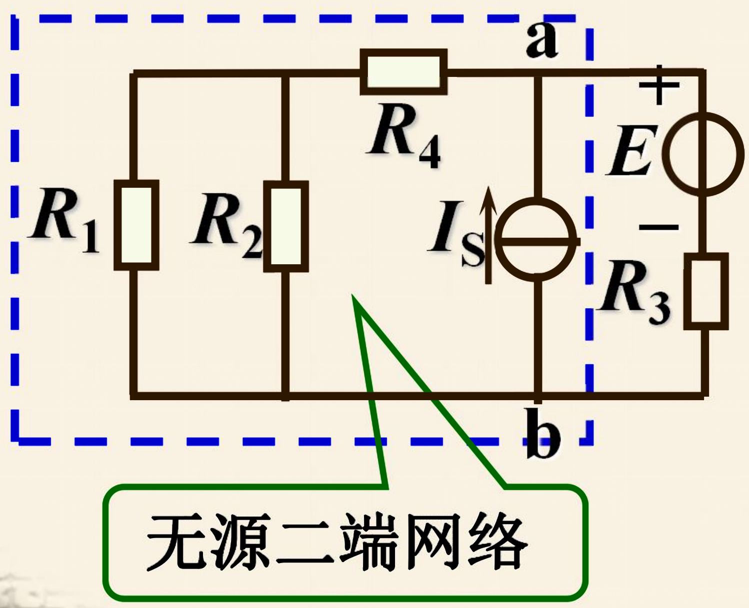
六、戴维南定理和诺顿定理

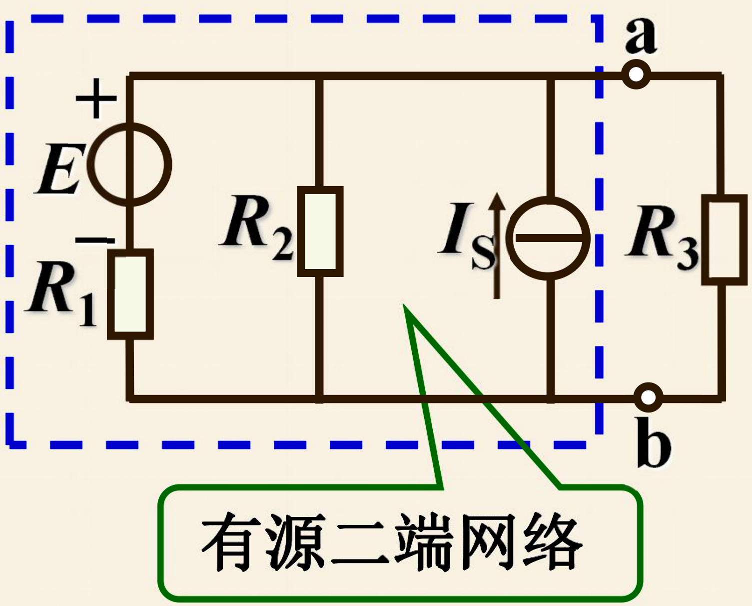
二端网络的概念：

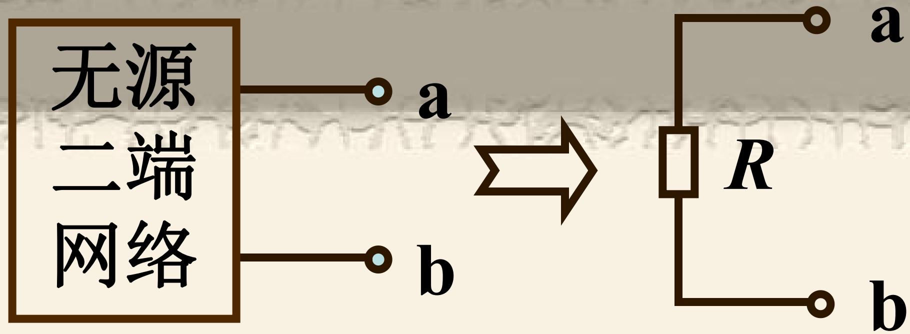
二端网络：具有两个出线端的部分电路。

无源二端网络：二端网络中没有电源。

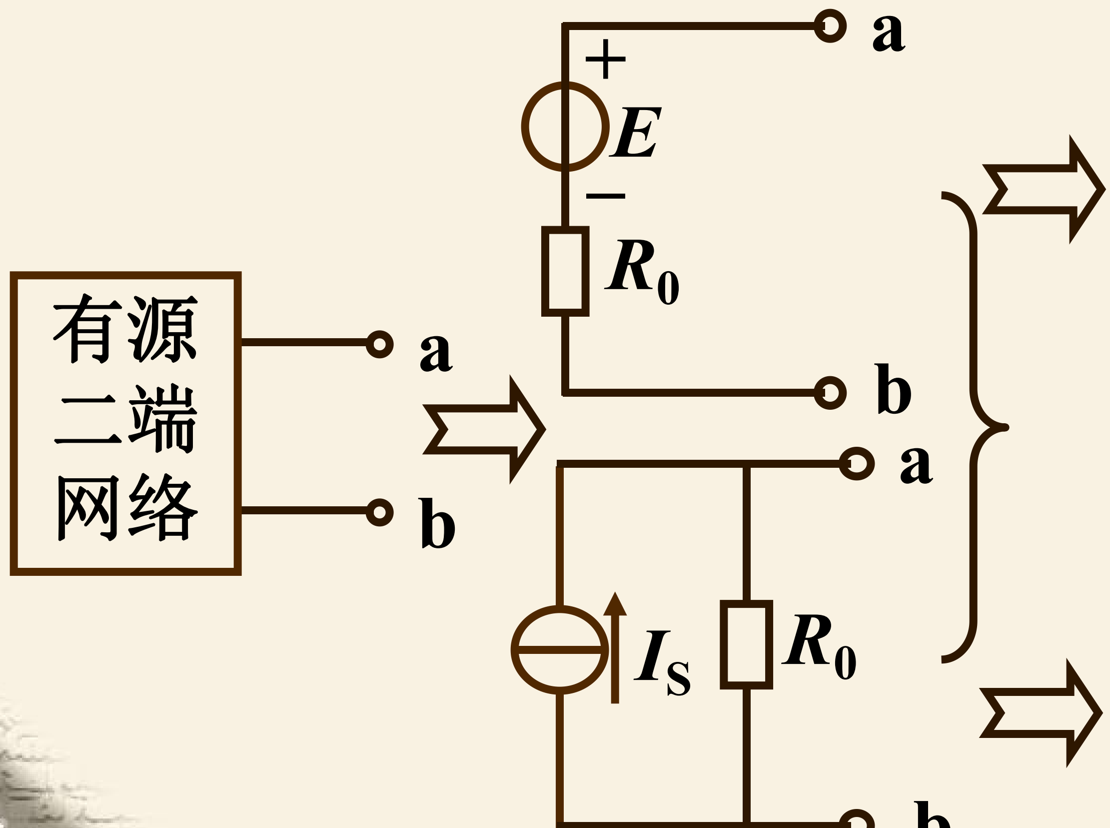
有源二端网络：二端网络中含有电源。







无源二端网络可化简为一个电阻

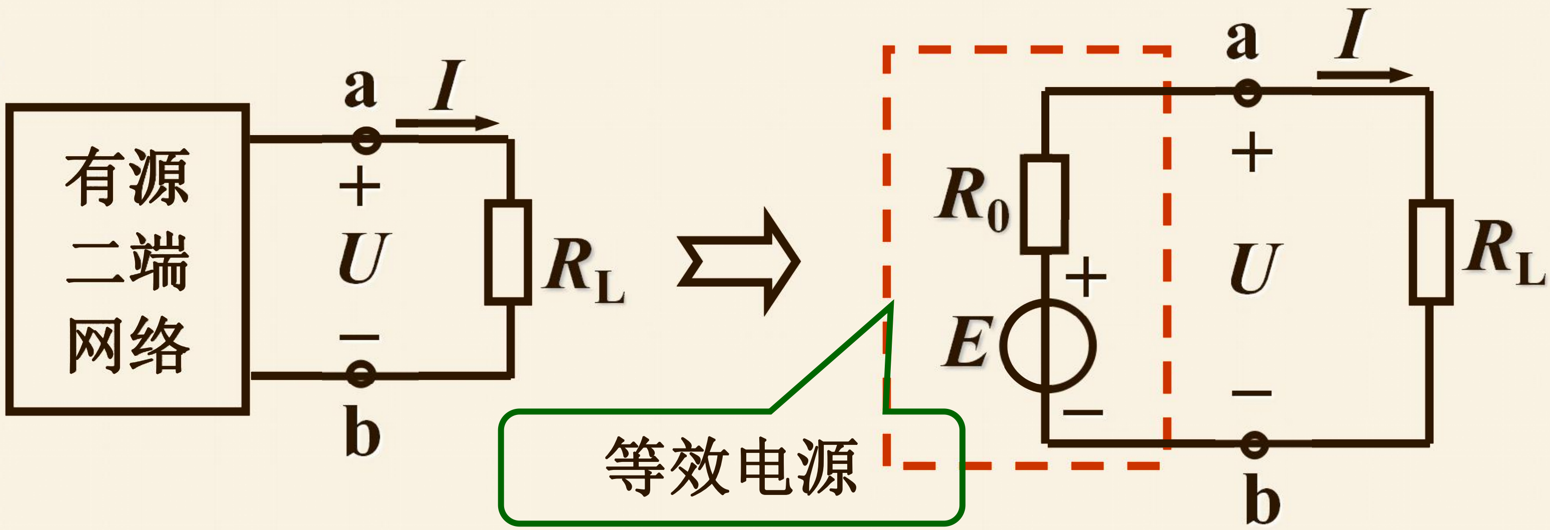


电压源
（戴维南定理）

有源二端网络可化简为一个电源

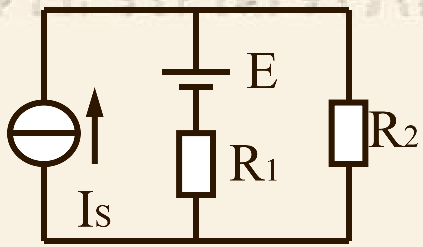
电流源
（诺顿定理）

戴维南定理 任何一个有源二端线性网络都可以用一个电动势为 E 的理想电压源和内阻 R_0 串联的电源来等效代替。



- 等效电源的电动势E 是有源二端网络的开路电压U_0，即将负载断开后 a 、b两端之间的电压。
- 等效电源的内阻R_0等于有源二端网络中所有电源均除去（理想电压源短路，理想电流源开路）后所得到的无源二端网络 a 、b两端之间的等效电阻。

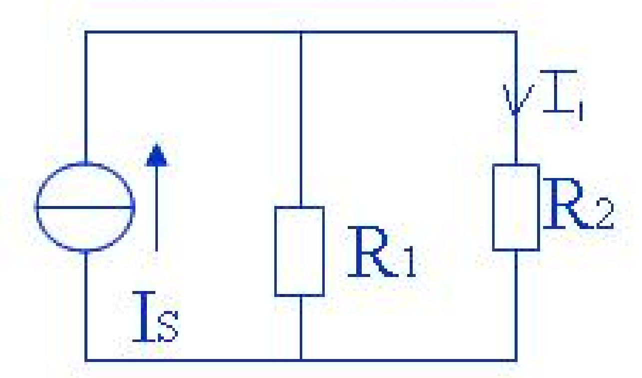
例 在图三所示电路中，已知：I_S =2A，E=8V，R_1=2Ω，R_2 =10Ω，试用戴维南定理和叠加定理求流过R2的电流。



（图三）

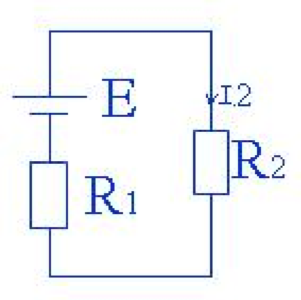
a.电流源单独作用时的情况

$$I_1 = I_S \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} = 2 \times \frac{2}{10+2} = \frac{1}{3} A$$



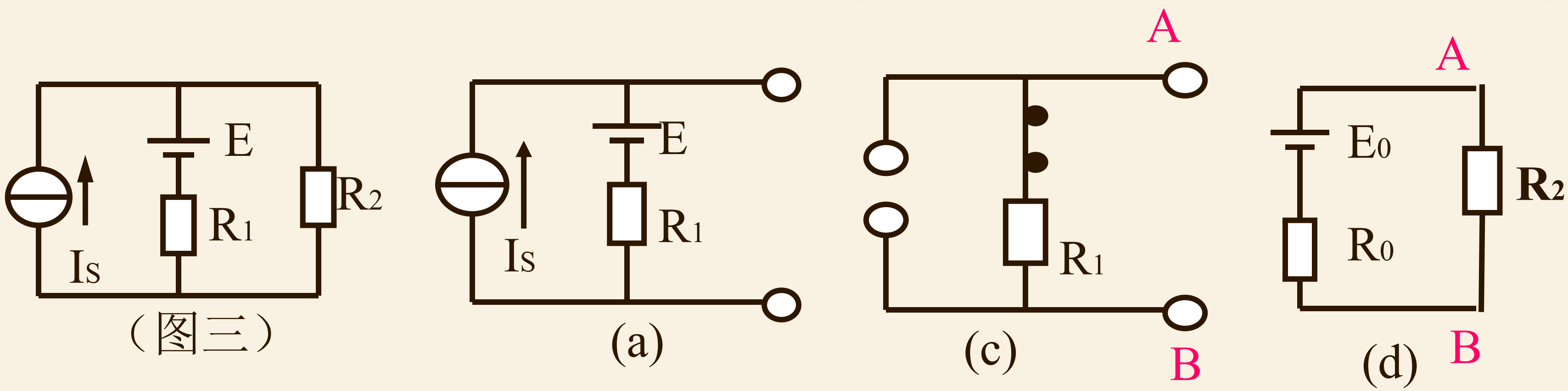
b.电压源单独作用时的情况

$$I_2 = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{8}{10+2} = \frac{2}{3} A$$



C.根据叠加定理，流过R2的总电流
I=I1+I2=1/3+2/3=1A

例　在图三所示电路中，已知：I_S =2A，E=8V，R_1=2Ω，R_2 =10Ω，试用戴维南定理和叠加定理求流过R2的电流。



用戴维南定理

$$E_0 = U_{AB} = I_S \times R_1 + E_1 = 2 \times 2 + 8 = 12V$$

$$R_0 = R_{AB} = R_1 = 2\,\Omega$$

$$I = \frac{E_0}{R_0 + R_2} = \frac{12}{2+10} = 1A$$

3、解题步骤归纳

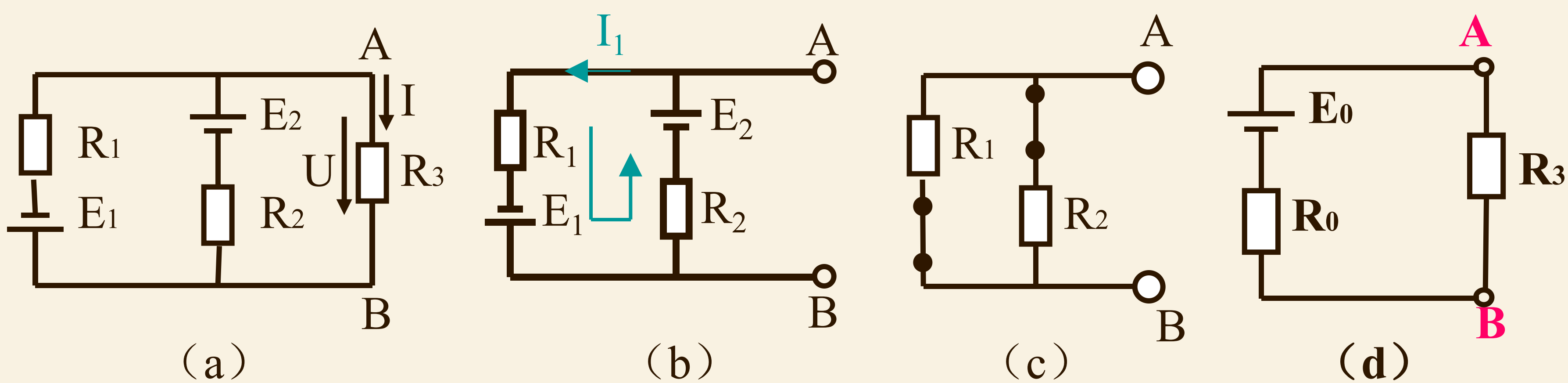
(1)断开待求支路，得有源二端网络，并求出开路电压 E_0；

(2)将图中的电压源短路，电流源开路，得除源后的无源二端网络，并求出等效电阻R_o；

(3)根据U_{OC}和R_o画出戴维南等效电路并接上待求支路，划出等效电路，再求出待求参数。

（4）等效电压源电动势E_0的方向与有源二端网络开路时的端电压极性一致。

例2 在图一所示电路中，已知：$E_1=5V$, $E_2=25V$, $R_1=8\,\Omega$, $R_2=12\,\Omega$, $R_3=2.2\,\Omega$ 。试用戴维南定理求通过R3的电流及R3两端的电压。



解：

$$-I_1R_1+E_1-I_1R_2+E_2=0$$

$$I_1=(E_1+E_2)/(R_1+R_2)=1.5A$$

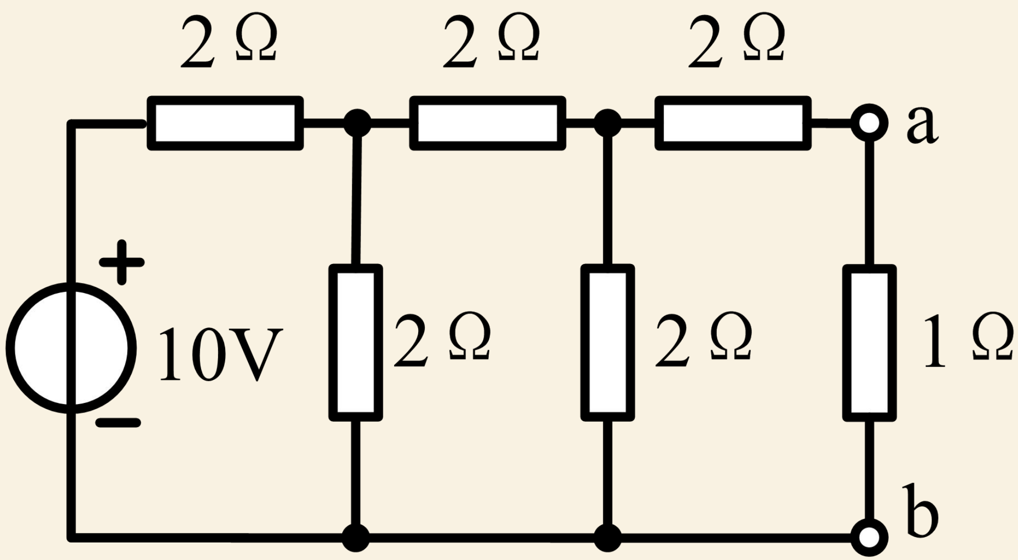
$$E_0=U_{AB}=E_2-I_1R_2=25-1.5\times12=7V$$

$$R_0=R_{AB}=\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=\frac{8\times12}{8+12}=4.8\,\Omega$$

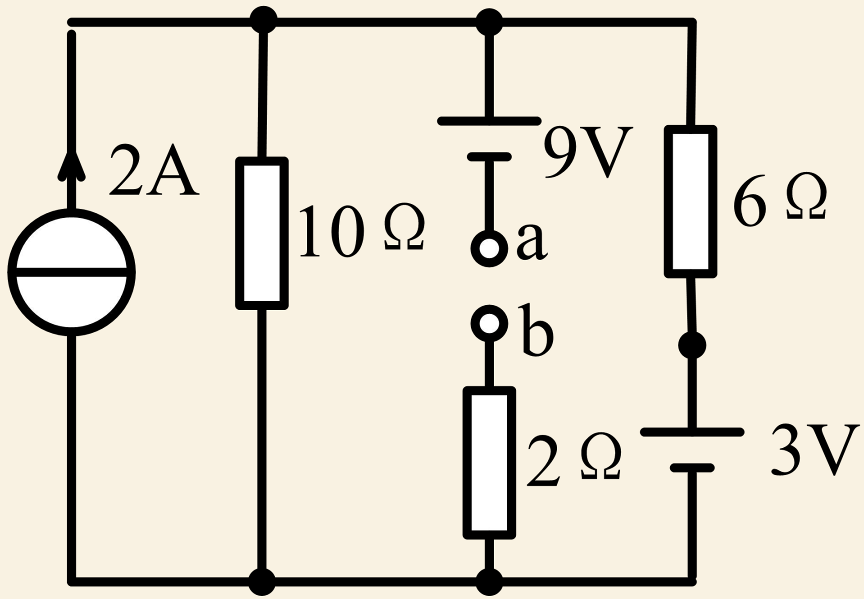
$$I=\frac{E_0}{R_0+R_3}=\frac{7}{4.8+2.2}=1A$$

$$U_{AB}=IR_3=1\times2.2=2.2V$$

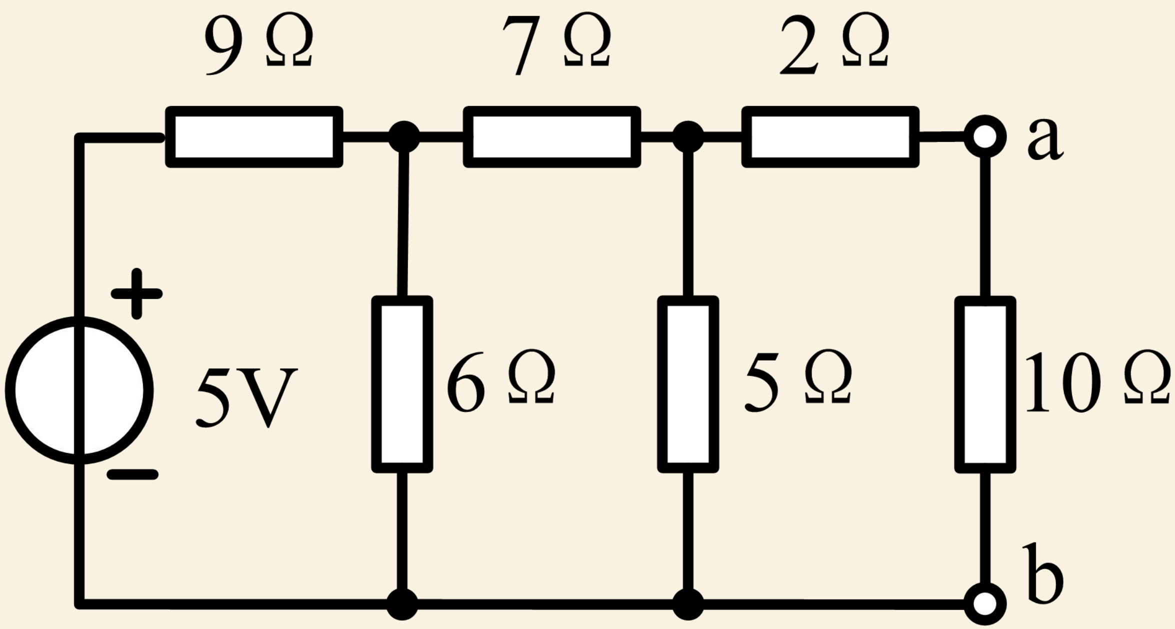
例3 在如图所示电路中。试用戴维南定理求ab间的等效电路。



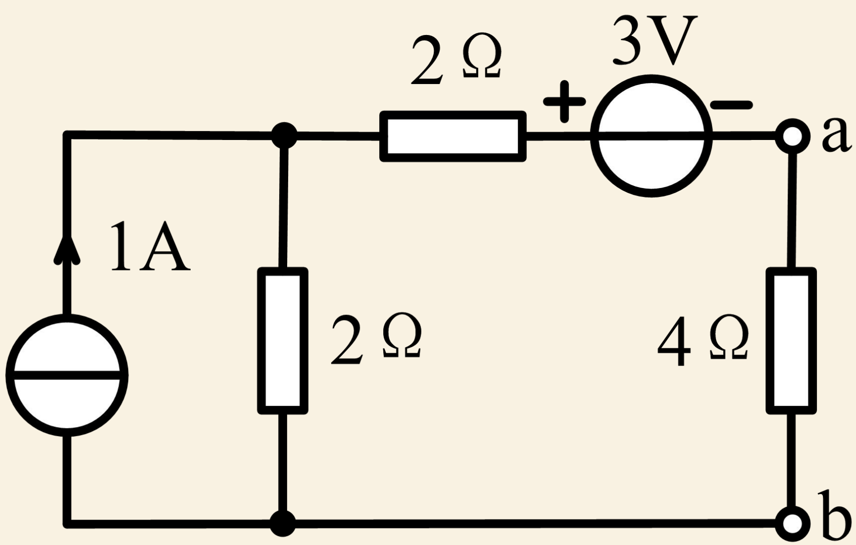
例4 在如图所示电路中。试用戴维南定理求ab间的等效电路。



例5 在如图所示电路中。试用戴维南定理求ab间的等效电路，并求流过10Ω电阻的电流。



例6 在如图所示电路中。试用戴维南定理求ab间的等效电路，并求流过4Ω电阻的电流。



第二节　电路的暂态过程

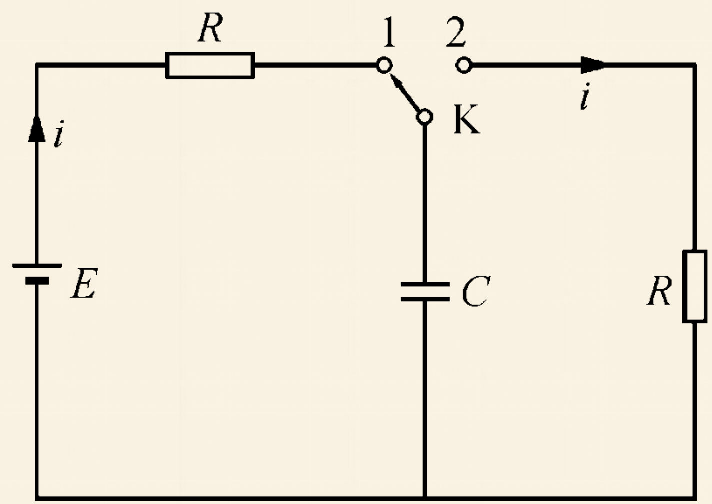
一、*RC*电路的暂态过程

二、*RL*电路的暂态过程

一、*RC*电路的暂态过程

1. 充电过程

- 当开关K未接通“1”之前电容器不带电，电容C两极板之间的电压为零。
- 当开关K合向“1”时，电源通过电阻*R*向电容器充电，充电电流和电容器两端的电压都随时间而变化。



RC 充放电电路

电路中各瞬时电位为：　$u_R = iR$，　$u_c = \dfrac{q}{C}$

⌖ 由基尔霍夫KVL定律可知，$E=u_R+u_c$

$$\left.\begin{aligned} & iR+u_{\mathrm{C}}=E, \\ & i=\frac{dq}{dt}=C\frac{du_c}{dt} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow E=RC\frac{du_c}{dt}+u_c$$

解上述微分方程，可以得到电容上的瞬时电压为：

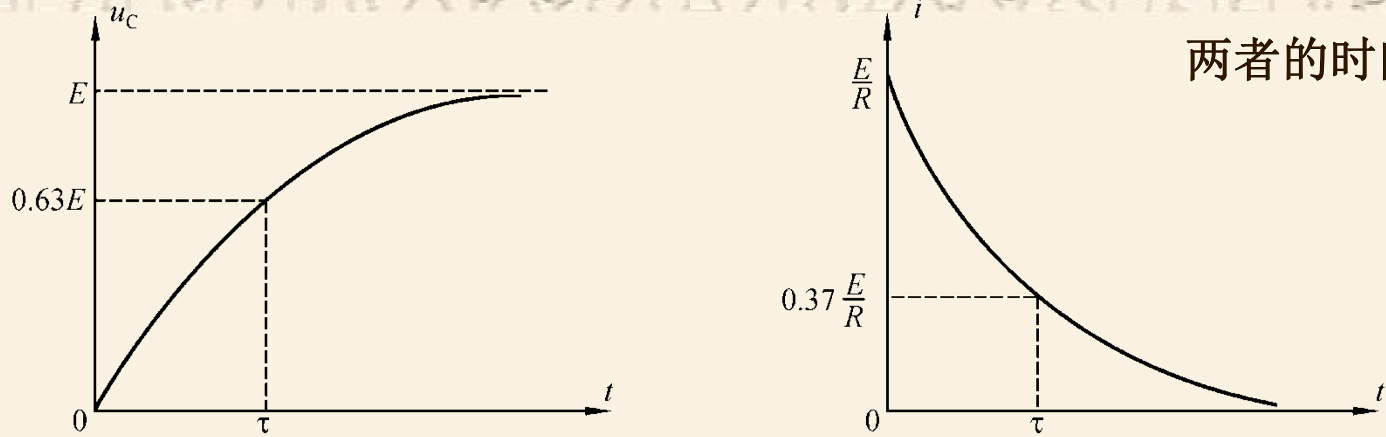
$$u_c=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$$

对瞬时电压的时间微分，得到充电电流为

$$i=C\frac{du_c}{dt}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

电容电压和充电电流均是关于时间的指数函数。

两者的时间变化曲线：



(a) u_C的变化曲线　　(b) i 的变化曲线

- 当充电的时间 $t=RC$ 时，电容器两端的电压和充电电流分别为

$$u_C = E(1-e^{-1}) = 0.63E \qquad i = \frac{E}{R}e^{-1} = 0.37\frac{E}{R}$$

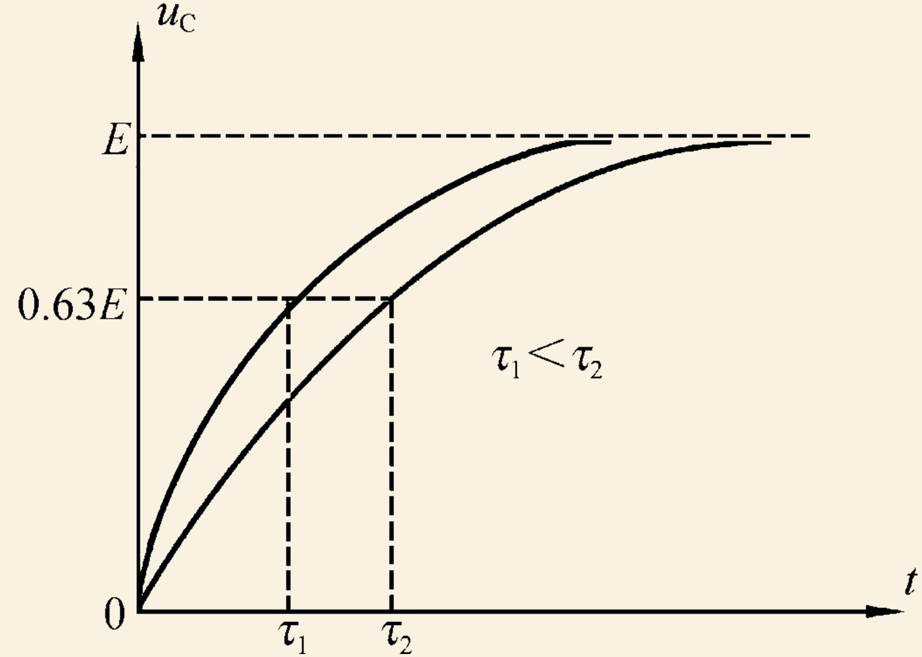
- 即电容器两端的电压增长到最大值的63%，而充电电流则降为最大值的37%。

乘积 *RC* 被称为 time constant（时间常数），表示为：

$$\tau = RC$$

当 *R* 的单位为（欧姆） 以及 *C* 的单位用（法拉），*RC* 的单位为 （秒）。

由此可见，时间常数大则意味着电压变化的速度慢；时间常数小则意味着电压变化的速度快；



$$t=1\tau\,,\ u_C=\varepsilon(1-e^{-\tau/\tau})=\varepsilon(1-e^{-1})=0.632\varepsilon$$

$$i_C=I_0e^{-1}=0.368I_0$$

$$t=2\tau\,,\ u_C=0.864\varepsilon \qquad t=3\tau\,,\ u_C=0.950\varepsilon$$

$$i_C=0.136I_0 \qquad i_C=0.050I_0$$

$$t=4\tau\,,\ u_C=0.982\varepsilon \qquad t=5\tau\,,\ u_C=0.993\varepsilon$$

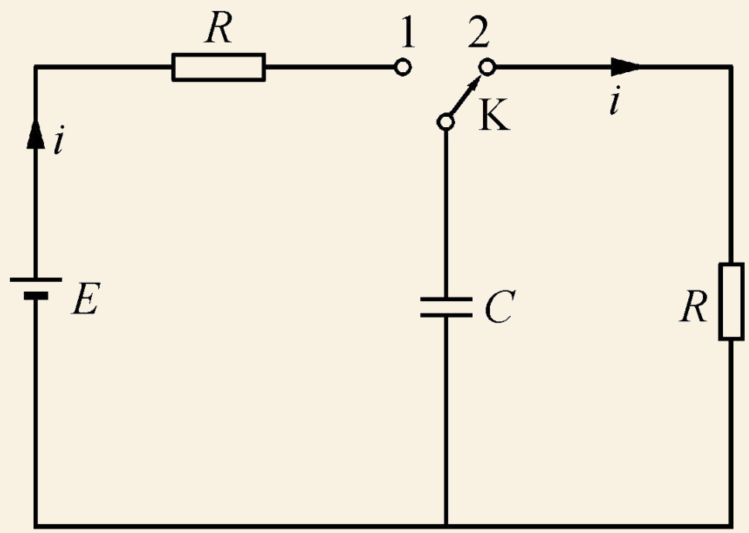
$$i_C=0.018I_0 \qquad i_C=0.007I_0$$

实际上，可以认为经过4～5 个时间常数后，电路已达到稳定状态，充电过程就可结束 。

2. 放电过程

当 t = ∞ (通常为 3 ~ 5τ以后)， K ⟶ 2：

电容通过电阻 *R* 放电，最后其上的电压减小为零。



$$0 = u_c + u_R$$

$$RC\frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

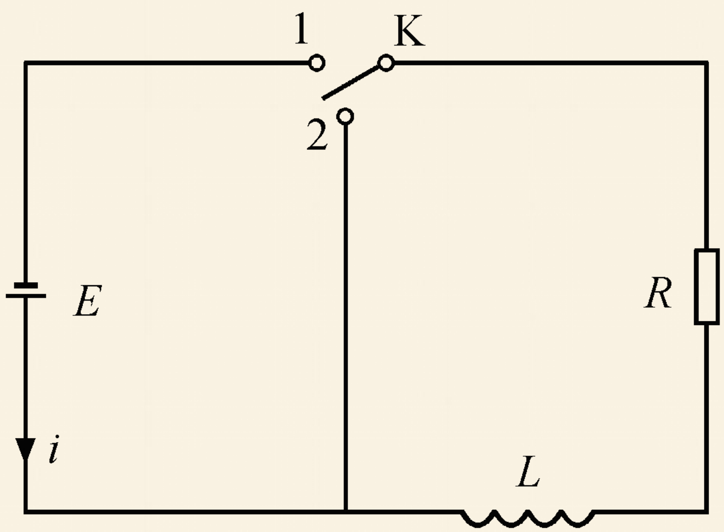
$$\Longrightarrow \quad u_c = Ee^{-\frac{t}{RC}} \quad , \; i = \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

电压和电流均随时间而显指数规律的减小。

二、RL电路的暂态过程

当开关K与“1”接通时，电流开始通过RL回路，这时L上的自感电动势为 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，电阻上的电压降为Ri，应用基尔霍夫定律得

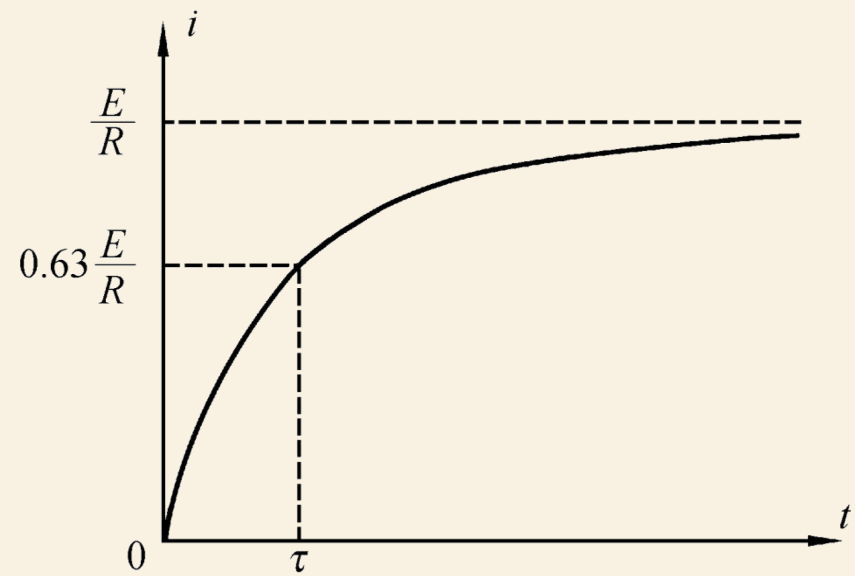
$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E$$



解上述方程可得回路的电流为

$$i=\frac{E}{R}(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{L/R}})$$

当回路与电源接通时，由于自感电动势的作用，电路中的电流不能立即增至稳态值（即最大值），而是随时间按指数规律逐渐增长，如图所示。随着时间的增加，电流 i 逐渐上升，电流 i 最后趋于稳态值 $\frac{E}{R}$，而自感电动势则逐渐减小，最后趋于零，暂态过程结束。



$t=\dfrac{L}{R}$ 也具有时间的量纲，

把它叫做 RL 电路的时间常数，即 $\tau=\dfrac{L}{R}$

暂态过程小结

- *RL*电路与*RC*电路都具有时间延迟的特性但是又有所不同。
- 电容电压不能突变，而电感电流不能突变，它们的变化过程的快慢取决于电路的时间常数。
- *RC*电路的时间常数是 $\tau = RC$
- *RL*电路的时间常数是 $\tau = \dfrac{L}{R}$

第三节　交流电路

一、正弦交流电的三要素

二、正弦交流电的相量表示法

三、电阻、电感与电容元件在交流电路中的特性

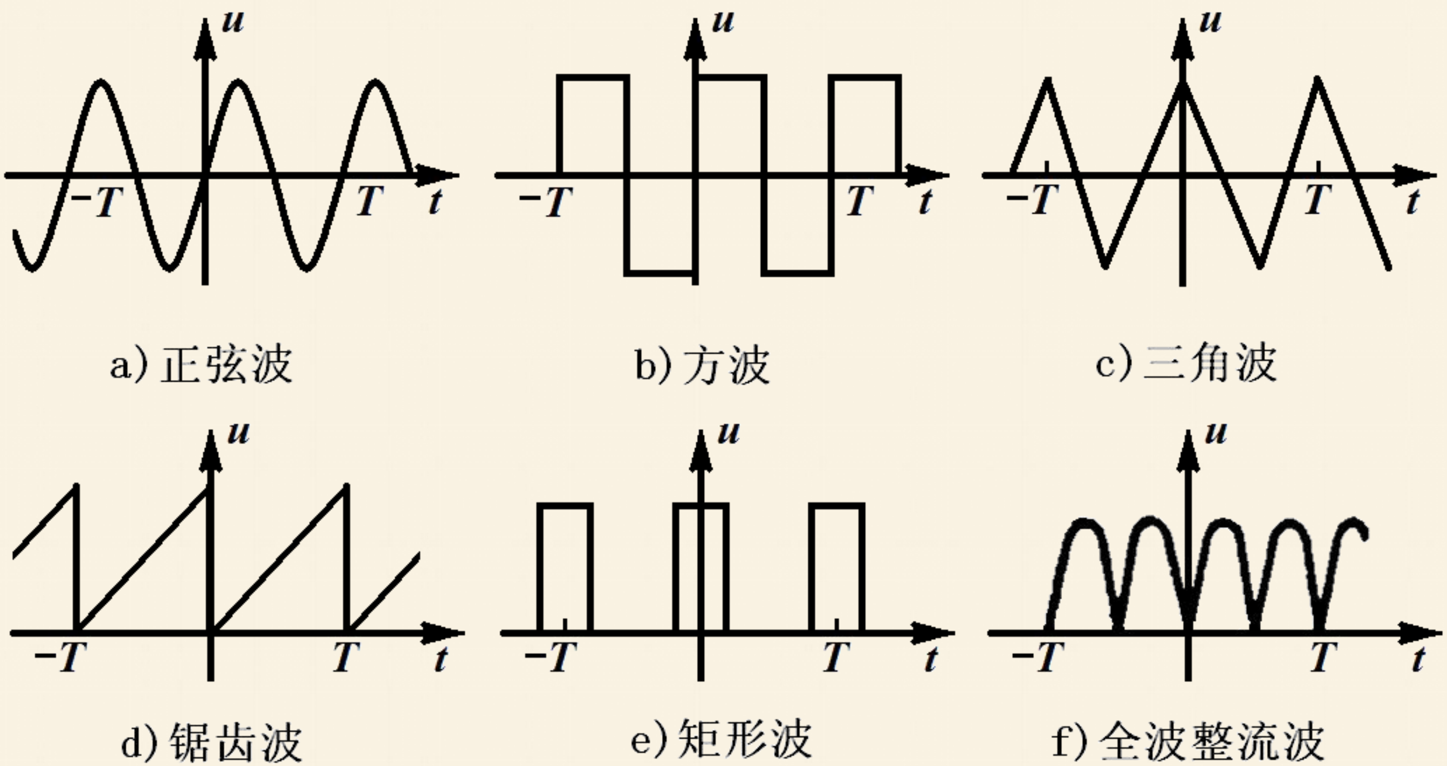
四、*RLC*串联电路及其谐振

五、*LC* 并联谐振回路

六、*RC* 串联电路

正弦交流电的基本概念

各不相同的交流电波形



正弦波和非正弦周期波示例

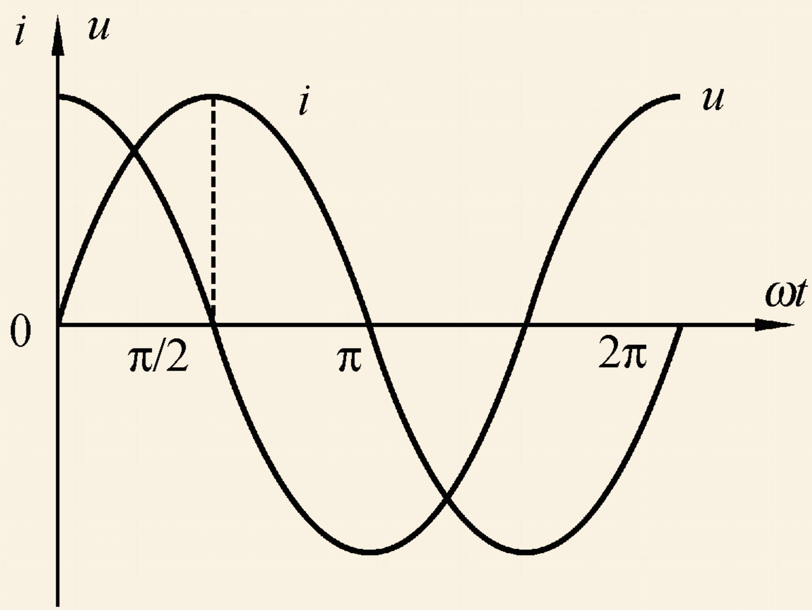
为什么研究正弦交流电？

由高等数学可知，任意有限可积函数均可表示为傅立叶级数。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

故任意的电信号可由一系列正弦信号来表示。

一、正弦交流电的三要素



$$u(t) = U_{\mathrm{m}} \sin(\omega t + \psi_{\mathrm{i}})$$

U_m 为正弦电压的幅值

$(\omega t + \psi)$ 为正弦电压的辐角

ψ 为正弦电压的初相

ω 为正弦电压的角频率

任何一个正弦量都是由它的三个要素——频率、幅值与初相位完全确定，故幅值、初相、角频率称为正弦量的三要素

二、正弦量的相量表示法

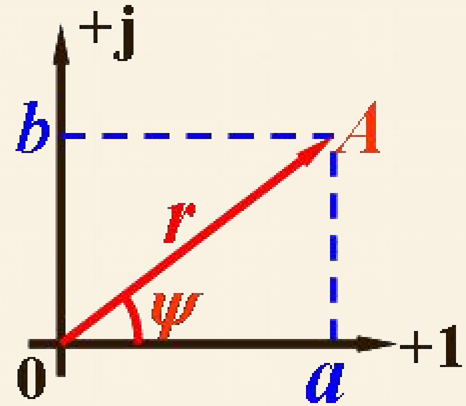
- 在正弦交流电频率已知的情况下，可由它的幅值和初相位两个特征参数确定。因此，正弦交流电也可以用复数表示，复数的模即为正弦交流电的幅值，复数的辐角即为正弦交流电的初相位。
- 为了与一般的复数区别，我们把表示正弦交流电的复数称为相量，并用上面加“·”的大写字母表示。

1. 实质：用复数表示正弦量

复数表示形式

设A为复数:

(1) 代数式$A=a+\mathrm{j}b$



式中: $a=r\cos\psi$，$b=r\sin\psi$

$$\begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2} & \text{复数的模} \\ \psi=\arctan\dfrac{b}{a} & \text{复数的辐角} \end{cases}$$

(2) 三角式

$$A=r\cos\psi+\mathrm{j}r\sin\psi=r(\cos\psi+\mathrm{j}\sin\psi)$$

$$A = r\cos\psi + \mathrm{j}r\sin\psi = r(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)$$

由欧拉公式: $\cos\psi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}}{2}$, $\sin\psi = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi}}{2\mathrm{j}}$

可得: $\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = \cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi$

(3) 指数式 $A = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}$

(4) 极坐标式 $A = r\angle\psi$

$$\boxed{A = a + \mathrm{j}b = r\cos\psi + \mathrm{j}r\sin\psi = r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = r\angle\psi}$$

2. 相量：表示正弦量的复数称相量

设正弦量：$u = U_m \sin(\omega t + \psi)$

相量表示：

$$\dot{U} = U e^{j\psi} = U\angle\psi$$

相量的模=正弦量的有效值

相量辐角=正弦量的初相角

电压的有效值相量

或：

$$\dot{U}_m = U_m e^{j\psi} = U_m\angle\psi$$

相量的模=正弦量的最大值

相量辐角=正弦量的初相角

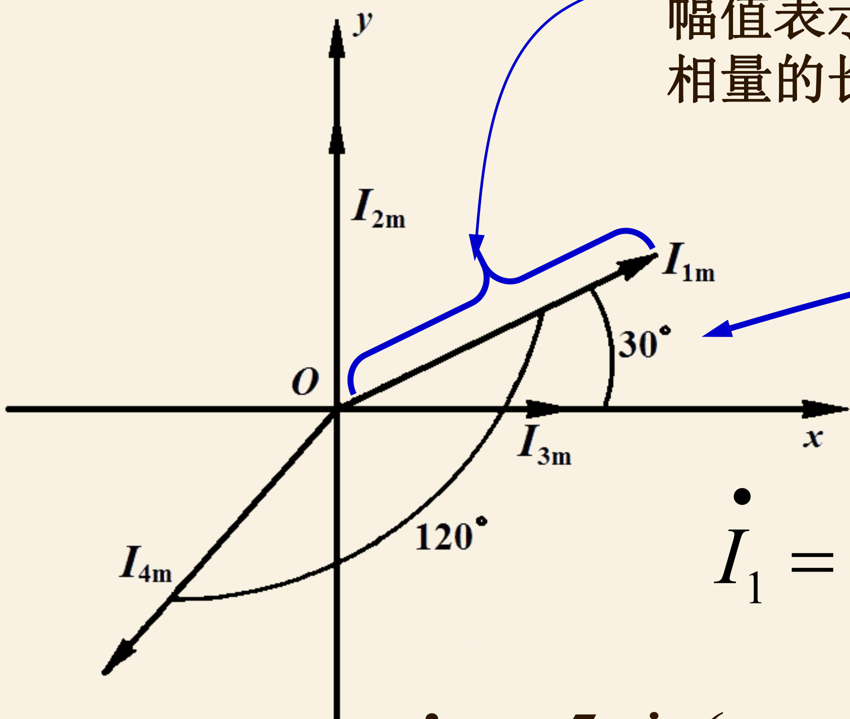
电压的幅值相量

正弦量的相量表示法

幅值表示为相量的长度

$$i_1 = 7.5\sin(\omega t + 30^o)A$$

初相表示为相量的角度



$$\dot{I}_1 = I_1(\cos 30^\circ + \mathrm{j}\sin 30^\circ) = I_1 \mathrm{e}^{\mathrm{j}30^\circ}$$

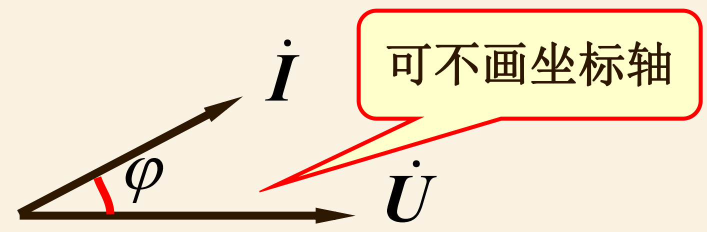
$$i_2 = 5\sin(\omega t + 90^o)A$$

$$i_3 = 5\sin \omega t A \qquad i_4 = 10\sin(\omega t - 120^o)A$$

(1)相量只是表示正弦量，而不等于正弦量。

$$i = I_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi) \cancel{=} I_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\psi} = I_{\mathrm{m}}\underline{/\psi}$$

(2)只有正弦量才能用相量表示，
非正弦量不能用相量表示。



(3)只有同频率的正弦量才能画在同一相量图上。

(4)相量的两种表示形式

相量式: $\dot{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} = U\underline{/\psi} = U(\cos\psi + \mathrm{j}\sin\psi)$

相量图: 把相量表示在复平面的图形

(5)相量的书写方式

- 模用最大值表示，则用符号：$\boxed{\dot{U}_{\mathrm{m}} 、\dot{I}_{\mathrm{m}}}$
- 实际应用中，模多采用有效值，符号：$\boxed{\dot{U} 、\dot{I}}$

如：已知 $u = 220\sin(\omega t + 45°)\mathrm{V}$

则 $\dot{U}_{\mathrm{m}} = 220\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°}\mathrm{V}$ 或 $\dot{U} = \dfrac{220}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}45°}\mathrm{V}$

3. 相量法的应用

(1)同频率正弦量的加减

$$u_1(t)=\sqrt{2}\,U_1\cos(\omega t+\Psi_1)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t})$$

$$u_2(t)=\sqrt{2}\,U_2\cos(\omega t+\Psi_2)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$u(t)=u_1(t)+u_2(t)=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t})+\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})$$

$$=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\,\dot{U}_1 e^{j\omega t}+\sqrt{2}\,\dot{U}_2 e^{j\omega t})=\mathrm{Re}(\sqrt{2}\underbrace{(\dot{U}_1+\dot{U}_2)}_{\dot{U}}e^{j\omega t})$$

结论:

$$u=u_1+u_2$$

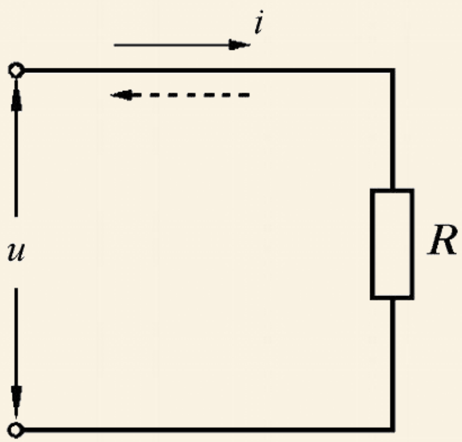
$$\downarrow\qquad\downarrow\qquad\downarrow$$

$$\dot{U}=\dot{U}_1+\dot{U}_2$$

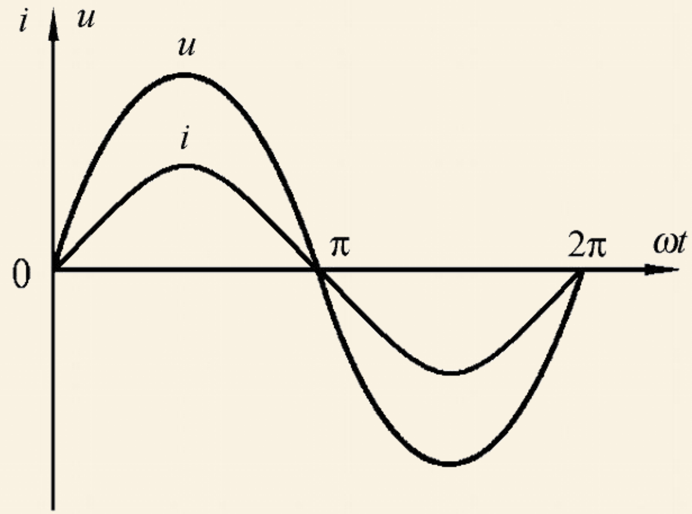
同频正弦量的加减运算变为对应相量的加减运算。

三、*R*、*L*、*C* 在交流电路中的特性

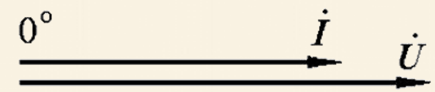
1. 纯电阻电路



(a) 纯电阻电路



(b) 电压与电路波形



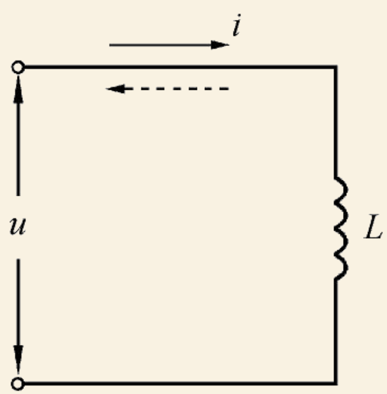
(c) 电压与电流的相量图

伏安关系　$\dot{U} = R\dot{I}$　　电阻　$R = \dfrac{\dot{U}}{\dot{I}}$

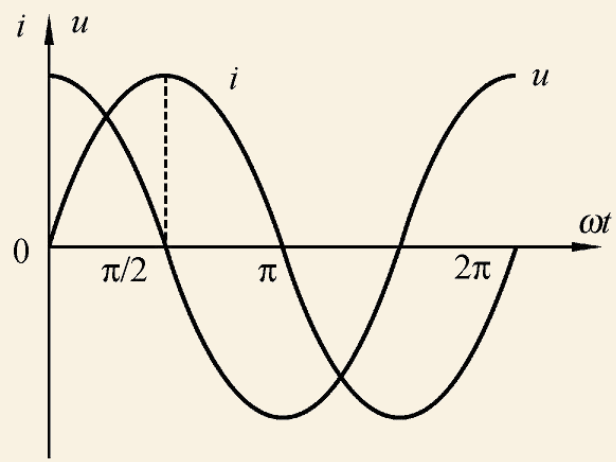
阻抗　$Z_R = R$

2. 纯电感电路 $i = I_m \sin \omega t \longrightarrow u_L = L\dfrac{di}{dt}$

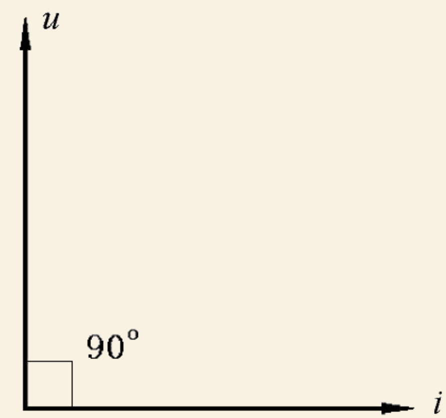
电感电压超前电流90度 $= \omega L I_m \sin(\omega t + 90^o)$



(a) 纯电感电路



(b) 电压与电路波形



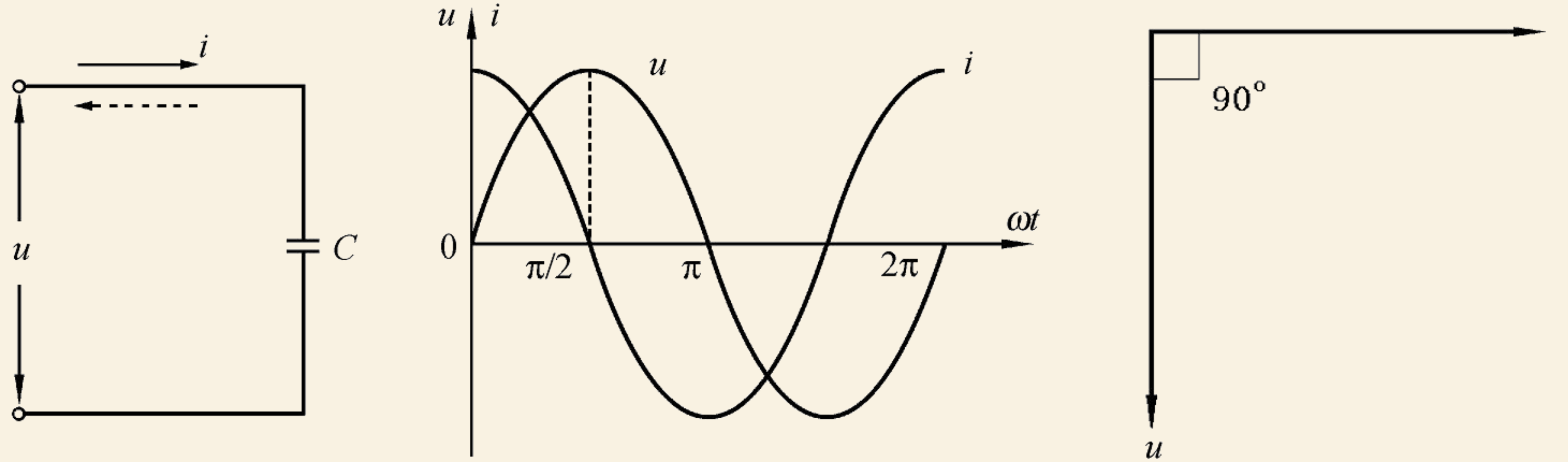
(c) 电压与电流的相量图

伏安关系　　$U_L = j\omega L I$

感抗（电抗）$X_L = \omega L$　　阻抗　$Z_L = j\omega L$　　$\omega \to 0$?

3. 纯电容电路 $u_C = U_{Cm}\sin\omega t \longrightarrow i = C\dfrac{du_C}{dt}$

电容电压滞后电流90度 $= \omega C U_{Cm}\sin\left(\omega t + 90^o\right)$

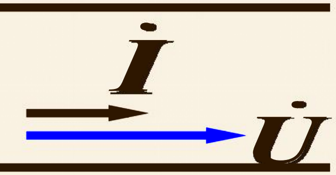
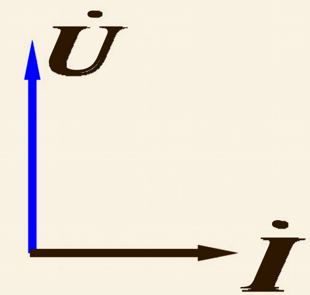
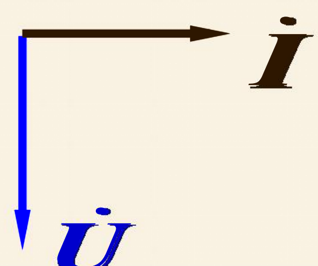


(a) 纯电容电路　(b) 电压与电路波形　(c) 电压与电流的相量图

伏安关系 $\dot{U}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega C}\dot{I} = -\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$

容抗（电抗）$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$　阻抗 $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C}$　$\omega \to 0$?

单一参数电路中电压、电流的基本关系

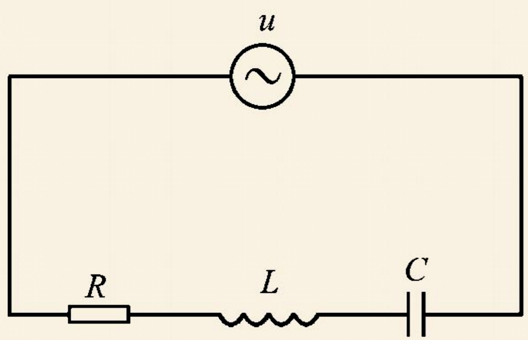
参数	阻抗	基本关系	相量式	相量图
R	R	$u = iR$	$\dot{U} = \dot{I}R$	
L	$\mathrm{j}\omega L$	$u = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = \mathrm{j}X_L\dot{I}$	
C	$-\mathrm{j}\dfrac{1}{\omega C}$	$i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$	$\dot{U} = -\mathrm{j}X_C\dot{I}$	

四、RLC 串联电路及串联谐振

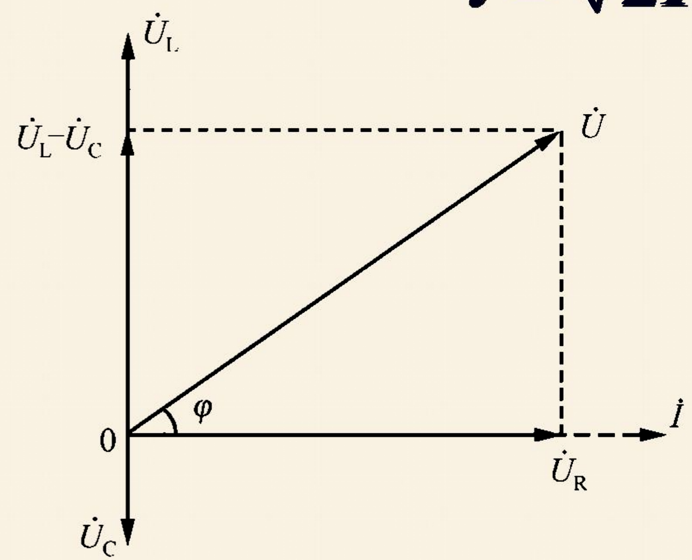
有效值

1. 电路分析

$$i = \sqrt{2} I \sin \omega t$$



(a) RLC 串联电路



(b) 电流与电压的相量图

$$\dot{U}_R = \dot{I} R$$

$$\dot{U}_L = \dot{I} X_L$$

$$\dot{U}_C = \dot{I} X_C$$

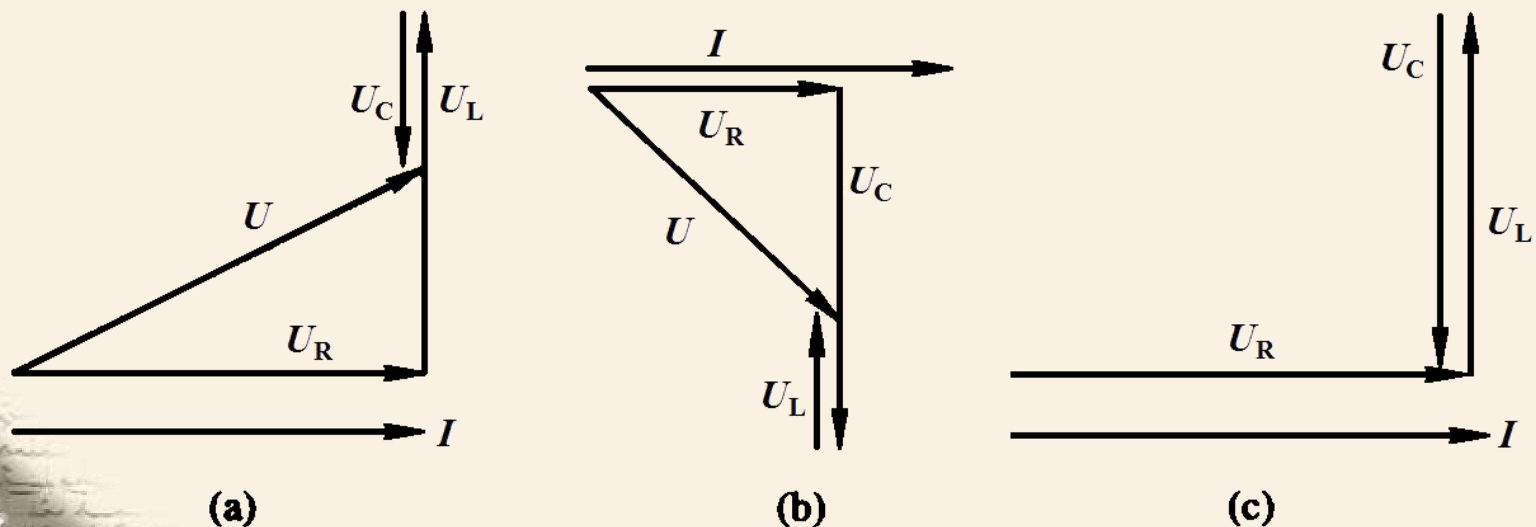
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

注意：电阻电压与电流同相，电感电压超前电流90度，电容电压滞后电流90度。相量关系如图所示。

总电压有效值为 $U=\sqrt{U_R^2+(U_L-U_C)^2}=IZ$

电路的总阻抗为 $Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$

$$\phi=\arctan\frac{U_L-U_C}{U_R}=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}$$



由矢量图可见电路有如下特点：

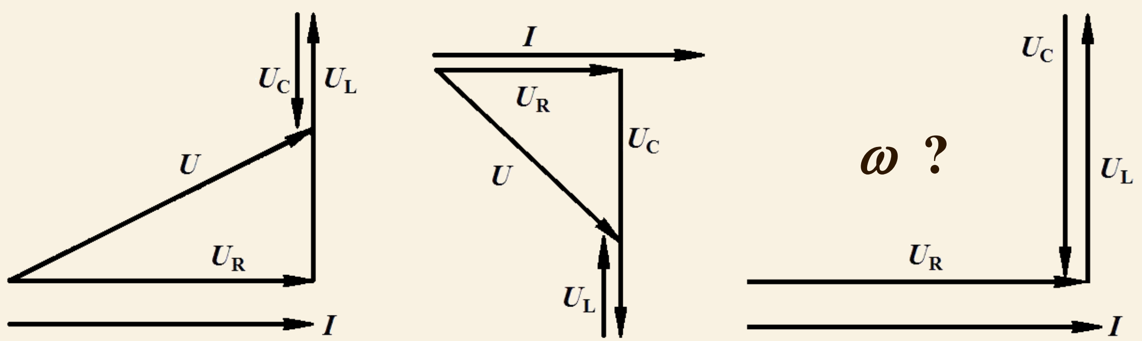
- 当 $U_L > U_C$ 时，$\phi > 0$，总电压超前于电流，电路显电感性。
- 当 $U_L < U_C$ 时，$\phi < 0$，总电压滞后于电流，电路显电容性。
- 当 $U_L = U_C$ 时，$\phi = 0$，总电压与电流同相位，电路显纯电阻。

2. 串联谐振

由矢量图可见，当 $X_L - X_C = \omega_0 L - \dfrac{1}{\omega_0 C} = 0$ 时

谐振条件

*RLC*电路的电抗最小，并且电路显现出纯电阻的特性，此时电路就处于串联谐振的状态。



(a) (b) (c)

电路发生串联谐振的条件为：

$$X_L = X_C \qquad 2\pi f L = \frac{1}{2\pi f C}$$

由上式得到电路发生串联谐振的角频率为：

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$ ——谐振频率

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ ——谐振角频率

谐振是电路本身的特性，所以，要使电路达到谐振可以通过调节电路参数和电源频率来实现。如：调节L、C或者电源的频率f。

*RLC*串联谐振的特点：

因为串联谐振发生在 $X_L=X_C$ 处，所以，谐振时电路的阻抗最小，呈电阻性。

$$|Z_0| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$$

由于阻抗最小，所以，在电压有效值一定时，电路中电流获得最大值。

$$I_0 = \frac{U}{|Z_0|} = \frac{U}{R}$$

⌖ 串联谐振的应用：

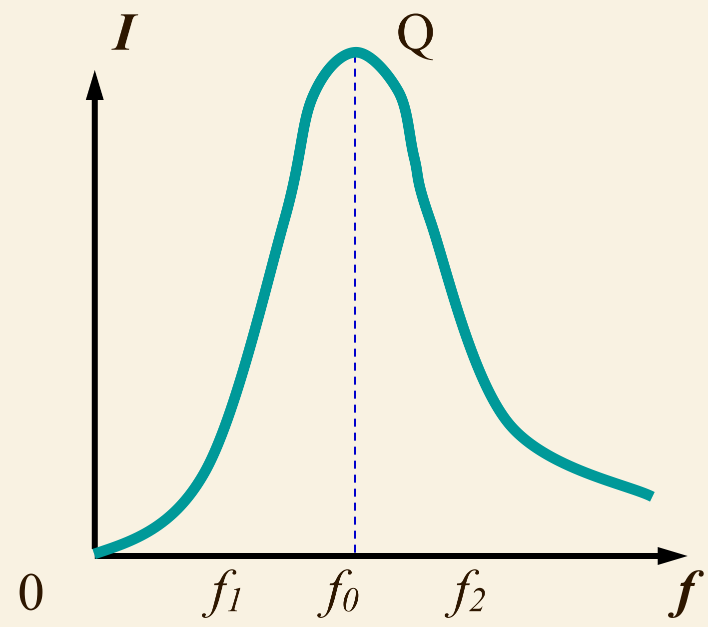
串联谐振在无线电工程中应用广泛，利用谐振的选择性对所需频率的信号进行选择和放大。而对其它不需要的频率加以抑制。

串联谐振电路的总阻抗为

$$Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$$

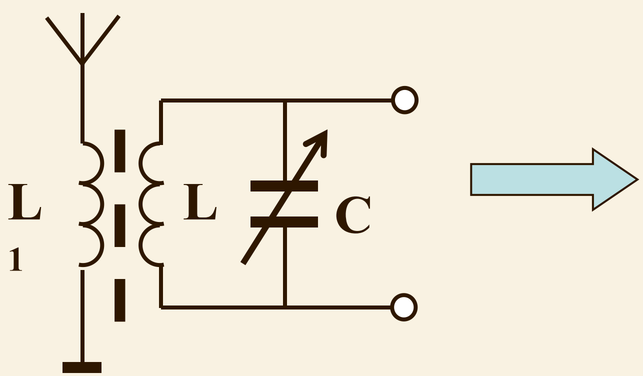
串联谐振电路的电流为

$$I=\frac{U}{|Z|}=\frac{U}{\sqrt{R^2+(\omega L-1/\omega C)^2}}$$

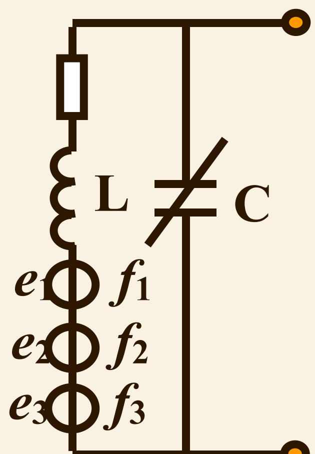


※ 谐振选频的应用原理：

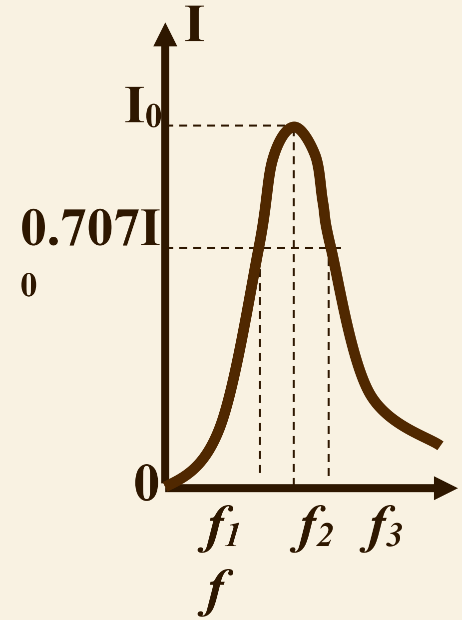
- 不同频率的信号—天线接受—电路中感应出相应的电动势e1，e2,…。
- 改变*C*，对所需频率调到串联谐振，此时*LC*回路中该频率f_0的电流最大，在电容两端的该频率的电压较高。
- 其他没有谐振的信号引起的电流很小。达到选择信号和抑制干扰的目的。



收音机的调谐接收电路



等效电路



五、*LC* 并联谐振回路

1. 电路分析

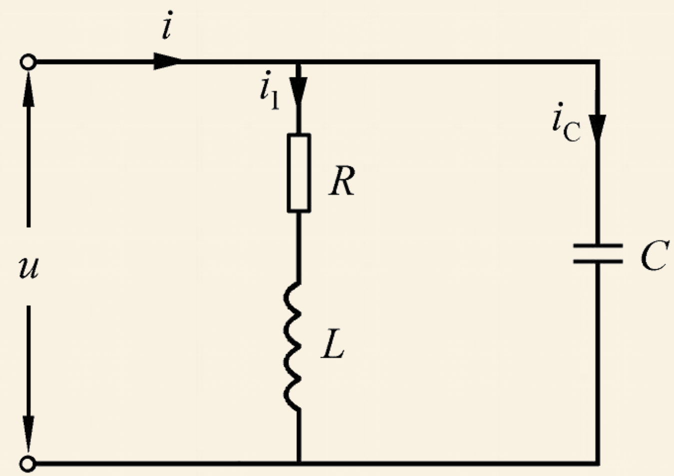
对于电容支路 $I_C = \dfrac{U}{X_C}$

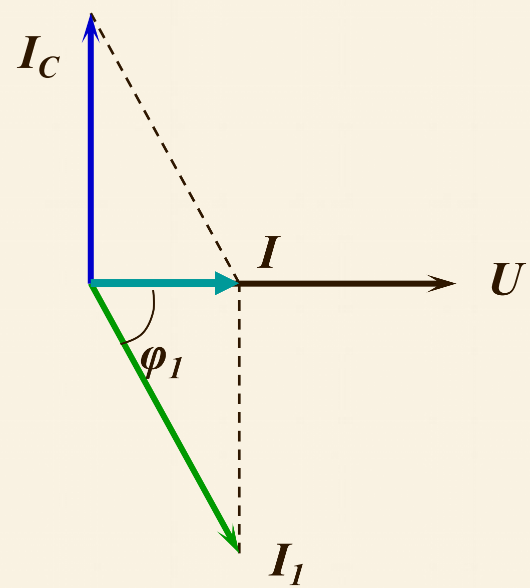
对于电感支路

$$I_1 = \frac{U}{Z_1} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}$$

$$\sin\phi_1 = \frac{X_L}{Z_1}$$

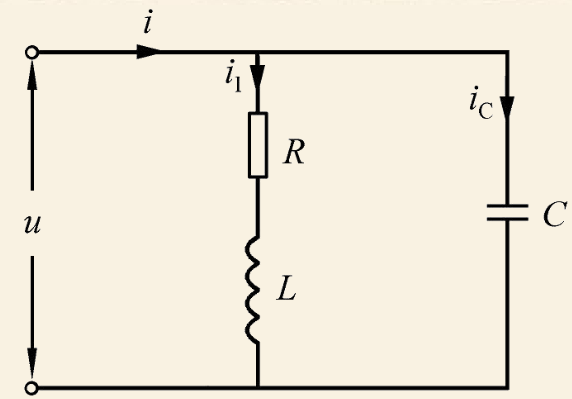
电路总电流为 $I = I_1 + I_C$





⌖ 并联谐振时，电压 *u* 与电流 *i* 同相，如相量图所示。

由相量图可知 $I_1 \sin\varphi_1 = I_C$

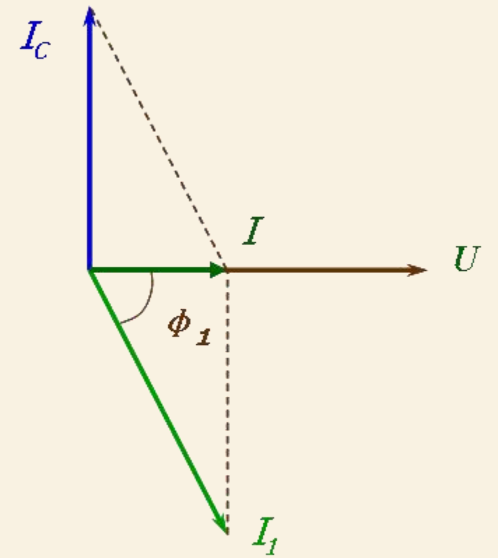


由于

$$I_1 = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{X_L}{Z_1} = \frac{2\pi f L}{\sqrt{R^2 + (2\pi f L)^2}}$$

$$I_C = \frac{U}{X_C} = 2\pi f C \cdot U$$



得到：

$$f = f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}$$

2. 谐振频率

通常电阻 R 很小，故一般谐振时：

$$2\pi f_0 L = \omega_0 L >> R$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}} \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

当不考虑回路中电阻的影响时，LC并联回路的谐振频率为：

$$\omega_0 \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad f_0 \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

LC 并联谐振回路的阻抗

$$Z=\frac{\frac{1}{j\omega C}(R+j\omega L)}{\frac{1}{j\omega C}+(R+j\omega L)}=\frac{R+j\omega L}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}$$

通常电阻很小，谐振时一般有**$\omega L>>R$**，则上式为

$$Z\approx\frac{j\omega L}{1+j\omega RC-\omega^2 LC}=\frac{1}{\frac{RC}{L}+j(\omega C-\frac{1}{\omega L})}$$

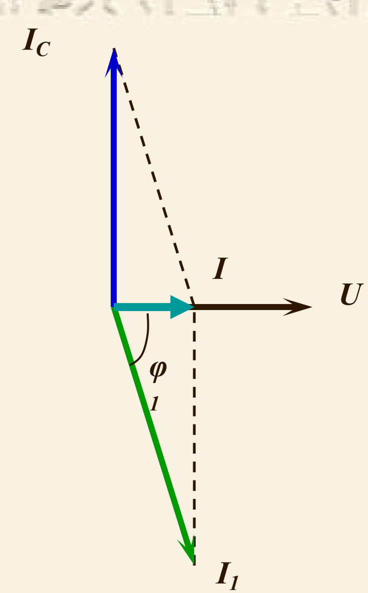
谐振时电路的阻抗为

$$\left|Z_0\right|=1\Big/(\frac{RC}{L})=\frac{L}{RC}$$

达到最大值，比非谐振时要大。

3. 品质因数

$$|Z_0| = \frac{L}{RC} = \frac{2\pi f_0 L}{R(2\pi f_0 C)} \approx \frac{(2\pi f_0 L)^2}{R} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$



由于 $2\pi f_0 L >> R$

$$\frac{1}{2\pi f_0 C} \approx 2\pi f_0 L << \frac{(2\pi f_0 L)^2}{R} = \frac{(\omega_0 L)^2}{R}$$

于是

$$X_C \approx X_L << Z_0$$

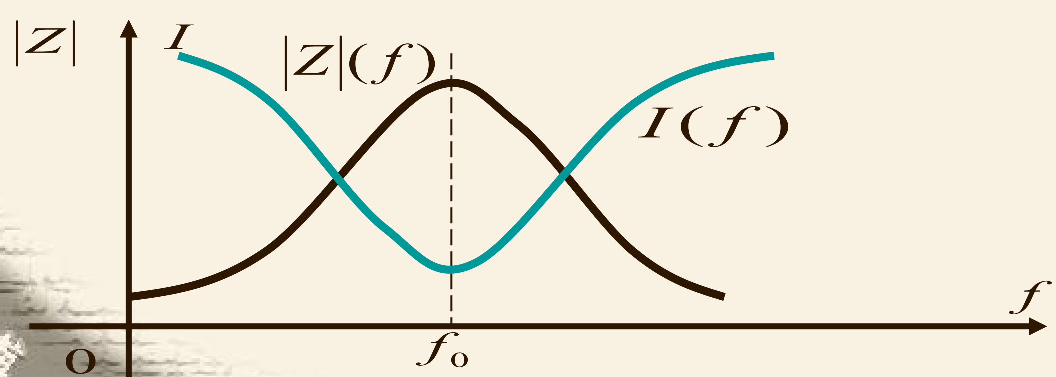
$I_1 \approx I_C >> I_0$　因此，并联谐振也称电流谐振

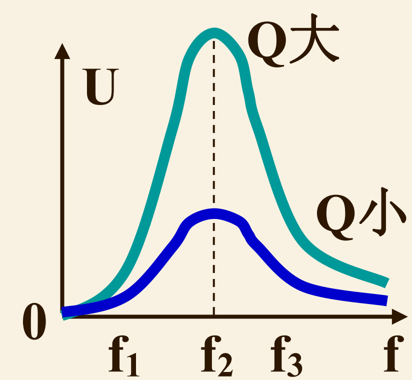
I_C或I_1与总电流I_0的比值为并联谐振电路的品质因数

$$Q = \frac{I_1}{I_0} = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} \qquad Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

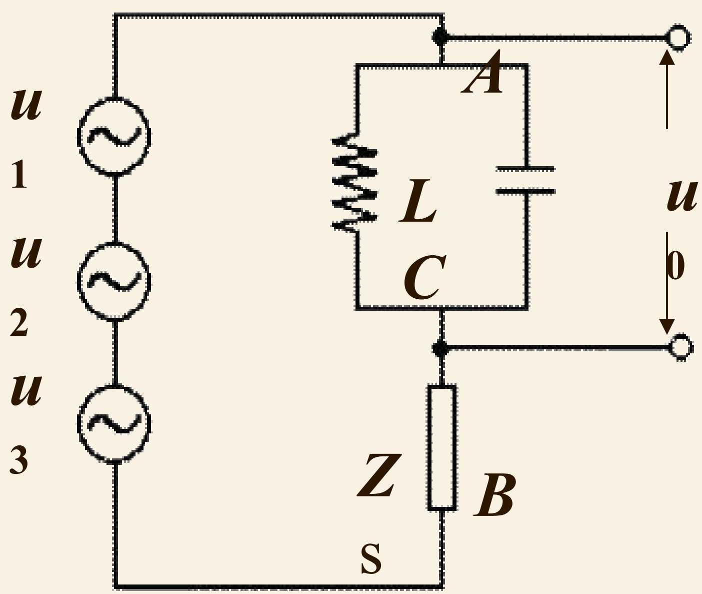
⌖ 并联谐振电路有如下特点：

- 谐振时，电感支路的电流与电容支路的电流大小近似相等，相位近似相反，比总电流大的多（*Q* 倍）。
- 谐振时，复阻抗呈纯电阻性，且阻抗最大，得到的谐振电压也最大。
- 在非谐振时，则电路端电压较小。这种特性也具有选频作用，且*Q*越大选频作用越强。





4. *LC* 并联选频电路



只有与*LC*电路谐振频率相同的外加信号在*AB*端得到最大的输出，因而具有选频特性。

谐振小结

*RLC*发生串联谐振的条件为：$f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

*RLC*串联谐振的特点：

1 谐振时电路的阻抗最小，呈电阻性；

2 电路中电流获得最大值。

LC 并联谐振的条件为: $f_0 \approx \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

并联谐振电路有如下特点:

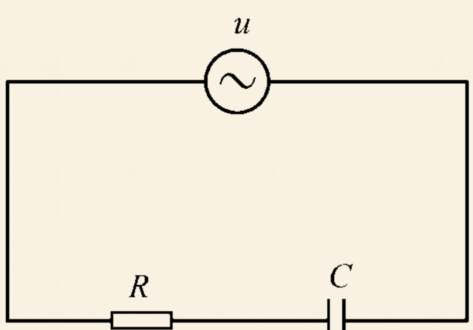
1 支路比总电流大的多（*Q* 倍）；

2 复阻抗呈纯电阻性，且阻抗最大。

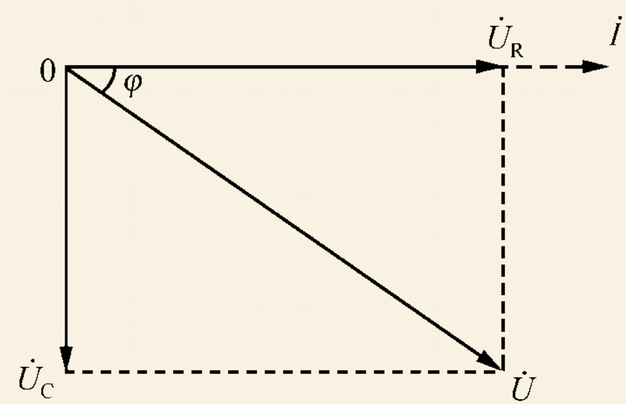
六、RC串联电路

电容上的电压与总电压之比为 $$\frac{\dot{U}_{\mathrm{C}}}{\dot{U}}=\frac{\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}{R+\frac{1}{\mathrm{j}\omega C}}=\frac{1}{1+\mathrm{j}\omega RC}$$

因为 $\omega=2\pi f$，由上式可以看出，信号频率越高，$\frac{U_{\mathrm{C}}}{U}$ 越小；反之频率越低，$\frac{U_{\mathrm{C}}}{U}$ 越大。

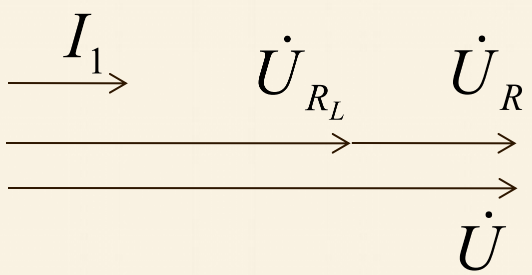


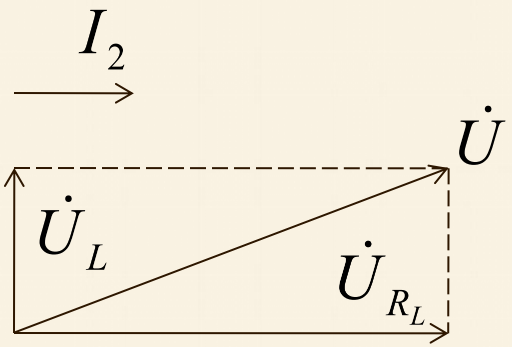
(a) *RC* 串联电路



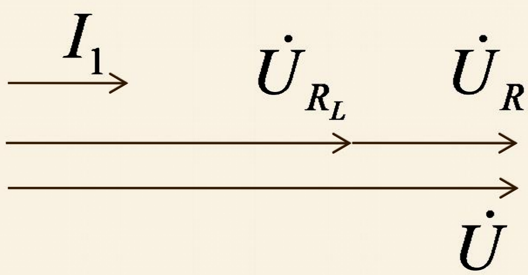
(a) 电流与电压的相量图

题1-6



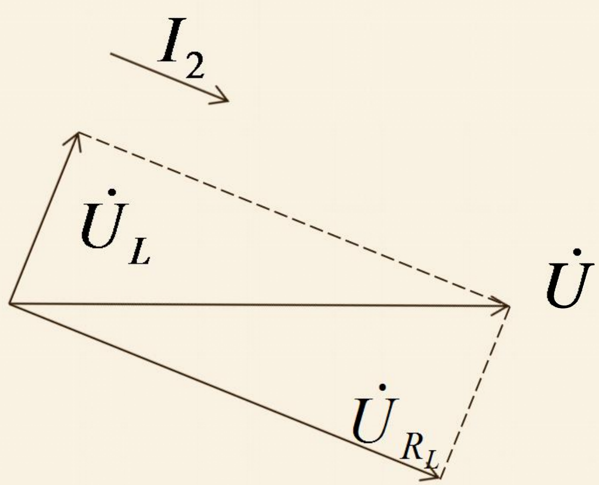


题1-6



$$|\dot{U}_{R_L}| = |\dot{U}|\frac{R_L}{R_L + R}$$

$$P = \frac{|\dot{U}_{R_L}|^2}{R_L}$$



$$|\dot{U}_{R_L}| = |\dot{U}| \cdot \cos\varphi$$

$$= |\dot{U}| \cdot \frac{R_L}{\sqrt{R_L{}^2 + (\omega L)^2}}$$

$$P = \frac{|\dot{U}_{R_L}|^2}{R_L}$$