



第1章 信号与系统概述

主要内容

- ❖ 信号的概念、分类、性质、基本信号。
- ❖ 信号的基本运算：时移、反折、尺度变换、……
- ❖ 单位冲激函数和单位阶跃函数，及其主要性质。
- ❖ 系统概念、系统性质。

1.0 引言

- ❖ 在这一节开始，我们将学习到一种描述信号与系统的语言和一整套分析它们的方法，而这种语言和方法能很好地应用于信号与系统研究领域所要解决的问题。
- ❖ 本章，将引入信号与系统的数学描述及其表示入手来建立这样一个分析体系，随后几章，凭借这个基础来建立和描述另一些概念和方法，从而加强对这门学科的理解、分析和解决问题的能力。
- ❖ 基础，从1开始……

信号与系统

❖ 什么是信号？

信号是消息的表现形式与传送载体，消息是信号的传送内容。例如电信号传送声音、图像、文字等。

❖ 什么是系统？

系统是由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体。如太阳系、通信系统、控制系统、经济系统、生态系统等。

信号的描述

信号的描述

- ❖ 物理上： 信号是信息寄寓变化的形式
- ❖ 数学上： 信号是一个或多个变量的函数
- ❖ 形态上： 信号表现为一种波形

自变量

- ❖ 时间、位移
- ❖ 周期、频率、幅度、相位

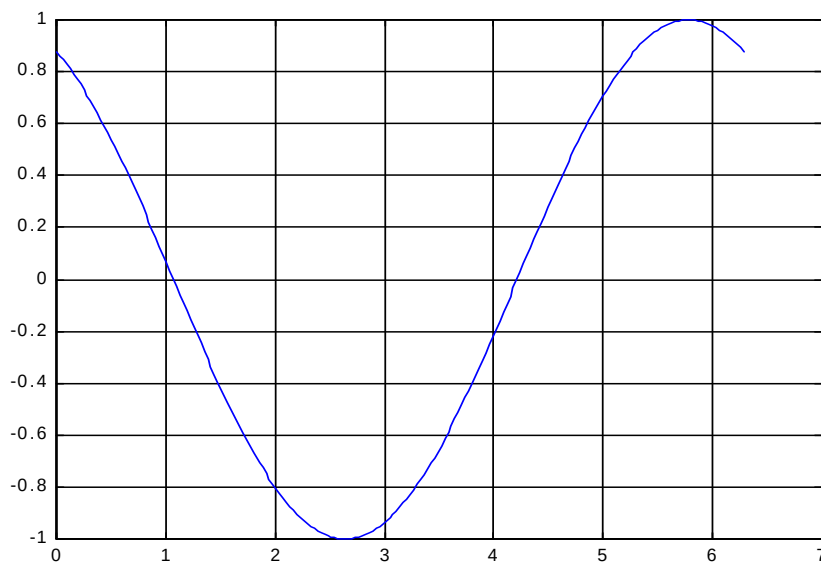
信号的数学描述——表达式

$$y = A \cos(x + 0.5)$$

周期= 2π

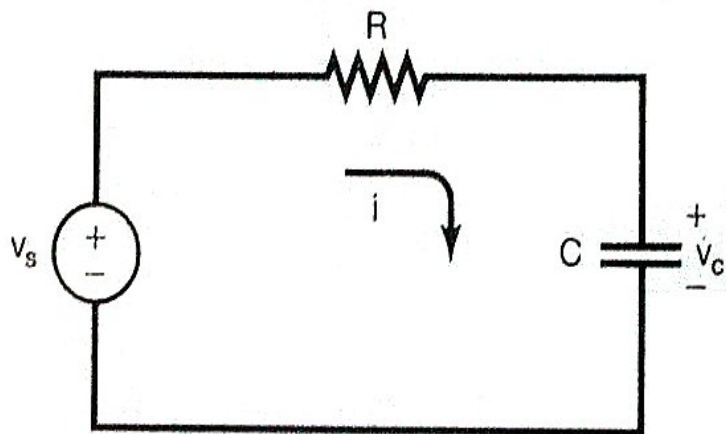
相位= 0.5

幅度= A



RC电路

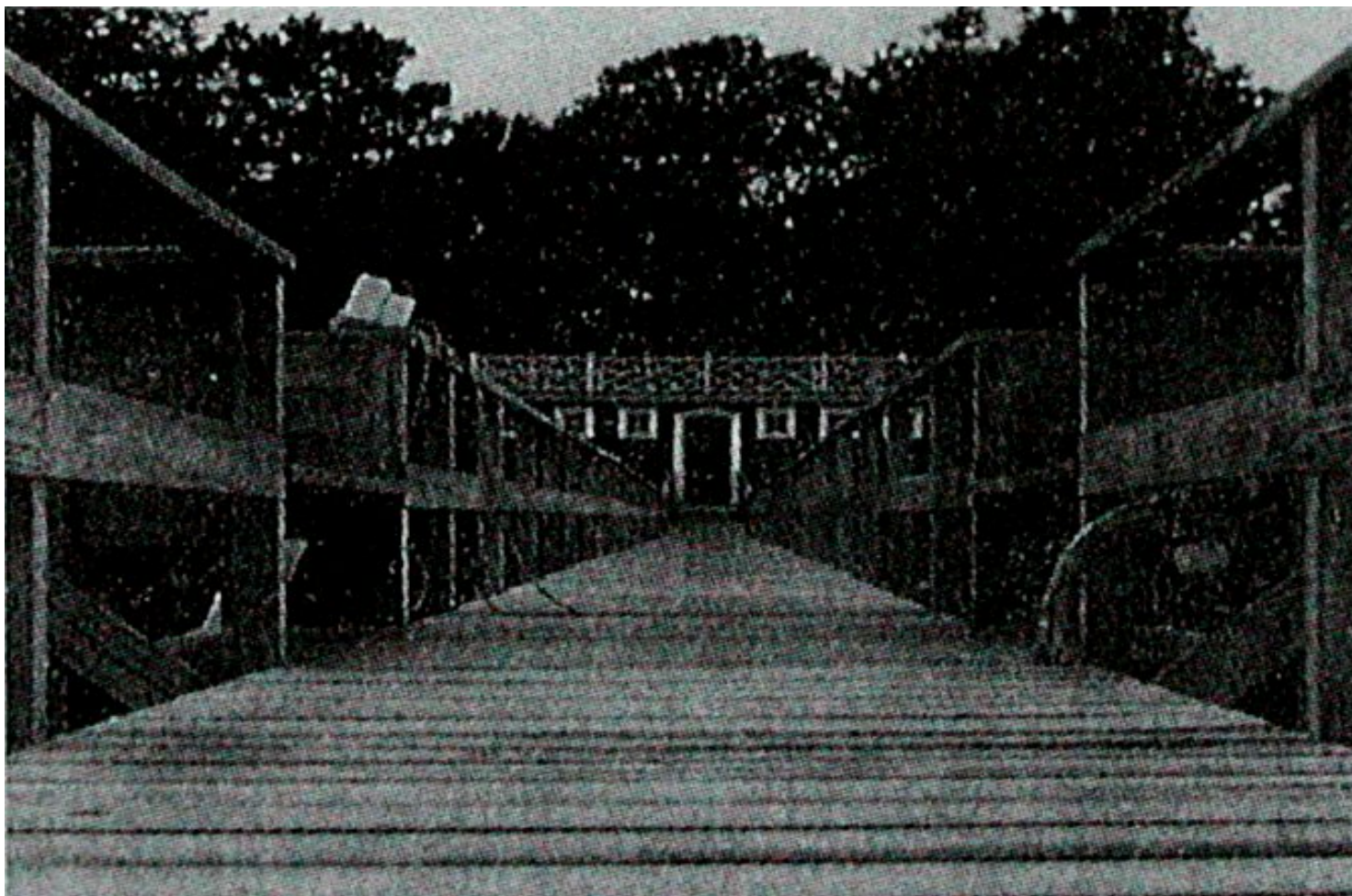
- 信号可以描述范围极为广泛的物理现象。信号所包含的信息总是寄寓在某种变化形式的波形之中。



含有电压源 V_s 和电容器电压 V_c 简单电路

电压源 V_s 和电容器上的电压 V_c 都是随时间 t 变化的信号

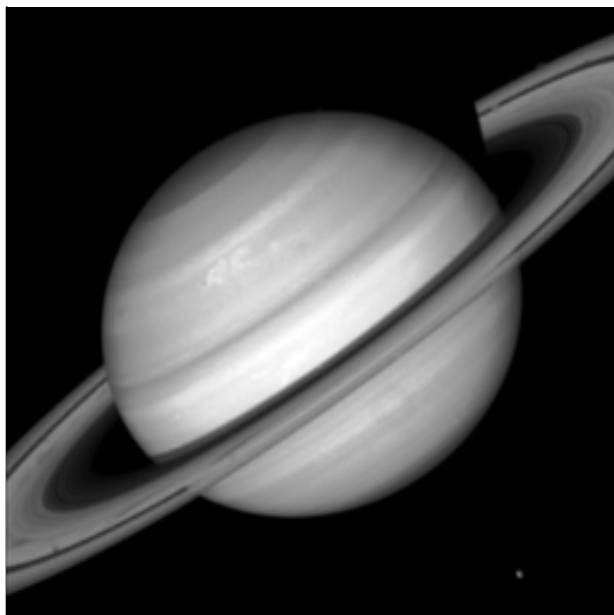
亮度、灰度随空间变化的图象



黑白图片是亮度随空间位置变化的二维信号

图象携带信息特征——轮廓

Original Saturn Image



Edge Map



Select an Image:
Saturn

Edge Detection Method:
Sobel

Threshold: ☒ Automatic
☐

Direction: Both

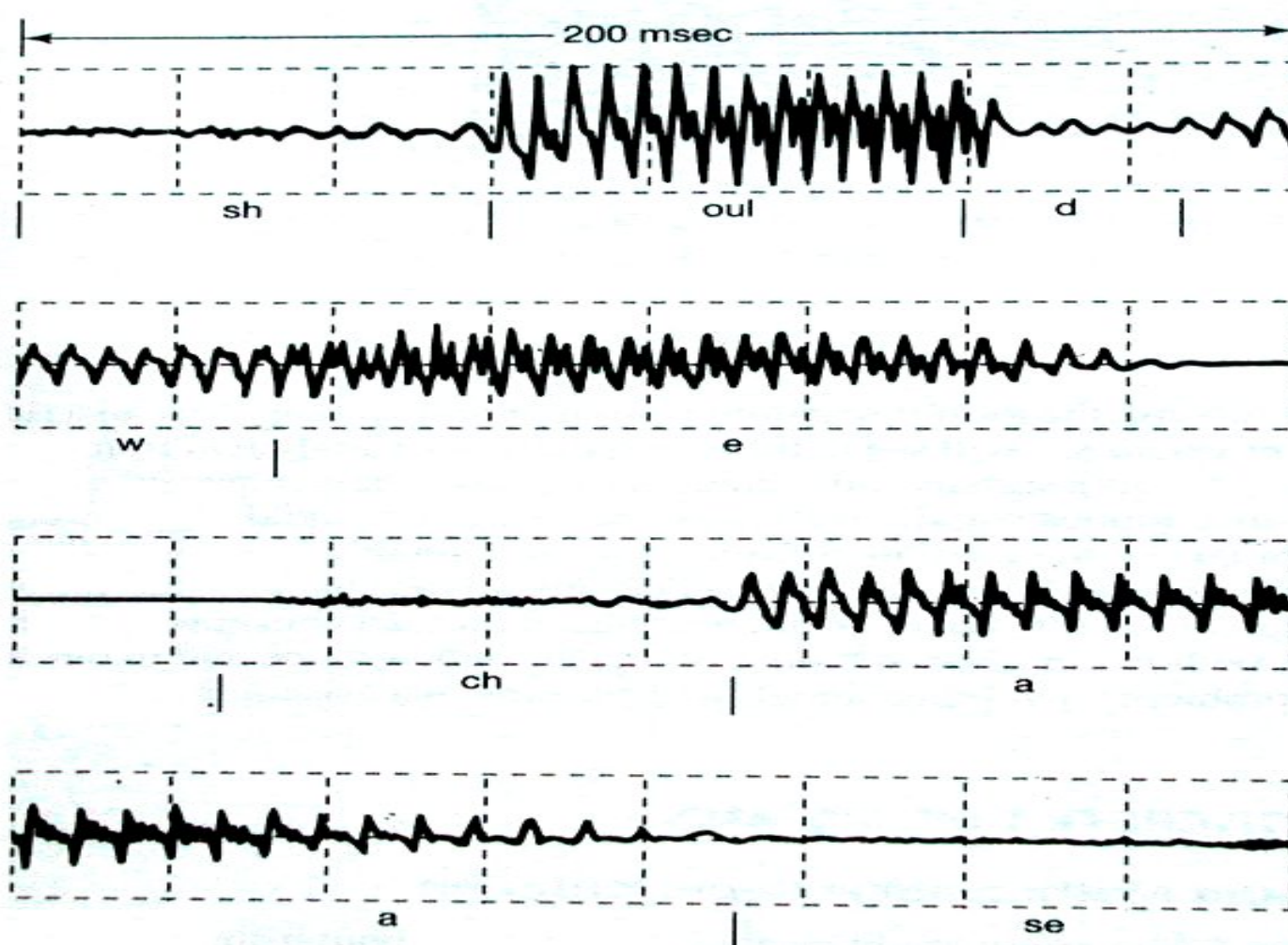
The threshold is 0.06281.

Apply

Info

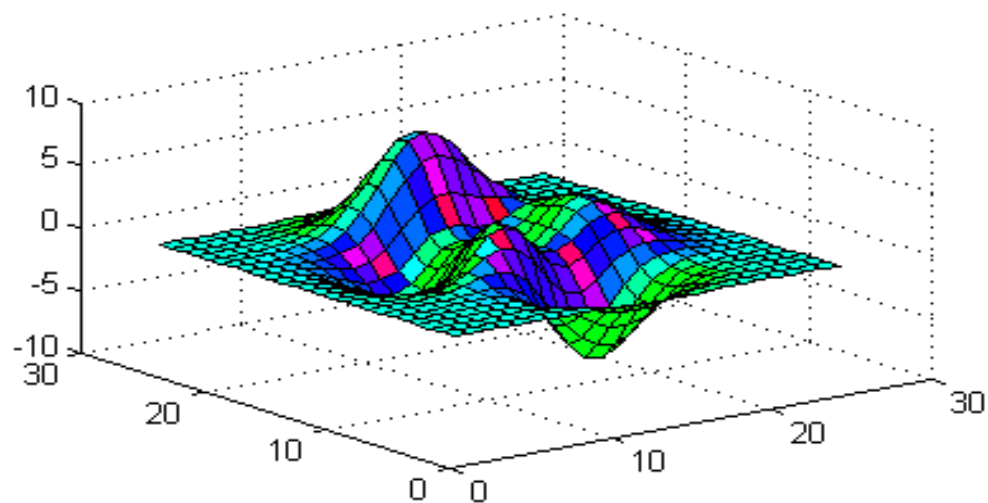
Close

语音波形



不同语音对应不同的声压变化波形。听懂语言对应特定波形。

波形的三维描述



```
z=peaks(25);  
surf(z)  
colormap(hsv)
```

Plot Type

surf

Shading

faceted

Colormap

hsv

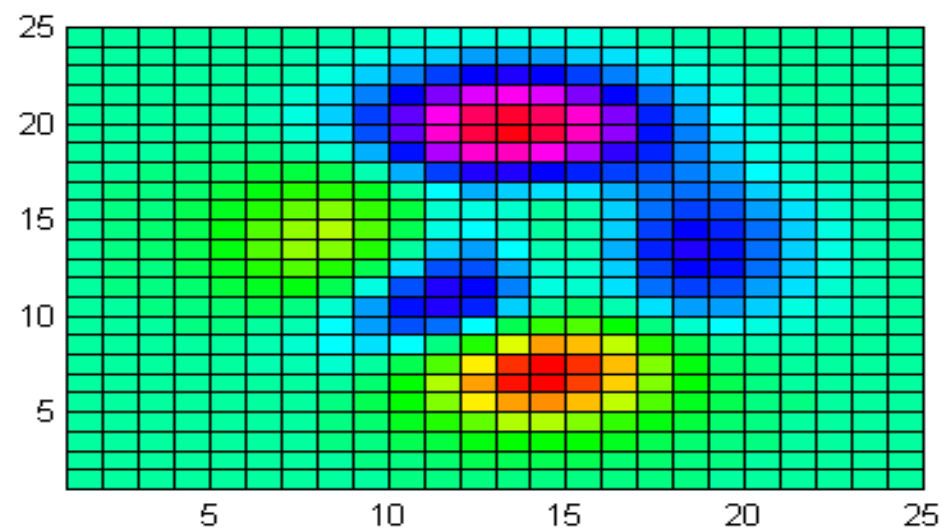
Axis

on

Info

Close

等高面的表示



Command Window

```
z=peaks(25);  
pcolor(z)  
colormap(hsv)
```

Plot Type
pcolor

Shading
faceted

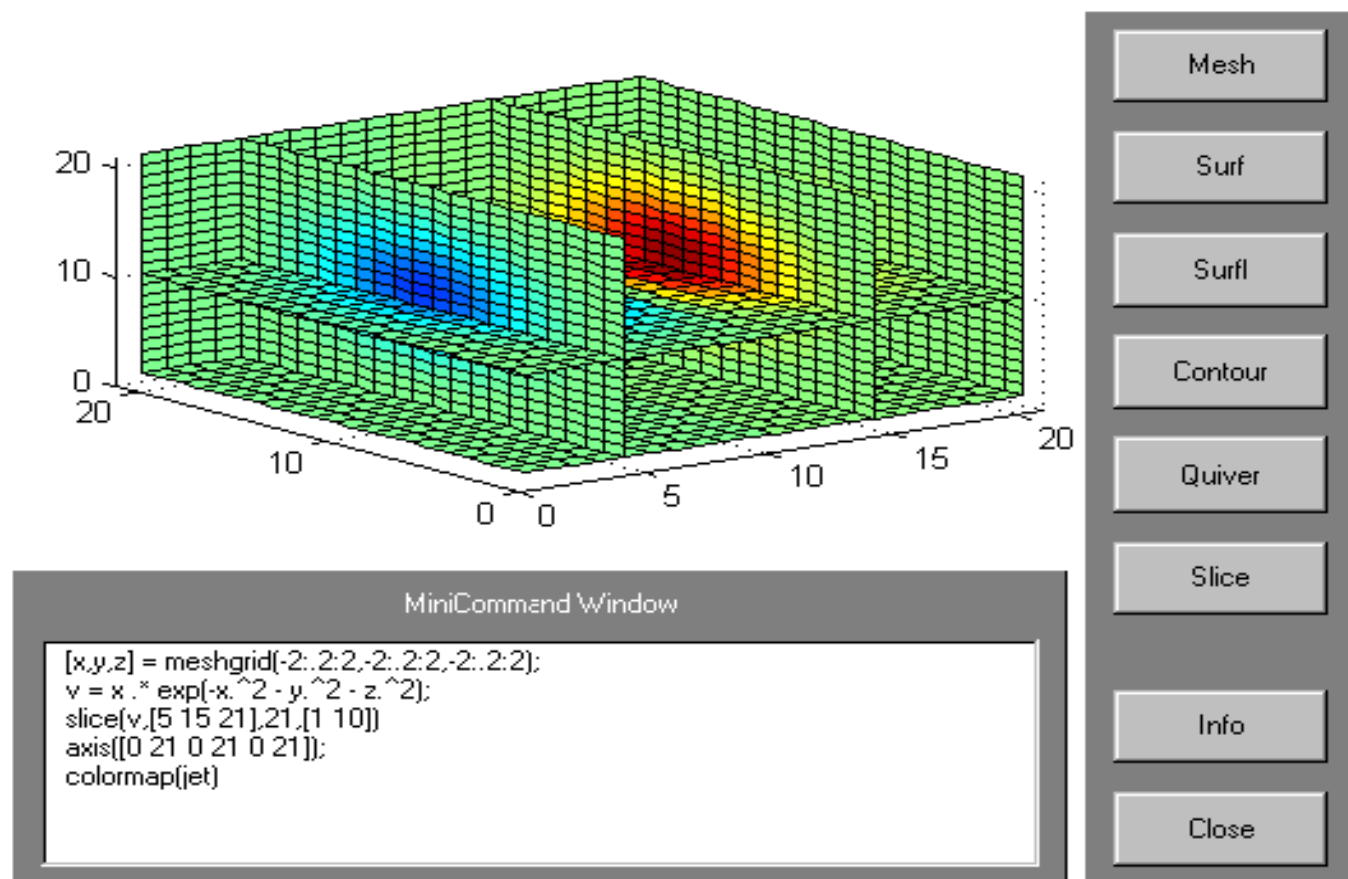
Colormap
hsv

Axis
on

Info

Close

横切面的表示



信号的分类

信号的分类方法很多，可以从不同的角度对信号进行分类。在信号与系统分析中，我们常以信号所具有的时间函数特性来加以分类。

- ☐ 确定信号与随机信号
- ☐ 连续时间信号与离散时间信号
- ☐ 周期信号与非周期信号
- ☐ 能量信号与功率信号
- ☐ 实信号与复信号等

💣 在数学上，信号可以表示为一个或者多个变量的函数。本书的讨论范围，仅限于单一变量的函数，一般用时间来表示自变量。

❖ 两种基本类型的信号：

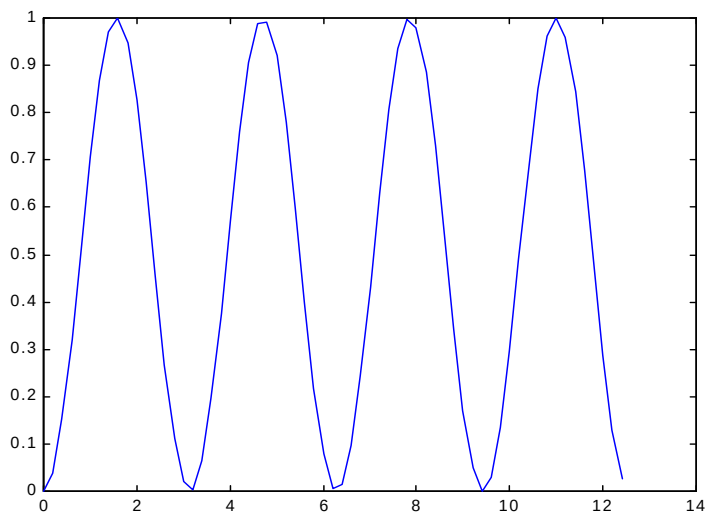
连续时间信号 $x(t)$

离散时间信号 $x[n]$

💣 $x[n]$ 仅仅在自变量的整数值上有定义，因此， $x[n]$ 也称为离散时间序列。

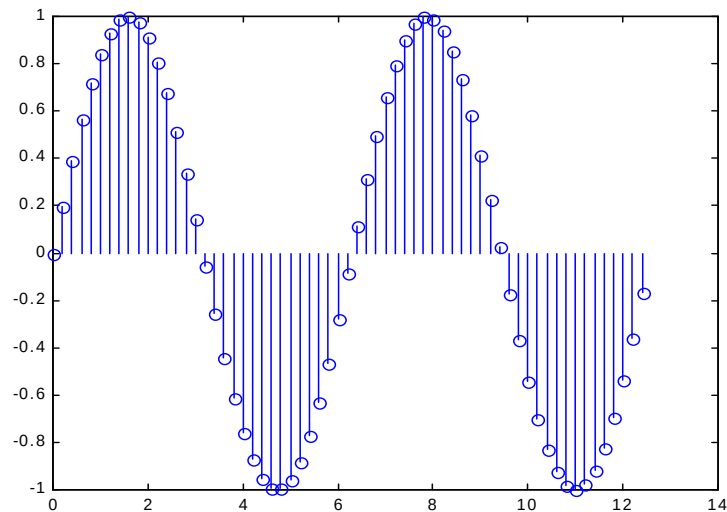
1.1 连续时间和离散时间信号

连续时间信号 $x(t)$



➤如果在所讨论的时间间隔内，对于任意时间值（除若干不连续点外），都可给出确定的函数值，这样的信号称为连续时间信号。

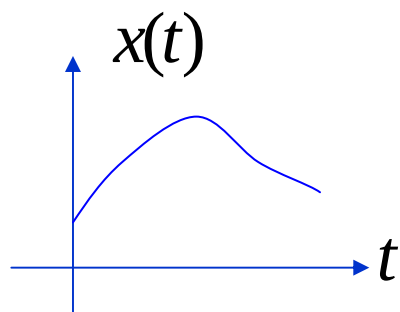
离散时间信号 $x[n]$



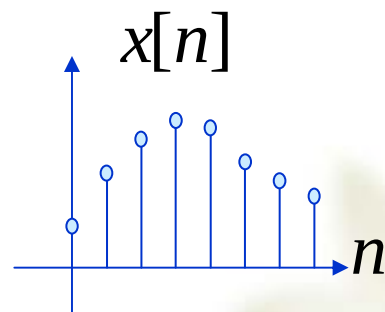
➤在时间的离散点上信号才有值与之对应，其它时间无定义，这样的信号称为离散时间信号。

❖ 信号的图形表示：

我们将并行的讨论离散时间信号和连续时间信号



连续时间信号 $x(t)$



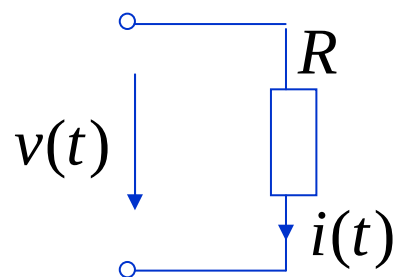
离散时间信号 $x[n]$

1.1.2 信号能量与功率

在很多应用中，信号是直接与在某一物理系统中具有功率和能量的一些物理量有关的。

瞬时功率：

$$p(t) = v(t)i(t) = Ri^2(t) = \frac{1}{R}v^2(t)$$



在时间间隔 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内消耗的总能量、平均功率就是：

$$\int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt$$

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} p(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} v^2(t) dt$$

将电路的术语功率和能量引申开，我们就可以对任何连续时间信号 $x(t)$ 或离散时间信号 $x[n]$ 采用类似的定义，把信号在复数范围内定义，这样，一个连续时间信号 $x(t)$ 在 $t_1 \leq t \leq t_2$ 内的总能量就定义：

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \quad |x| \text{记做} x \text{的模}$$

其平均功率用 $t_2 - t_1$ 除就可得到。相类似，在 $n_1 \leq n \leq n_2$ 内的离散时间信号 $x[n]$ 的总能量就定义为：

$$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2 \quad \text{其除以} n_2 - n_1 + 1 \text{就得到该区间的平均功率。}$$

✿这里所谓的“功率”和“能量”是否与真正的物理量相联系是无关的。

- ❖ 在很多系统中，我们关心的是信号在一个无穷区间内（ $-\infty < t < +\infty$ 或 $-\infty < n < +\infty$ ）的功率和能量：

连续时间信号能量：

$$E_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt$$

离散时间信号能量：

$$E_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

对某些积分、求和可能不收敛，如 $x(t)$ 或 $x[n]$ 在全部时间内都为某一非零的常数值就是这样。这样的信号具有无限的能量，而 $E_{\infty} < \infty$ 的信号具有有限的能量。

❖ 在无限区间内的平均功率，定义为：

连续时间信号平均功率：

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$$

离散时间信号平均功率：

$$P_{\infty} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

利用这些定义，就可以区分三种重要的信号：

1. 信号具有有限的总能量，即 $E_{\infty} < \infty$ 。这种信号的平均功率必然为零，由平均功率的定义看出

$$P_{\infty} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E_{\infty}}{2T} = 0$$

2. 平均功率 P_{∞} 有限的信号。根据上式，如果 $P_{\infty} > 0$ ，就必然有 $E_{\infty} = \infty$ 。因为，单位时间内有某一个非零的平均能量（也就是非零功率），那么在无限区间内积分或求和就必然得出无限大的能量值。例如常数信号 $x[n]=4$ 就是无限能量，平均功率 $P_{\infty}=16$ 。

(问:如果总能量已知是无限的，平均功率必有限?)

3. 第三类信号就是 E_{∞} 和 P_{∞} 都不是有限的。

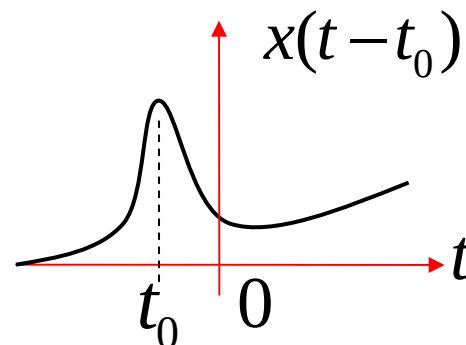
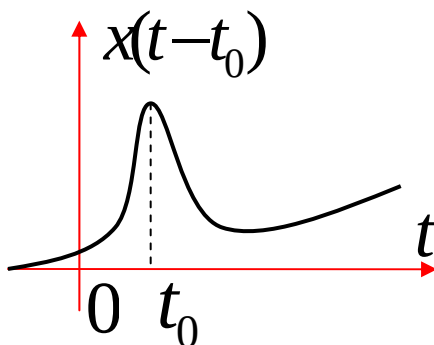
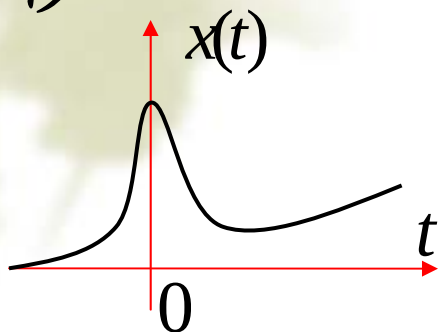
1.2 自变量的变换

信号与系统分析中一个重要的概念就是关于信号的变换概念。例如，在飞机控制系统中对应于驾驶员动作的信号，经由电的和机械的系统变换为在飞机推力或飞机控制翼面（如舵或副翼）位置上的改变，进而再经过空气动力学变换为在飞机速度和航向上的变化。

本节将介绍几个最基本的信号变换，只涉及自变量的简单变换，也就是时间轴的变换。

1.2.1 自变量变换举例

1. 时移

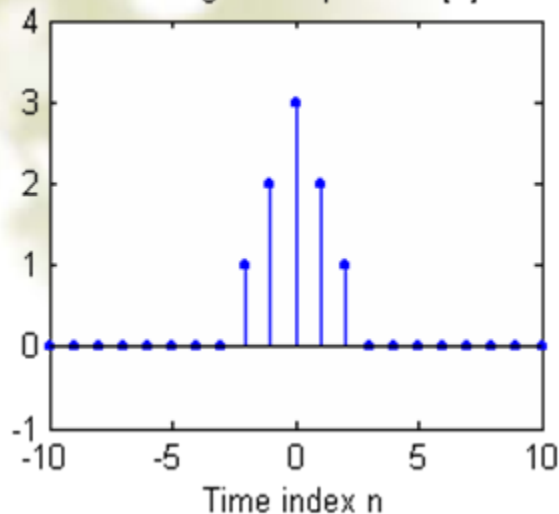


用时移关联的连续时间信号
 $x(t-t_0)$ 代表信号延时 ($t_0>0$)
 $x(t-t_0)$ 代表信号超前 ($t_0<0$)

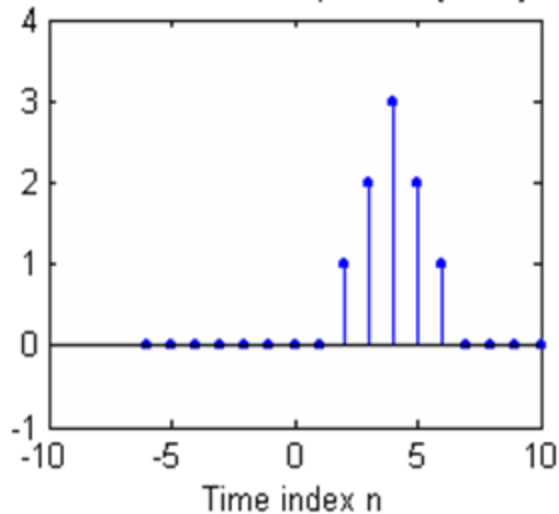


❖ 用时移关联的离散时间信号

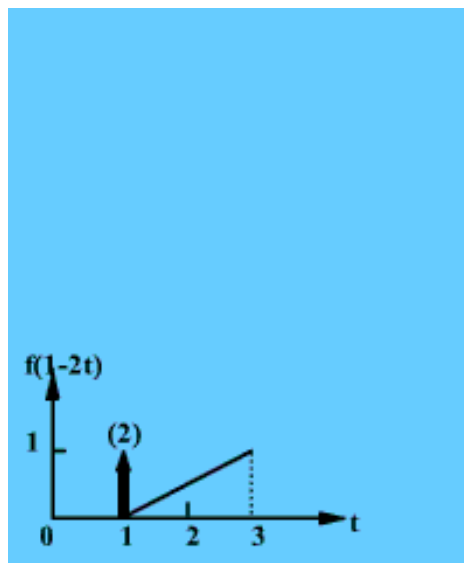
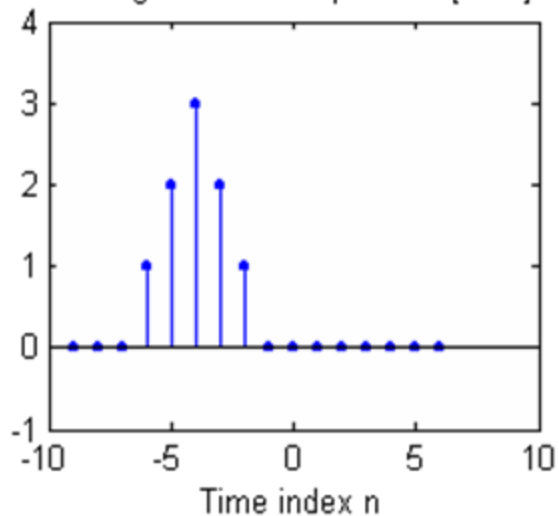
The original sequence $x[n]$



The left shifted sequence $x[n+n_0]$

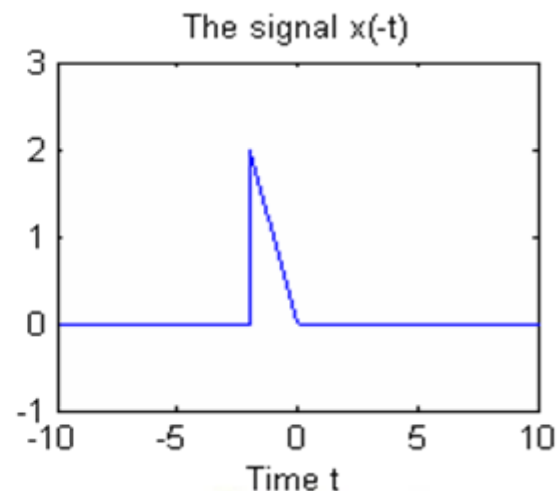
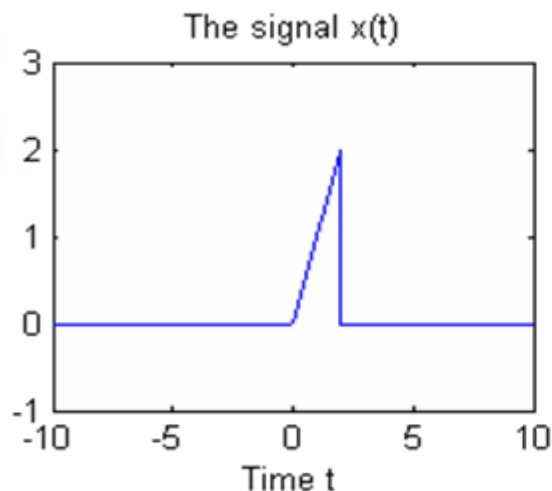


The right shifted sequence $x[n-n_0]$

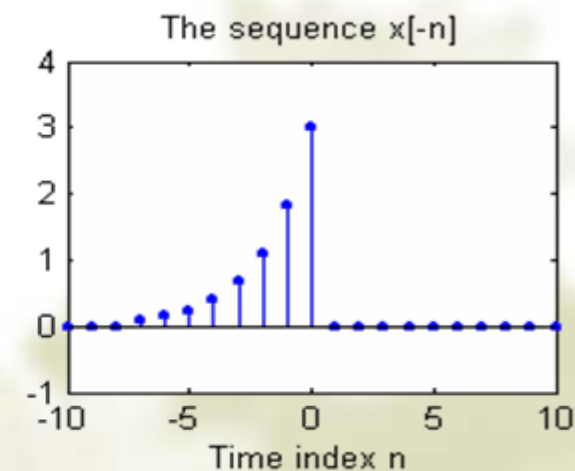
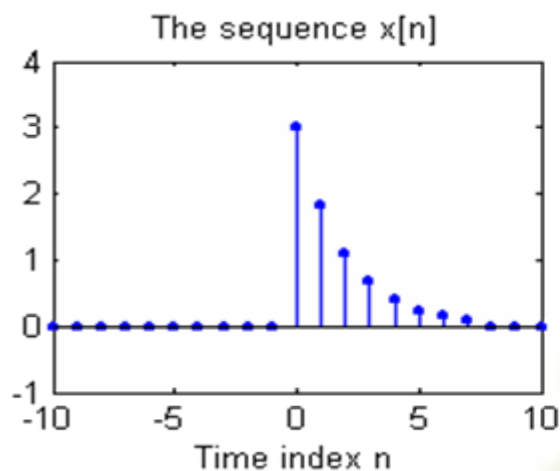


2. 时间反转

$x(-t)$ 就是将 $x(t)$ 以 $t=0$ 为轴反转而得到的。



$x[-n]$ 就是将 $x[n]$ 以 $n=0$ 为轴反转而得到的。



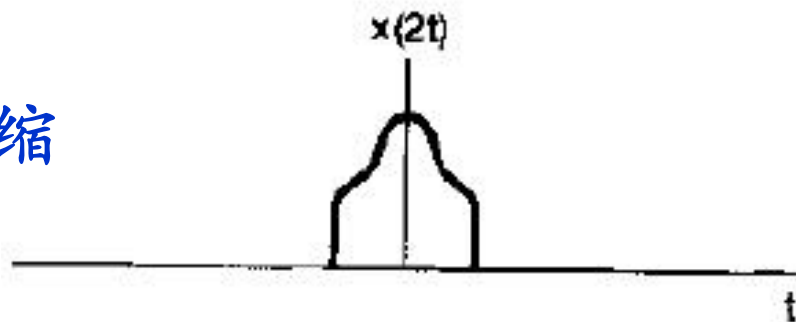
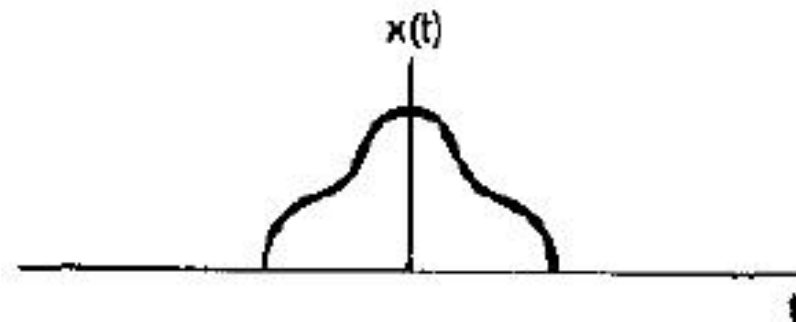


图像反转（水平）

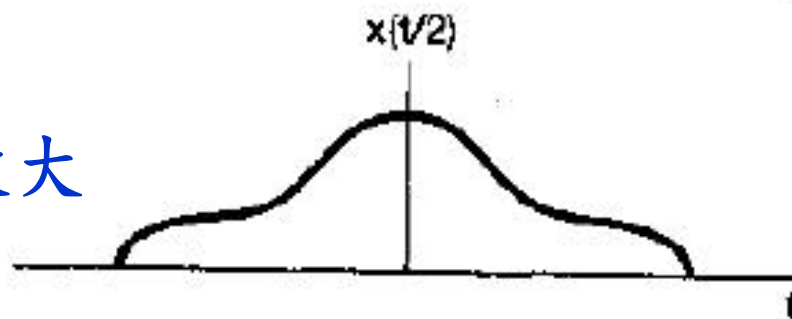
3. 尺度变换

$x(t)$, $x(2t)$, $x(t/2)$

信号压缩



信号放大



| 1.12 用时间尺度变换关联的连续时间信号

💣 我们所关注的是，对某一个已知的信号 $x(t)$ ，通过自变量变换，求得一个形式如 $x(at + \beta)$ 的信号，这里 a 、 β 是一个给定的数。于是，这样的信号有一个线性的扩展 ($|a| < 1$) 或压缩 ($|a| > 1$)，时间上的反转 ($a < 0$) 及移位 ($\beta \neq 0$)。

💣 实现步骤：

1. 时移， $x(t + \beta)$
2. 若 $a < 0$ ，反转， $x(-t + \beta)$
3. 压缩 ($|a| > 1$) 或扩展 ($|a| < 1$)， $x(at + \beta)$

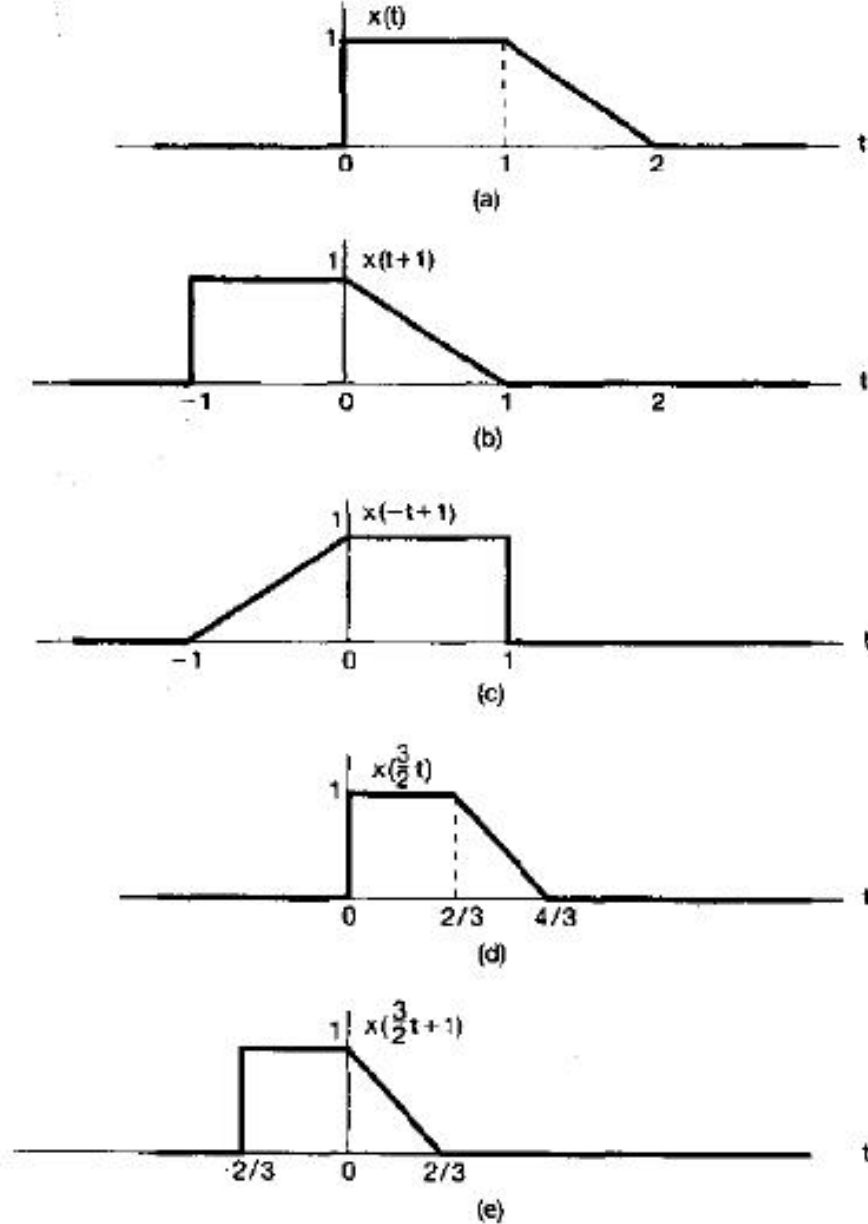


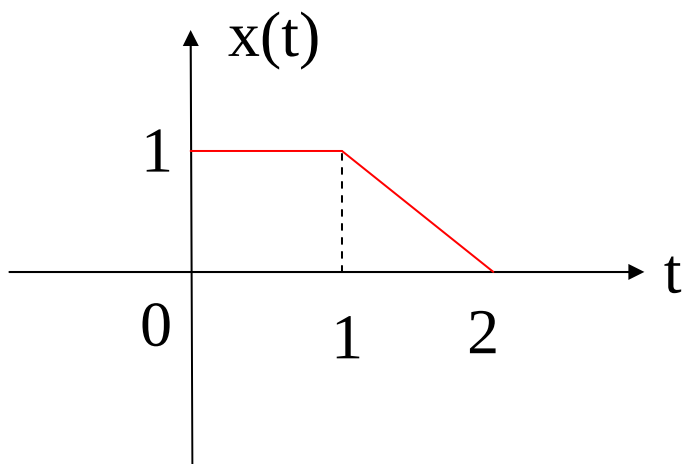
图 1.13 (a)用于例 1.1-1.3 的连续时间信号 $x(t)$, 图示说明自变量变换;
 (b) 时移信号 $x(t+1)$; (c) 用时移和反转得到的 $x(-t+1)$;
 (d) 时间尺度变换信号 $x(\frac{3}{2}t)$; (e) 由时移和尺度变换得到的 $x(\frac{3}{2}t+1)$

1.2 自变量的变换



信号 $x(t)$, 如何变换成

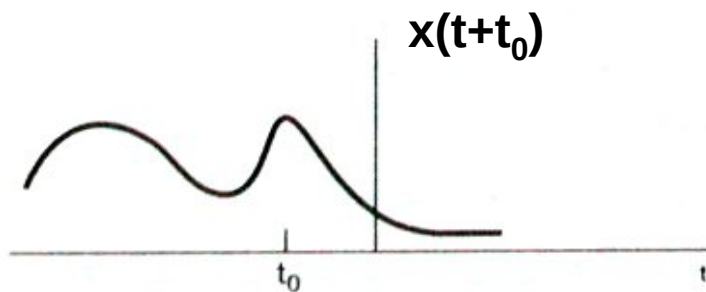
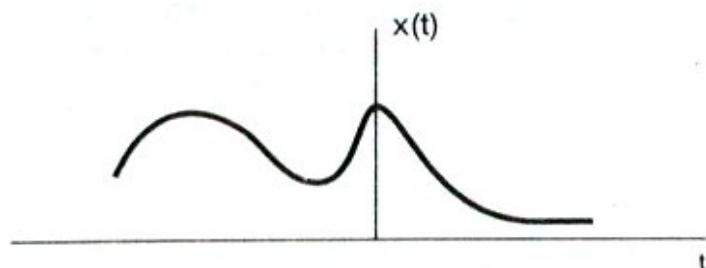
$$x(t) = (4 - \frac{1}{2}t)$$



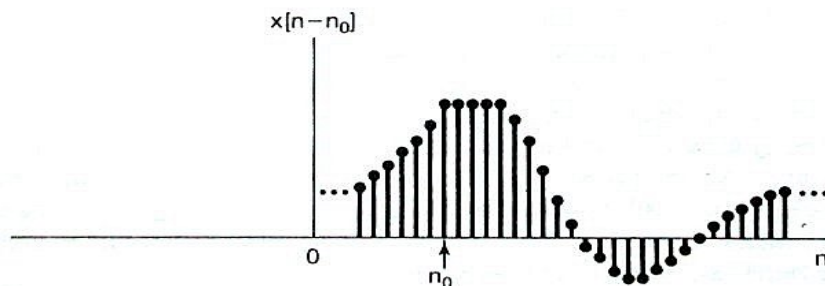
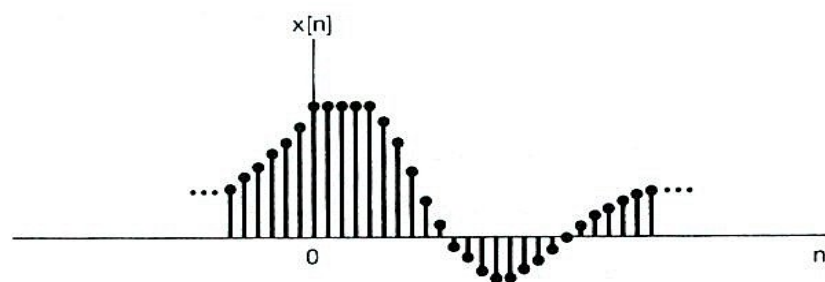
- ❖ 移位 (时移)
- ❖ 反折
- ❖ 压扩 (尺度变换)
- ❖

1.移位 (时移)

左移 : $x(t+t_0)$
 $x[n+n_0]$ (超前)

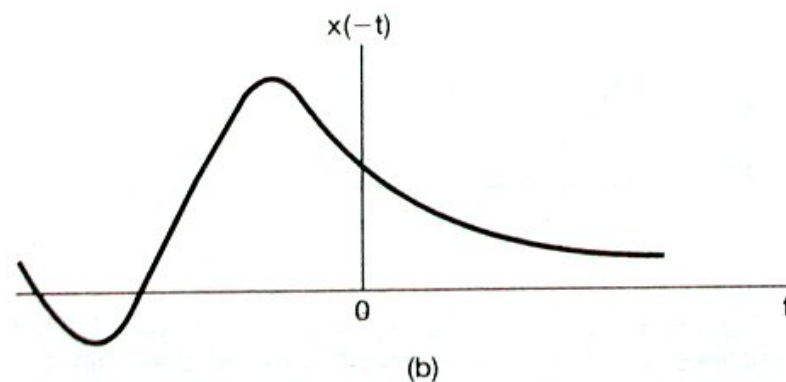
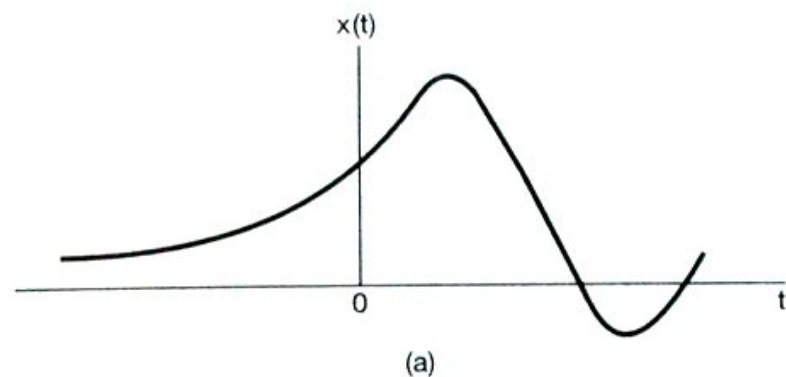
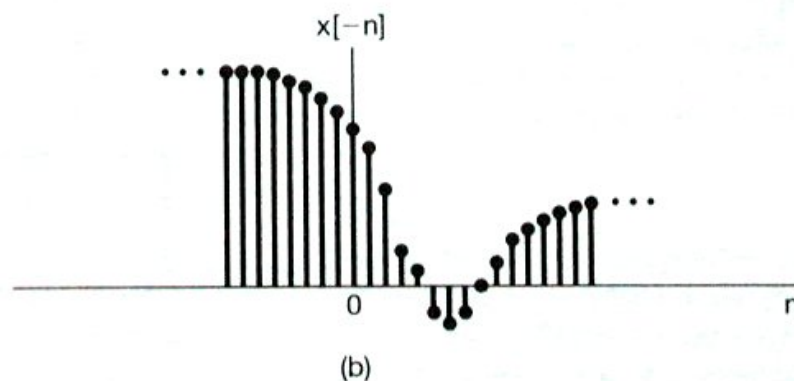
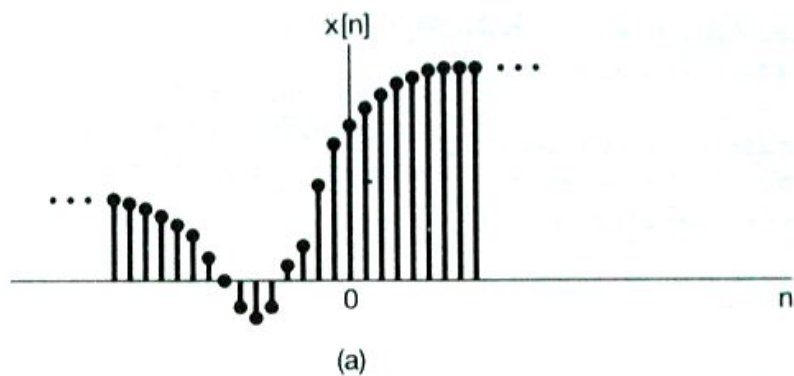


右移 : $x(t-t_0)$
 $x[n-n_0]$ (延后)



2.反折

❖ $x(t) \rightarrow y(t) = x(-t)$
 $x[n] \rightarrow y[n] = x[-n]$

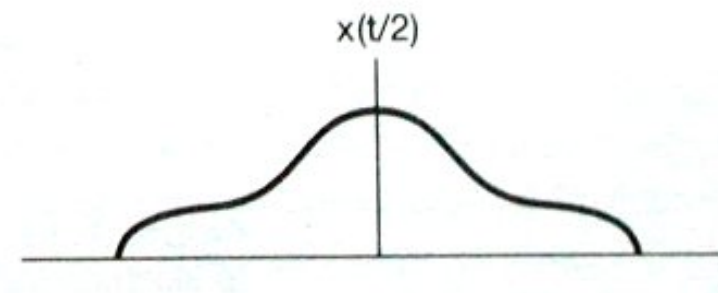
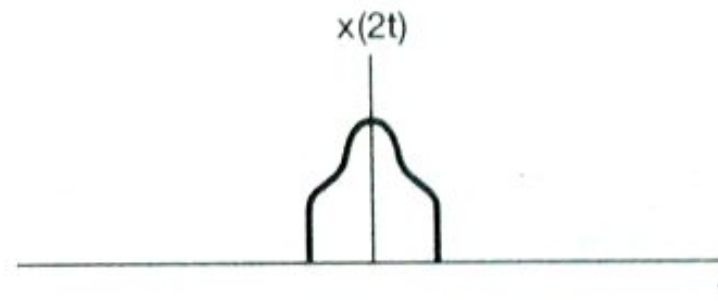
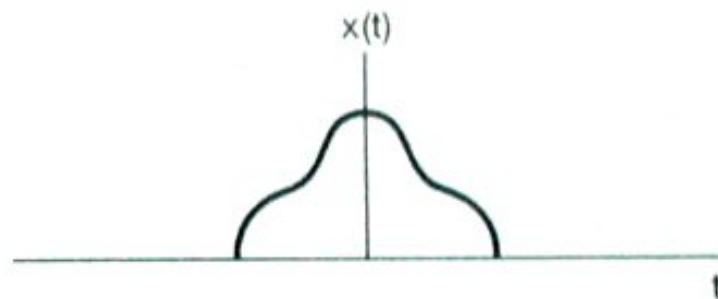


3. 压扩 (尺度变换)

❖ $x(t) \rightarrow y(t) = x(at) \quad a \neq 0$

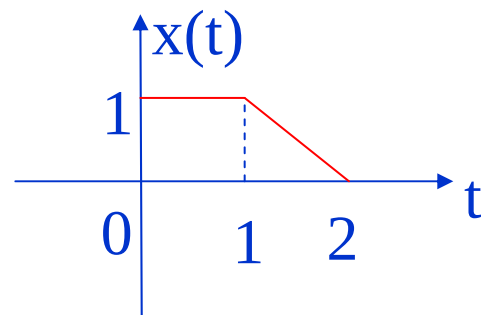
扩展 $|a| < 1$

压缩 $|a| > 1$



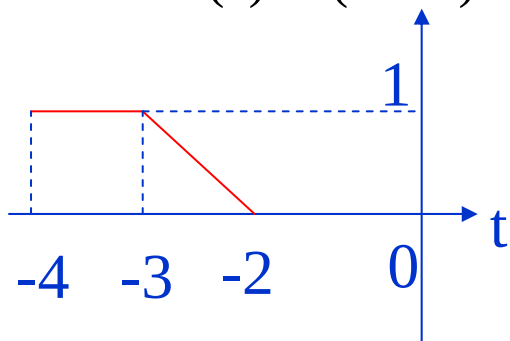
信号 $x(t)$, 如何变换成

$$x(t) = (4 - \frac{1}{2}t)$$



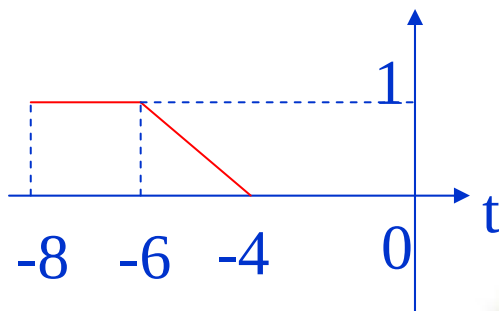
❖ 步骤1: 移位

$$x(t) = (4 + t)$$



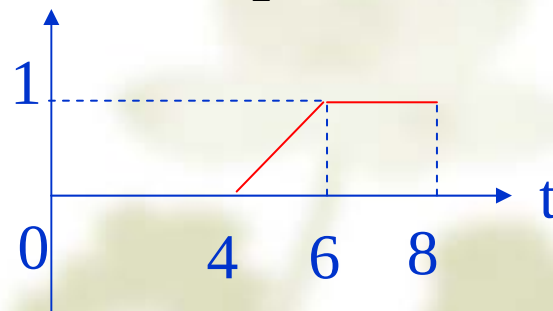
❖ 步骤2: 压扩

$$x(t) = (4 + \frac{1}{2}t)$$



❖ 步骤3: 反折

$$x(t) = (4 - \frac{1}{2}t)$$



还有哪些解法? 在解答过程中容易出现什么问题?

总结

❖ 自变量变换始终对t做变换

❖ 先移位，后反折

❖ 变换过程：

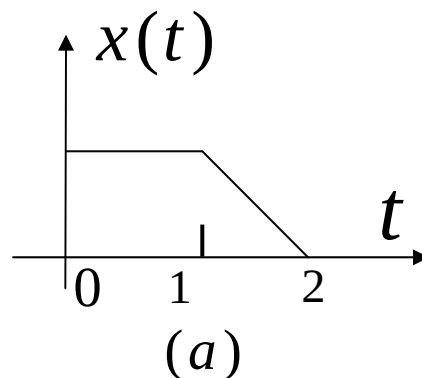
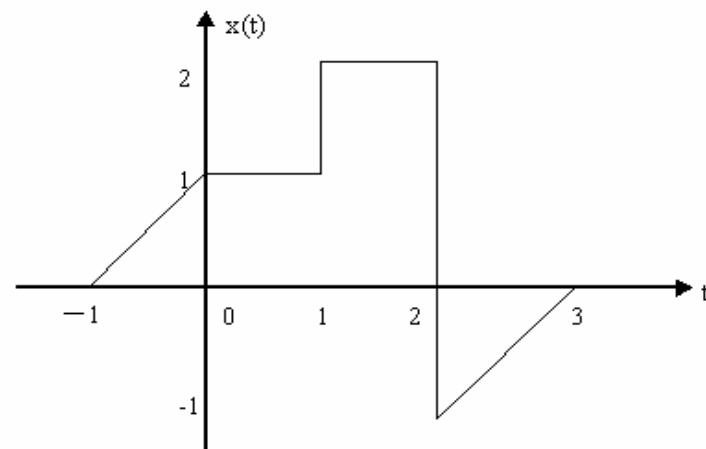
$$x(t) \xrightarrow[\text{移}b]{\text{左、右}} x(t+b) \xrightarrow[\text{压缩}1/a]{\text{扩展、}} x(at+b) \xrightarrow[\text{反折}]{\text{沿纵轴}} x(-at+b)$$

经典题型

❖ 已知 $x(t)$ 的波形图，画出 $y(t)=A \cdot x(at+b)$ 的波形图。其中：

$$A \cdot a \neq 0$$

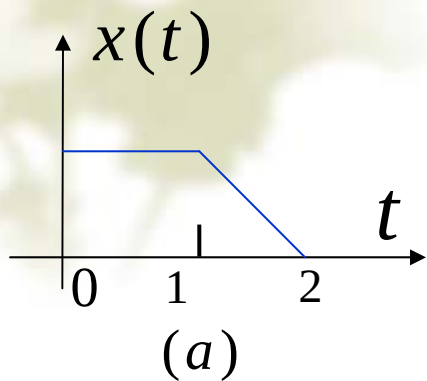
- 例题： $x(-3t + 1)$
- 图 (a)



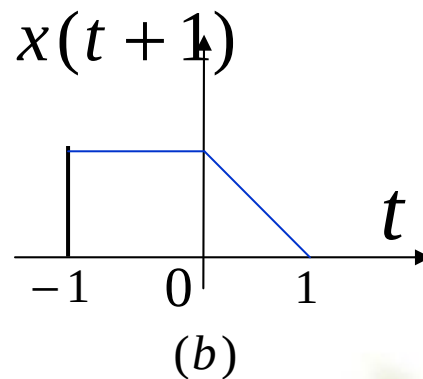
作业：

1.21 1.22

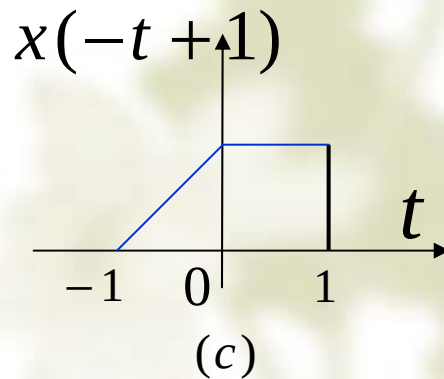
❖ 已知信号 $x(t)$ ，如图a，求信号 $x(-3t+1)$



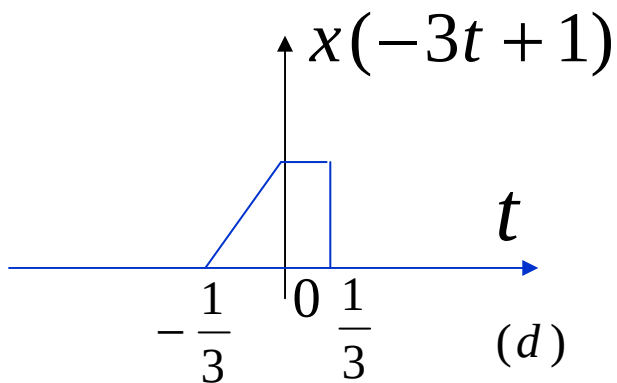
1. 时移



2. 反转



3. 压缩

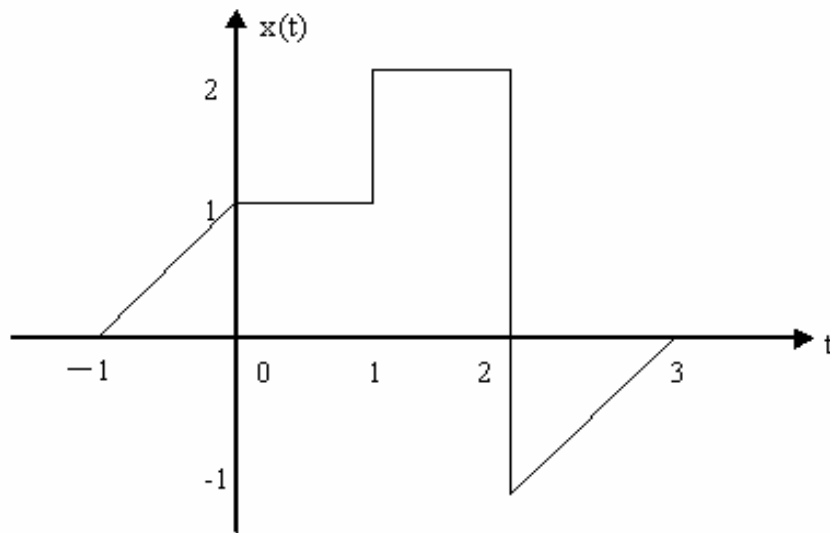


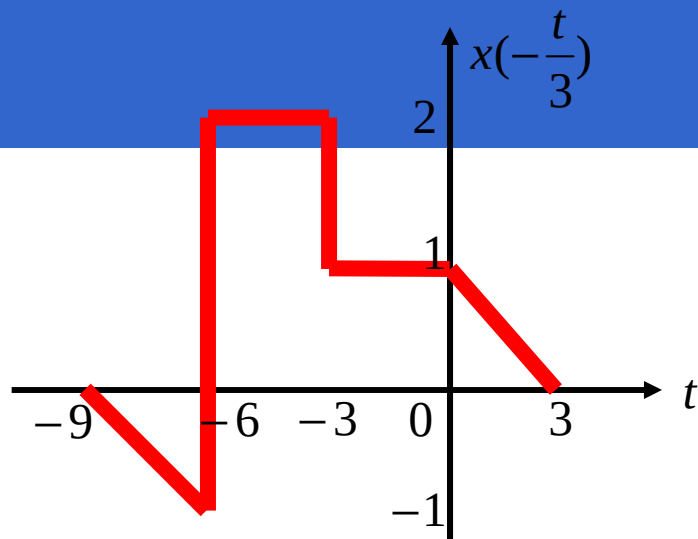
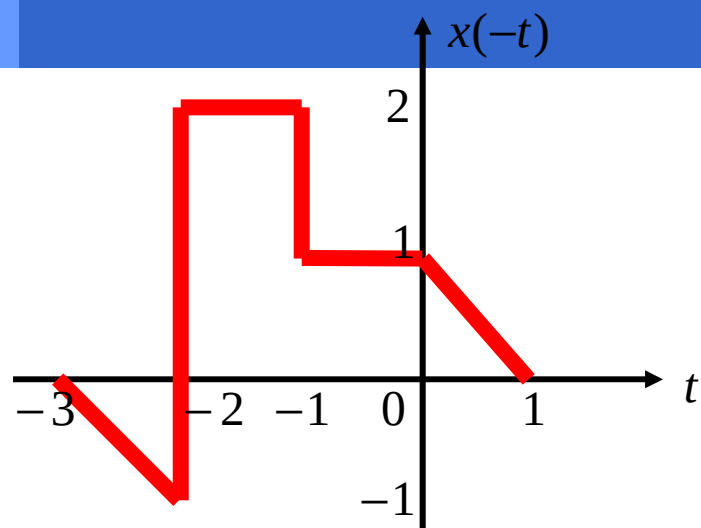
经典题型

❖ 已知 $x(t)$ 的波形图，画出 $y(t)=A \cdot x(at+b)$ 的波形图。其中：

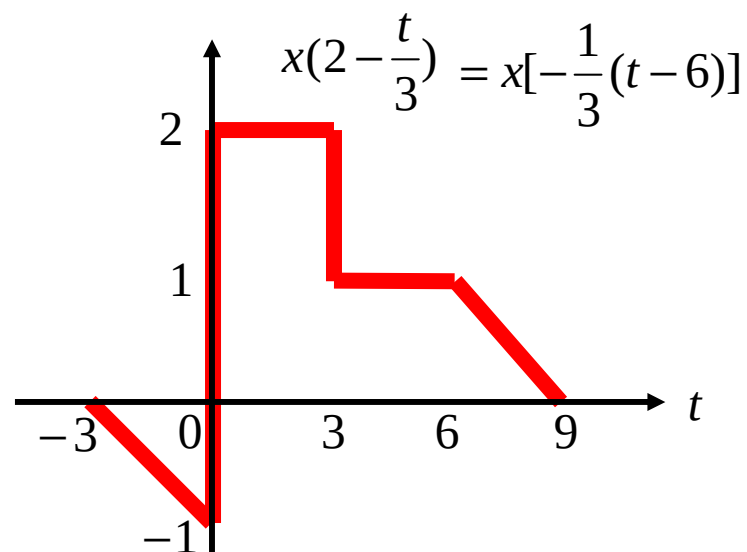
$$A \cdot a \cdot b \neq 0$$

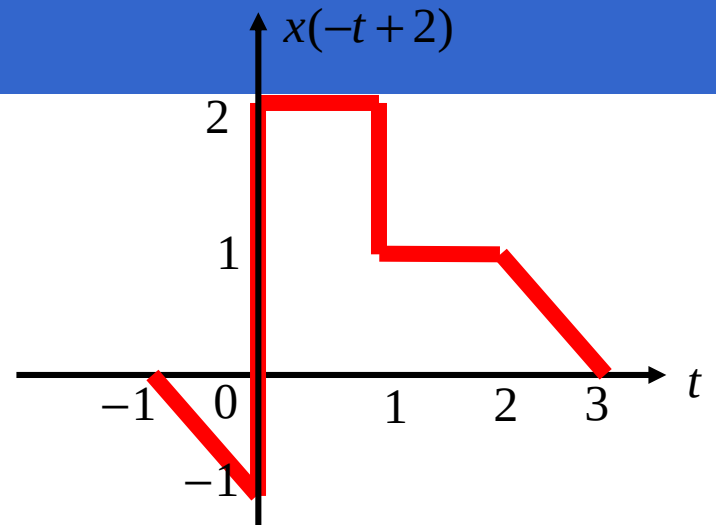
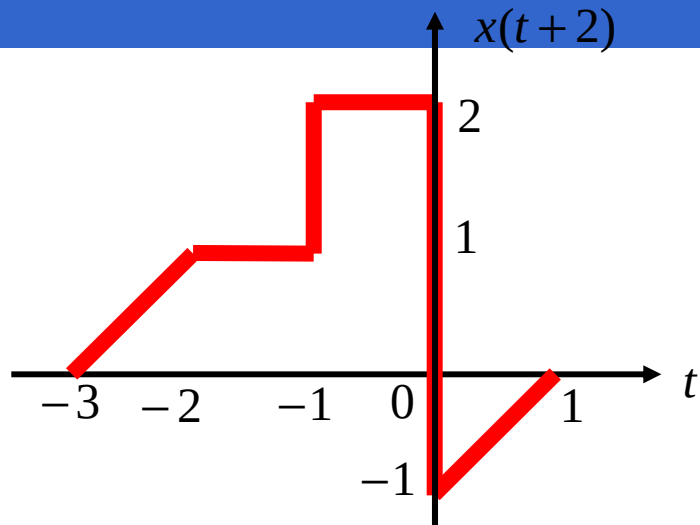
- 例题：已知 $x(t)$ 波形，画出 $y(t) = x(2 - \frac{t}{3})$ 波形。



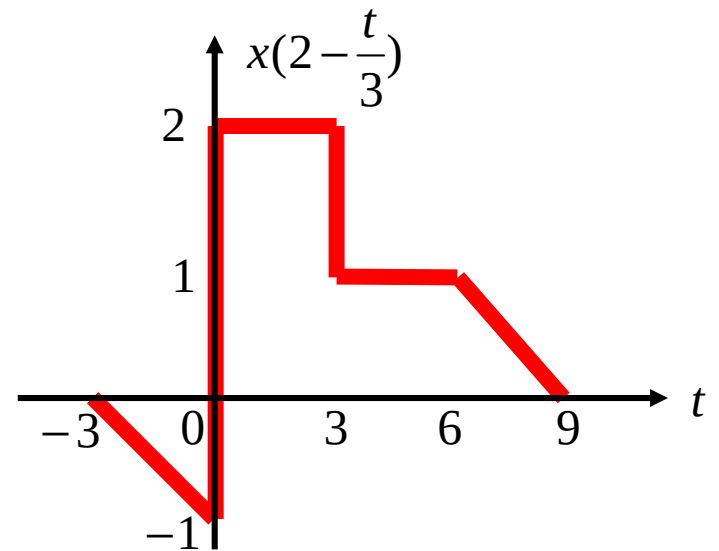


解法一





解法二

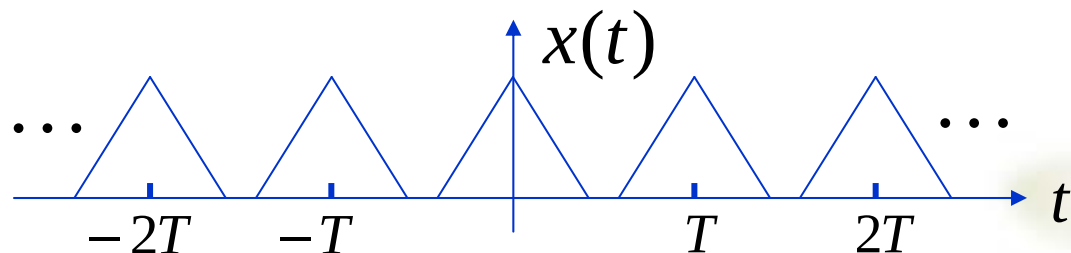


1.2.2 周期信号

一个周期连续时间信号 $x(t)$ 具有这样的性质，即存在一个正值的 T ，对全部 t 来说，有

$$x(t) = x(t+T)$$

$x(t)$ 就是一个周期信号，周期为 T 。

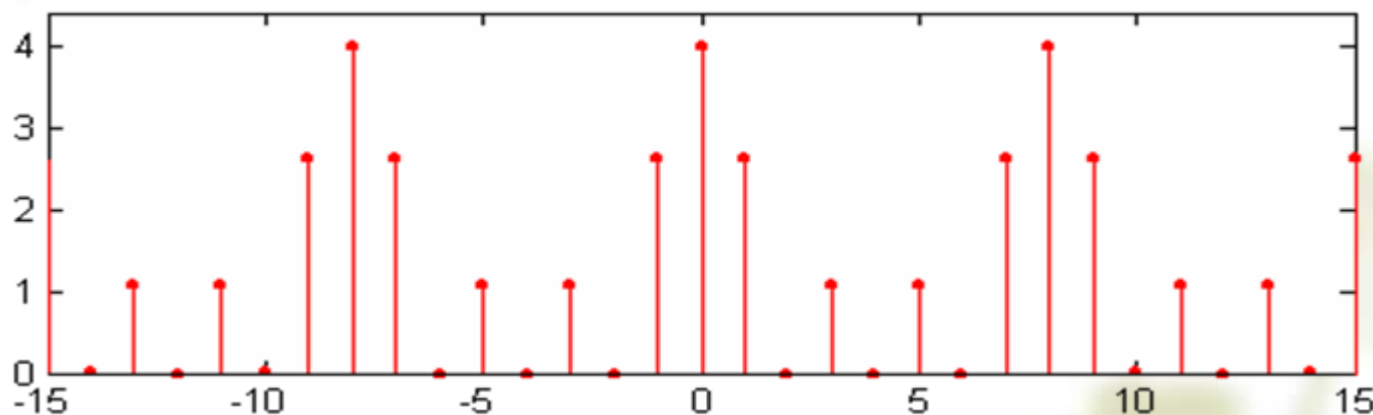


使上式成立的最小正值 T 称为 $x(t)$ 的基波周期 T_0 。

❖ 与之相类似的，周期离散时间信号 $x[n]$ ，有

$$x[n] = x[n+N]$$

使上式成立的最小整数值 N ，就是它的基波周期 N_0 。



1.2.2 周期信号

❖ 连续：存在一个正值 T ，对全部 t 来说：

$$x(t) = x(t+T)$$

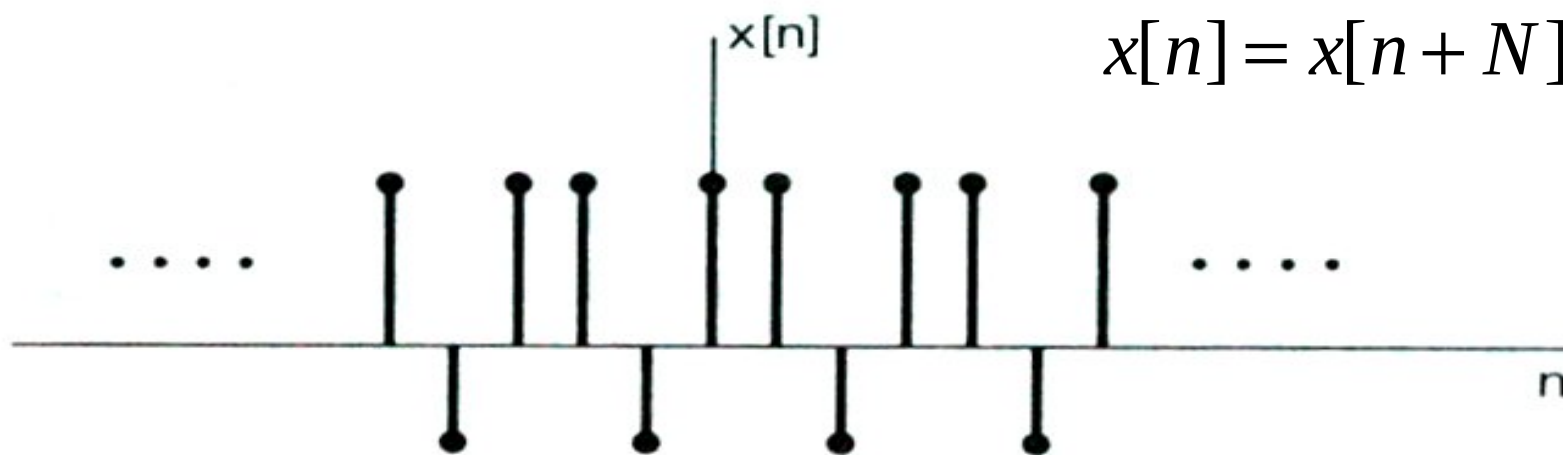
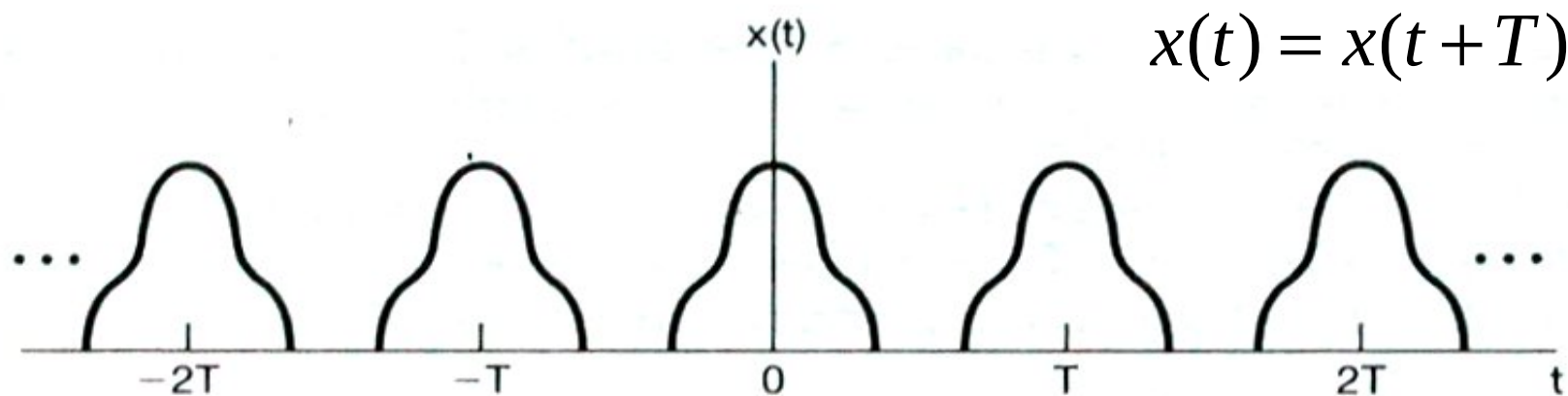
$x(t)$ 是周期信号，周期为 T

❖ 离散：存在一个正整数 N ，对全部 n 来说：

$$x[n] = x[n+N]$$

$x[n]$ 是周期信号，周期为 N

周期信号例子

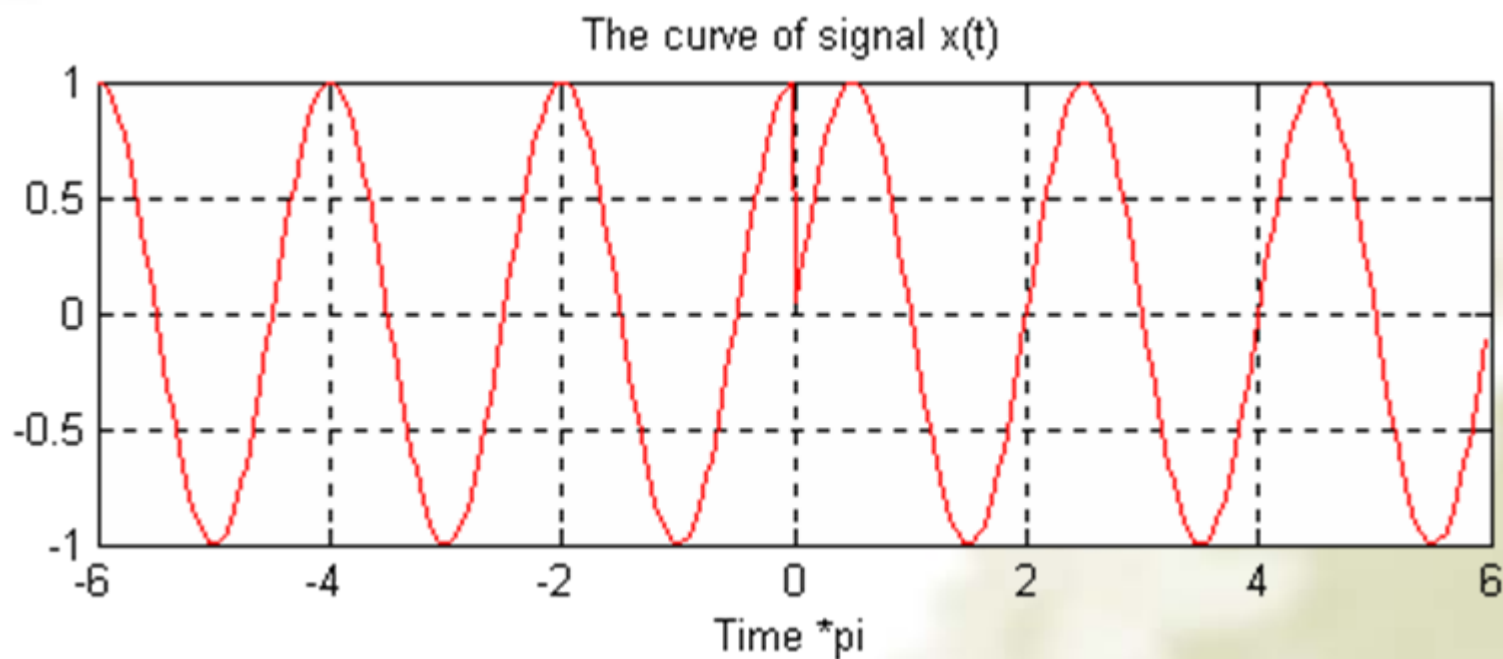


周期信号上的每一个点都必须周期性的重复

例1.4 判断

$$x(t) = \begin{cases} \cos(t) & t < 0 \\ \sin(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

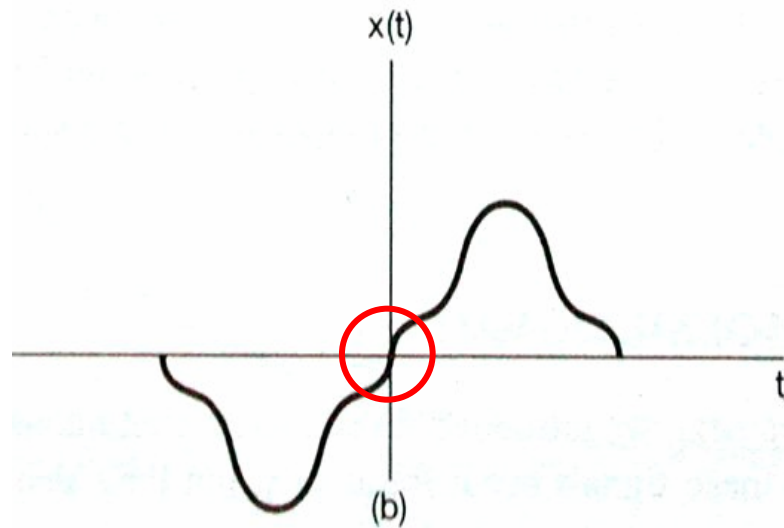
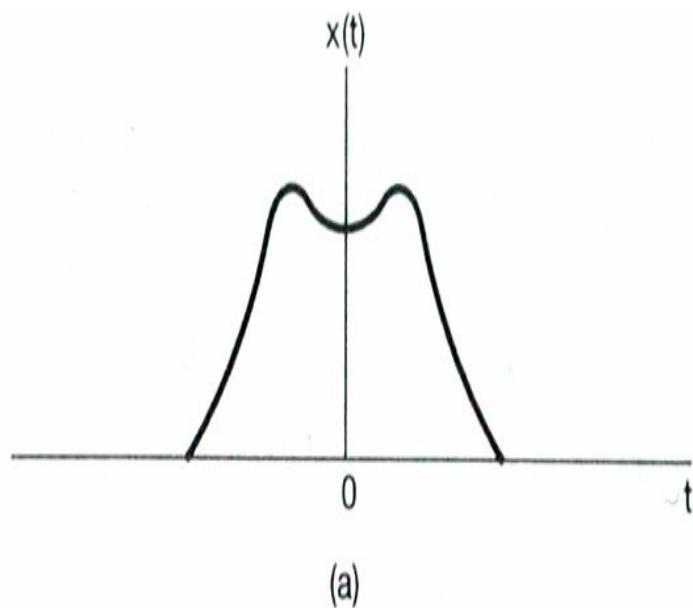
是否为周期信号？



1.2.3 偶信号与奇信号

❖ 偶信号: $x(-t) = x(t)$ or $x[-n] = x[n]$

❖ 奇信号: $x(-t) = -x(t)$ or $x[-n] = -x[n]$ 信号在0时刻必须为0



1.2.3 偶信号与奇信号

信号在时间反转后不变，就称为**偶信号(Even signal)**:

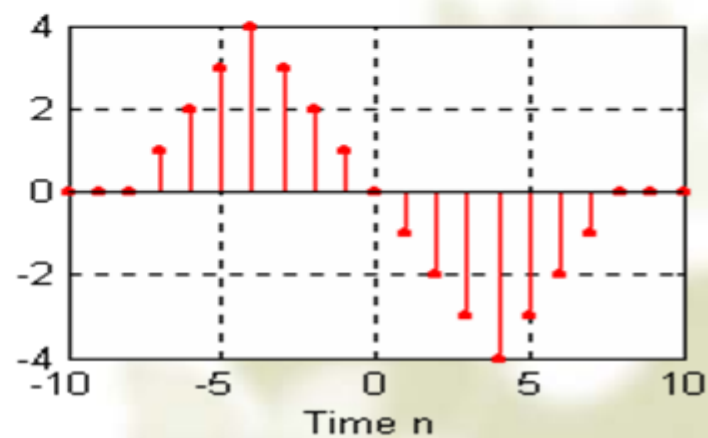
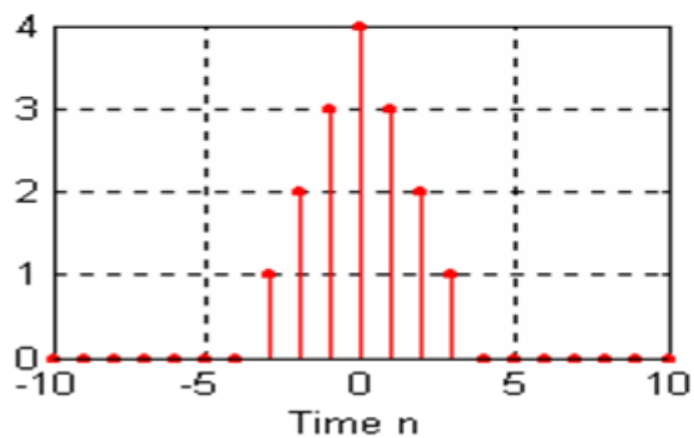
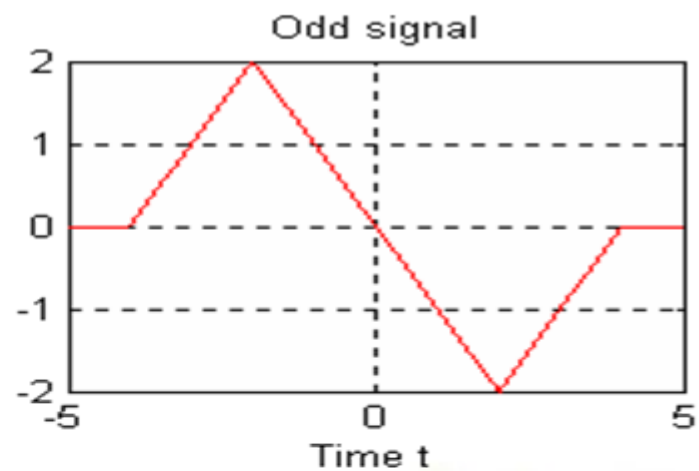
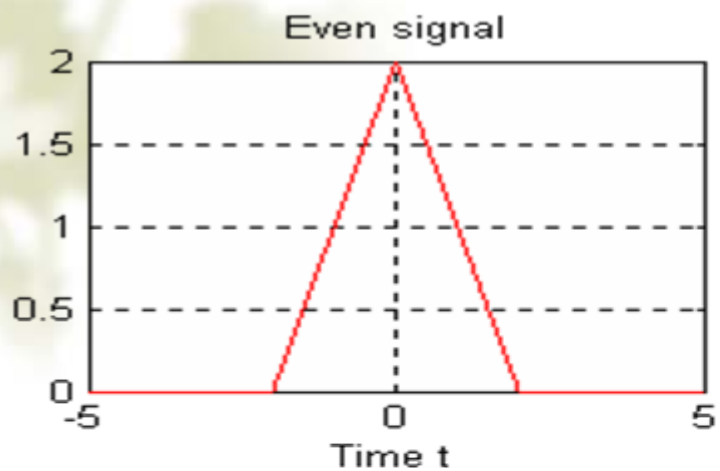
$$x(t) = x(-t)$$

$$x[n] = x[-n]$$

奇信号(Odd signal):

$$x(t) = -x(-t)$$

$$x[n] = -x[-n]$$



偶信号

奇信号

偶信号与奇信号

➤ 任何信号都可以分解成两个信号之和： $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$

$$\text{偶部} \quad Ev \{x(t)\} = x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

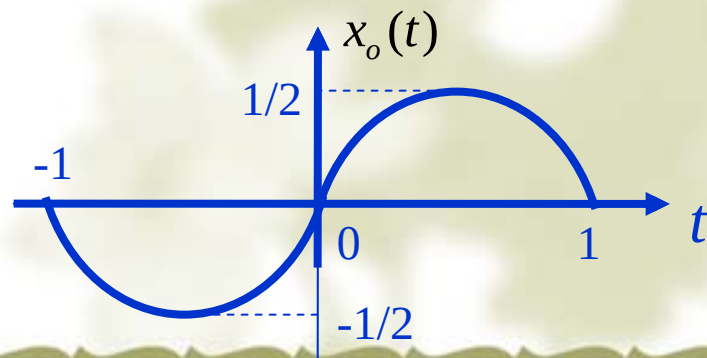
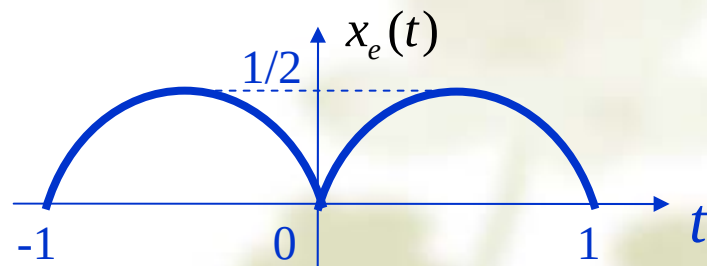
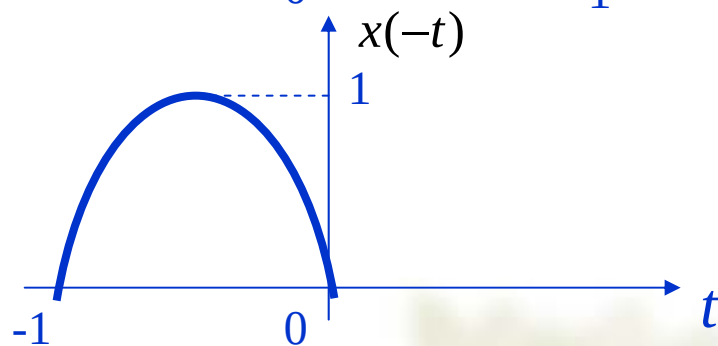
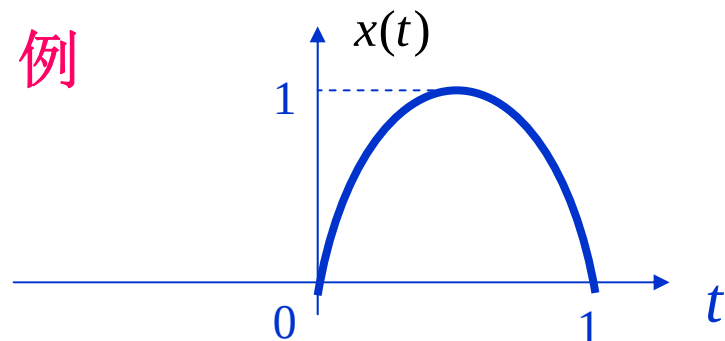
$$\text{奇部} \quad Od \{x(t)\} = x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

$$\text{or:} \quad Ev \{x[n]\} = x_e[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[-n]\}$$

$$Od \{x[n]\} = x_o[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\}$$

偶信号、奇信号举例

例



偶部

$$x_e(t) = \frac{1}{2}[x(t) + x(-t)]$$

奇部

$$x_o(t) = \frac{1}{2}[x(t) - x(-t)]$$

1.3 指数信号和正弦信号

复指数信号

$$x(t) = C \cdot e^{at}$$

❖ 幅度 C 为复数: $C = \alpha + j\beta$

❖ 相位 a 为复数: $a = r + j\omega$

实指数信号
(幅度和相位都是实数)

一般复指数
幅度增长正弦
幅度衰减正弦

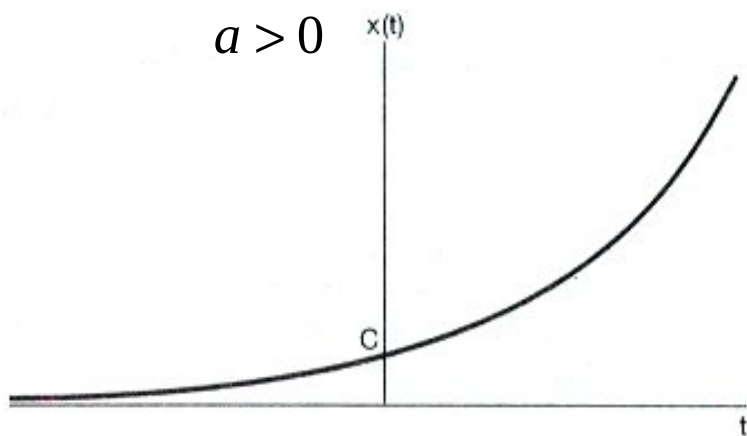
周期复指数信号
纯虚数指数

取实部
正弦信号

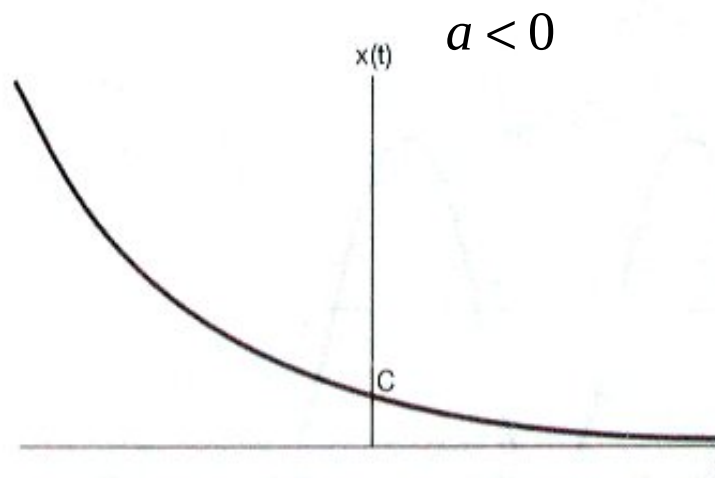
1.3.1 连续时间指数信号和正弦信号

1. 实指数信号：**C**和**a**都是实数

$$x(t) = C \cdot e^{at}$$



❖ $a > 0$, $x(t)$ 随 t 的增加而指数增长



❖ $a < 0$, $x(t)$ 随 t 的增加而指数衰减

2. 周期复指数和正弦信号



$$(1) \quad x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$(2) \quad x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$(3) \quad x(t) = e^{jk\omega_0 t}$$

特点：信号都是周期的，周期为 T_0

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T_0)} \quad T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

该信号的一个重要性质就是它是周期信号。

证明：如果存在一个 T ，而使下式成立

$$e^{j\omega_0 t} = e^{j\omega_0 (t+T)}$$

则 $x(t)$ 就是周期的。为此，必须有

$$e^{j\omega_0 T} = 1$$

最终，有基波周期为

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|}$$

❖ 正弦信号

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

ω_0 的单位是 rad/s ，一般又写成 $\omega_0 = 2\pi f_0$ ， f_0 的单位是周期数/秒，即 Hz （频率）。周期信号。

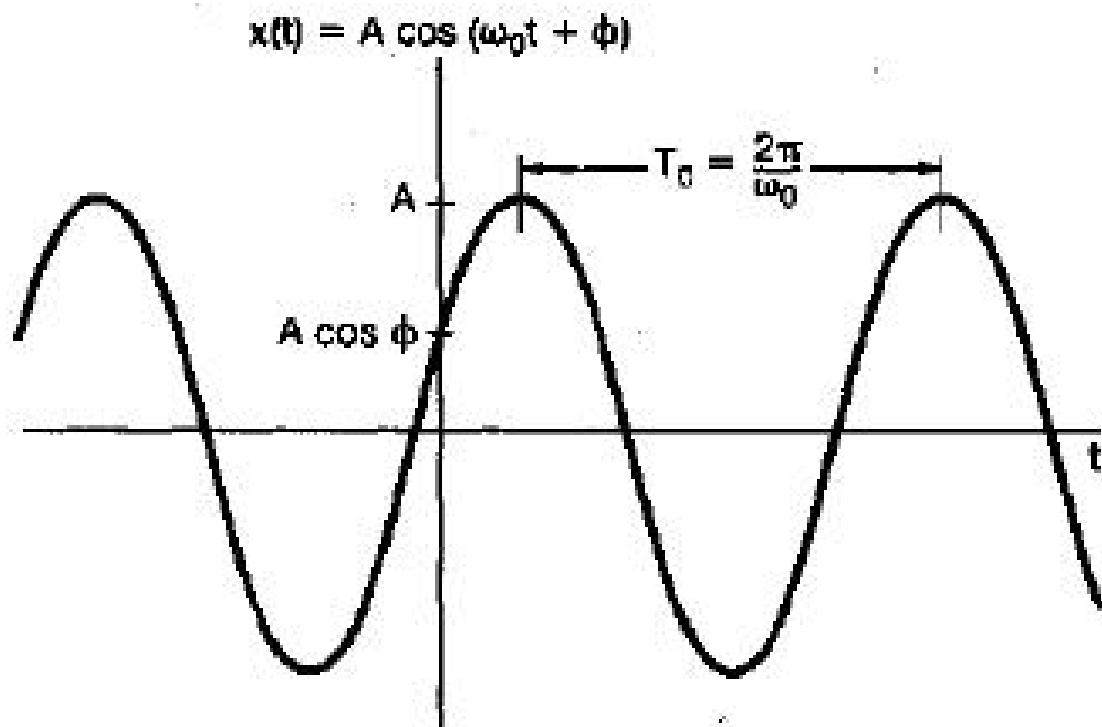


图 1.20 连续时间正弦信号

复指数和正弦信号的关系

❖ 欧拉公式:
$$e^{j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t + j \sin \omega_0 t$$

❖ 可以得到:
$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$
$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

❖ 还可以得到:

$$A \cos(\omega_0 t + \phi) = \frac{A}{2} e^{j\phi} e^{j\omega_0 t} + \frac{A}{2} e^{-j\phi} e^{-j\omega_0 t}$$

❖ 连续时间正弦信号或周期复指数信号，其基波周期 T_0 是与 $|\omega_0|$ 成反比的， ω_0 也称为基波频率。

ω_0 减小，就减慢了 $x(t)$ 的振荡速率。因此周期增长；

ω_0 增加，就加快了 $x(t)$ 的振荡速率。因此周期缩短；

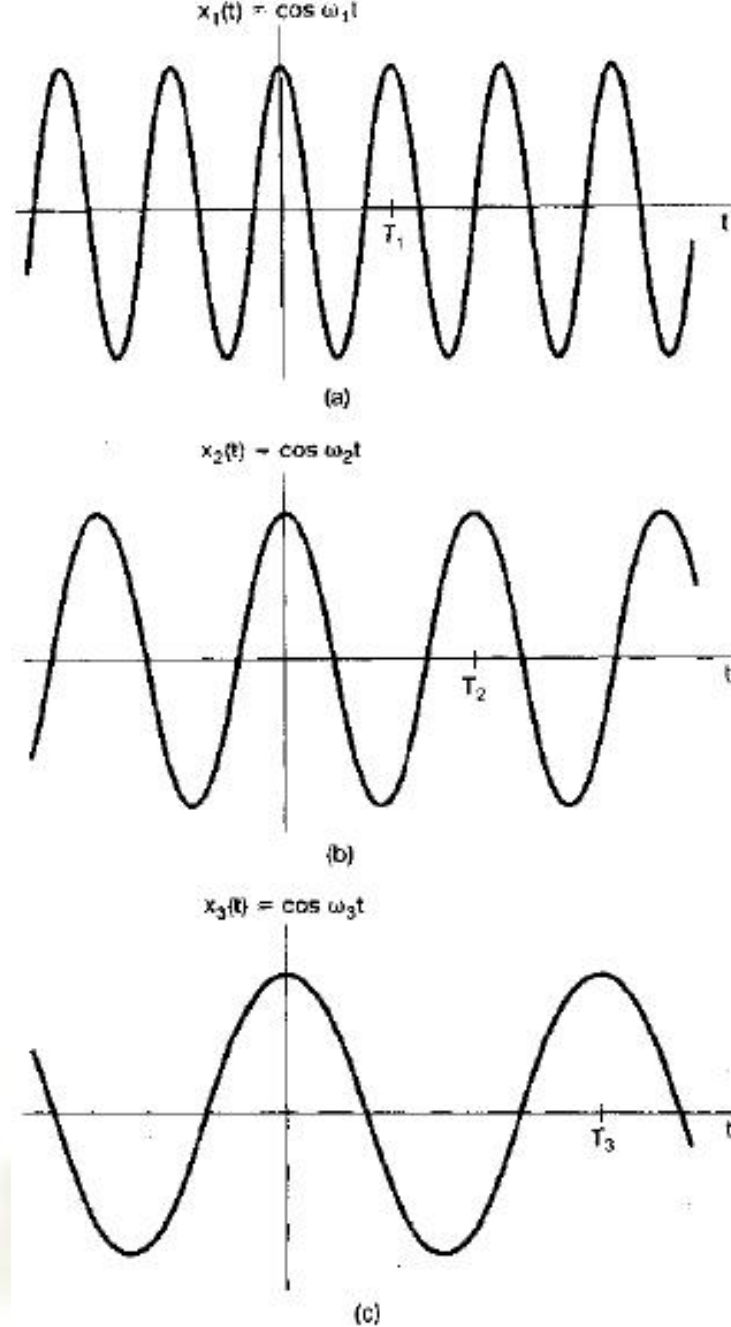


图 1.21 连续时间正弦信号基波频率和周期之间的关系, 图中 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$, 也即 $T_1 < T_2 < T_3$

❖ 周期信号，尤其是复指数信号和正弦信号，是具有无限能量但有有限平均功率的信号。

计算一个周期内的总能量和平均功率：

$$E_{period} = \int_0^{T_0} |e^{j\omega_0 t}|^2 dt = \int_0^{T_0} 1 dt = T_0$$

$$P_{period} = \frac{1}{T_0} E_{period} = 1$$

t 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ ，有无穷多个周期，所以在整个全部时间内积分其总能量就是无限大，而平均功率为1。

❖ 例：求信号 $x(t) = e^{j2t} + e^{j3t}$ 的模

$$\begin{aligned}\text{解： } x(t) &= e^{j2t} + e^{j3t} \\ &= e^{j2.5t}(e^{-j0.5t} + e^{j0.5t}) \\ &= 2e^{j2.5t}\cos(0.5t)\end{aligned}$$

$x(t)$ 的模 $|x(t)| = 2|\cos(0.5t)|$ ， $|x(t)|$ 是周期信号。

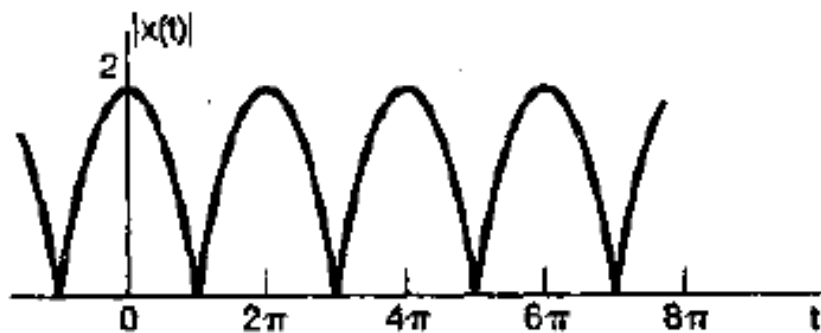


图 1.22 例 1.5 中的已经全波整流的正弦波

- ❖ 一个成谐波关系的复指数信号的集合就是一组其基波频率是某一正频率 ω_0 整数倍的周期复指数信号：

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

3.一般复指数信号

❖ 最一般的情况

$$x(t) = (\alpha + j\beta)e^{(r + j\omega_0)t}$$

❖ C用极坐标,a用直角坐标来表示

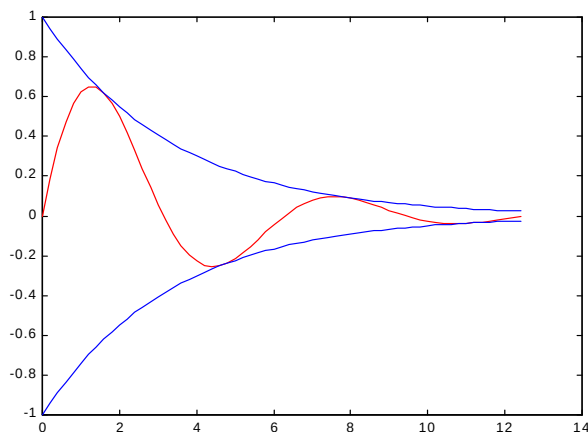
$$\begin{aligned}x(t) &= Ce^{at} \\&= \underline{|C|e^{j\theta}} \underline{e^{(r + j\omega_0)t}} \\&= |C|e^{rt}e^{j(\omega_0 t + \theta)} \\&= |C|e^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta)\end{aligned}$$

一般复指数信号

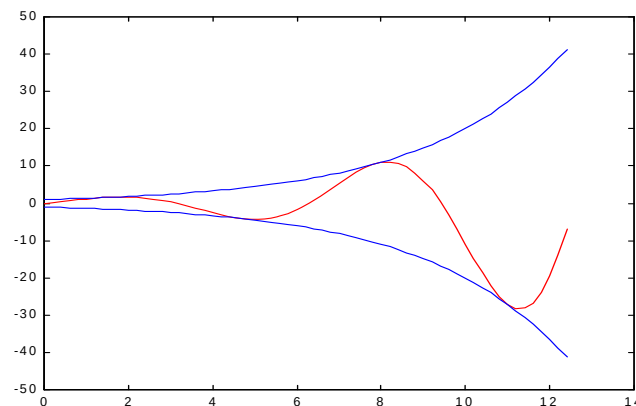
$$x(t) = |C|e^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|e^{rt} \sin(\omega_0 t + \theta)$$

- ❖ 若 $r=0$, $x(t)$ 的实部和虚部都为正弦信号
- ❖ 若 $r<0$, $x(t)$ 的振幅为指数衰减正弦(1)
- ❖ 若 $r>0$, $x(t)$ 的振幅为指数增长正弦(2)

(1) $r<0$



(2) $r>0$



包络线 $|C|e^{rt}$

具有指数衰减
振幅的正弦信
号称为**阻尼正
弦振荡**

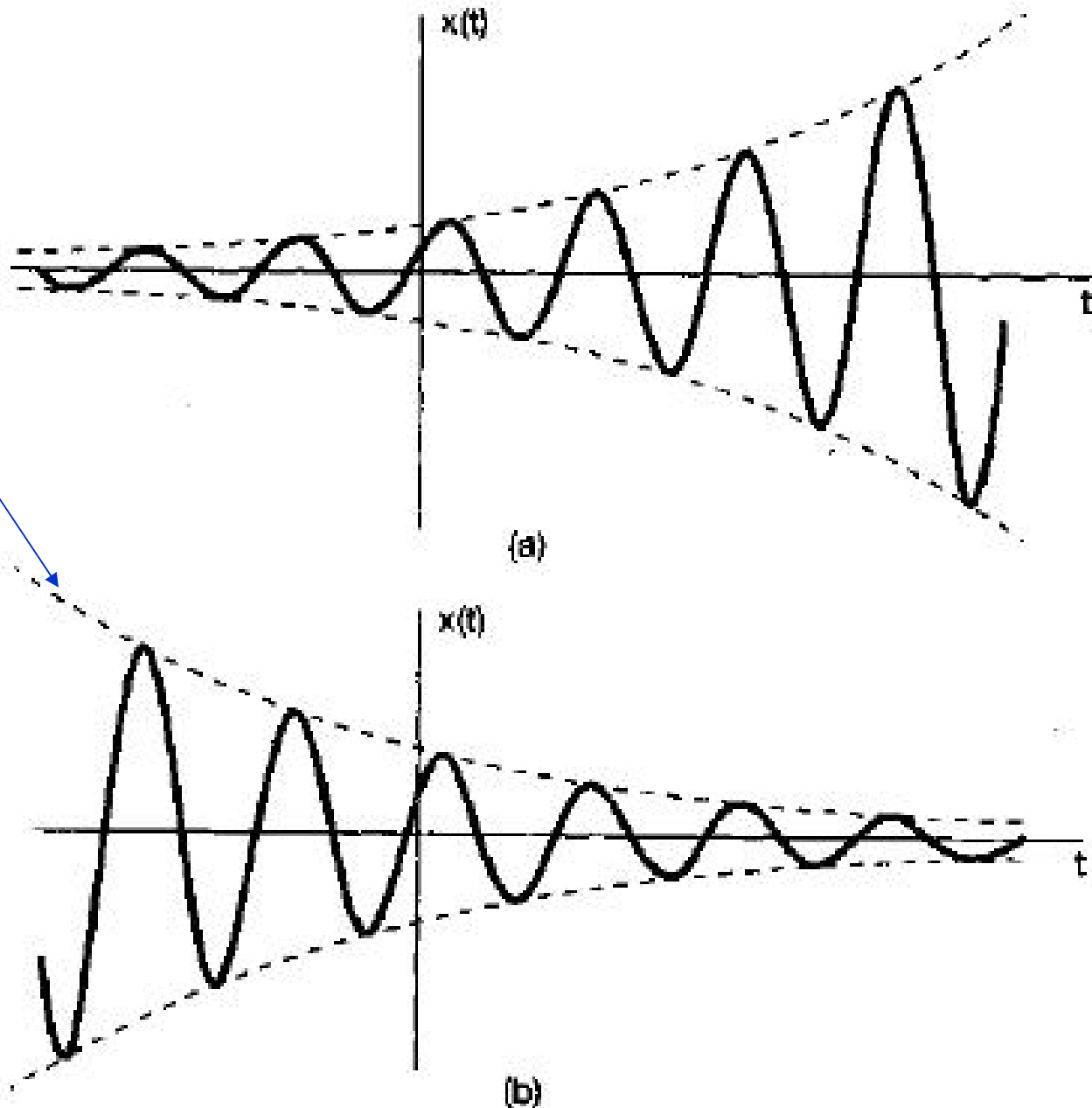


图 1.23 (a) 幅度增长的正弦信号 $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r > 0$;
(b) 幅度衰减的正弦信号 $x(t) = Ce^{rt} \cos(\omega_0 t + \theta)$, $r < 0$

1.3.2 离散时间复指数信号与正弦信号

❖ 离散复指数信号或序列

$$x[n] = C\alpha^n$$

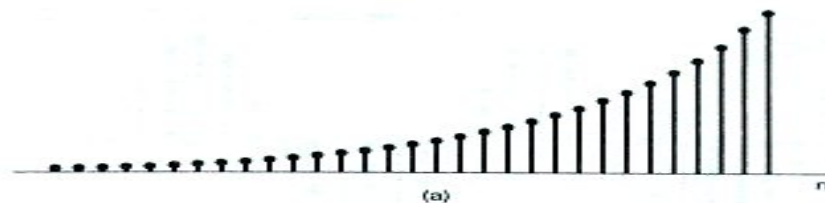
令 $\alpha = e^{\beta}$, 则

$$x[n] = Ce^{\beta n}$$

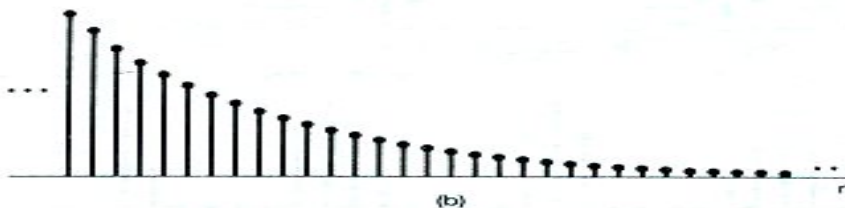
1.实指数信号

$$x[n] = C\alpha^n$$

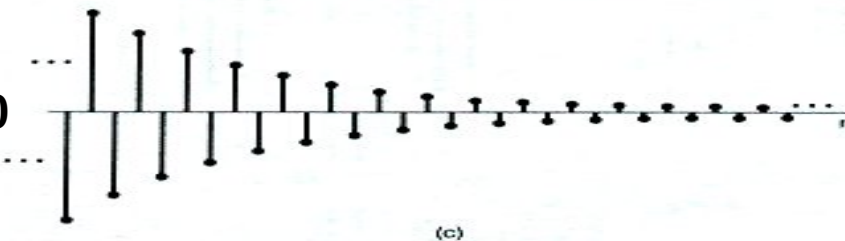
(a) $\alpha > 1$



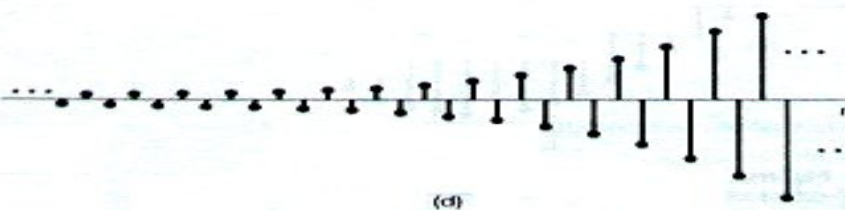
(b) $0 < \alpha < 1$



(c) $-1 < \alpha < 0$

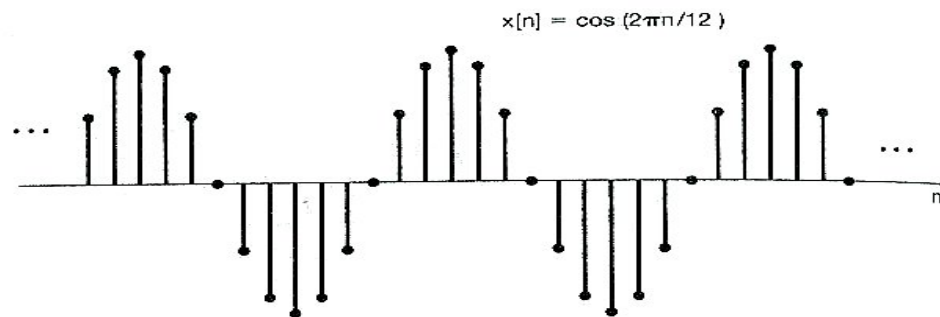


(d) $\alpha < -1$

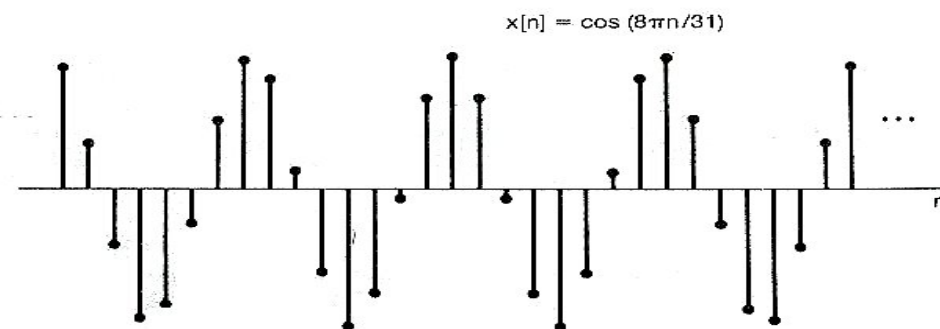


$\alpha = 1$ 或 $\alpha = -1$ 呢?

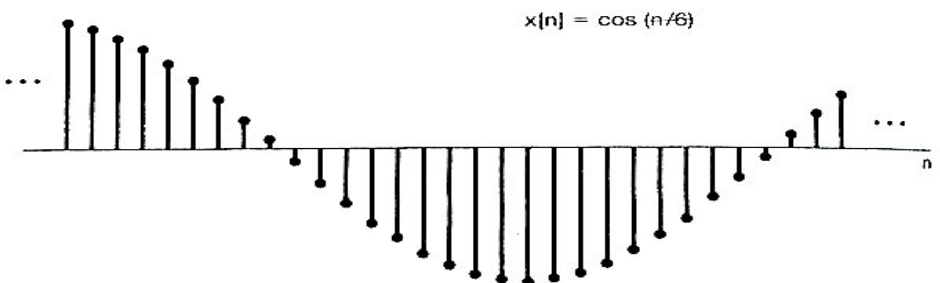
2. 正弦信号



(a)



(b)



(c)

复指数序列:

$$x[n] = e^{j\omega_0 n}$$

$$= \cos \omega_0 n + j \sin \omega_0 n$$

正弦信号:

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \phi)$$

一定是周期信号吗?

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

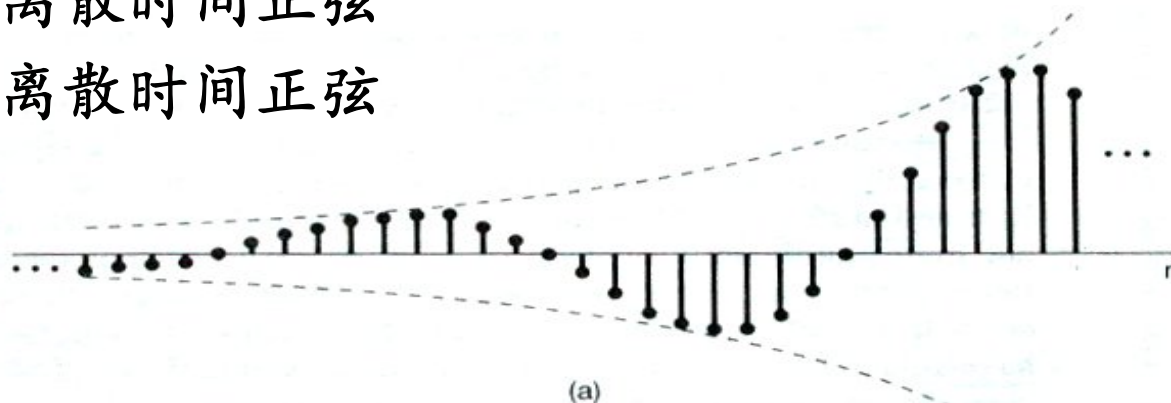
3.一般复指数信号

$$C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(w_0 n + \theta) + j|C||\alpha|^n \sin(w_0 n + \theta)$$

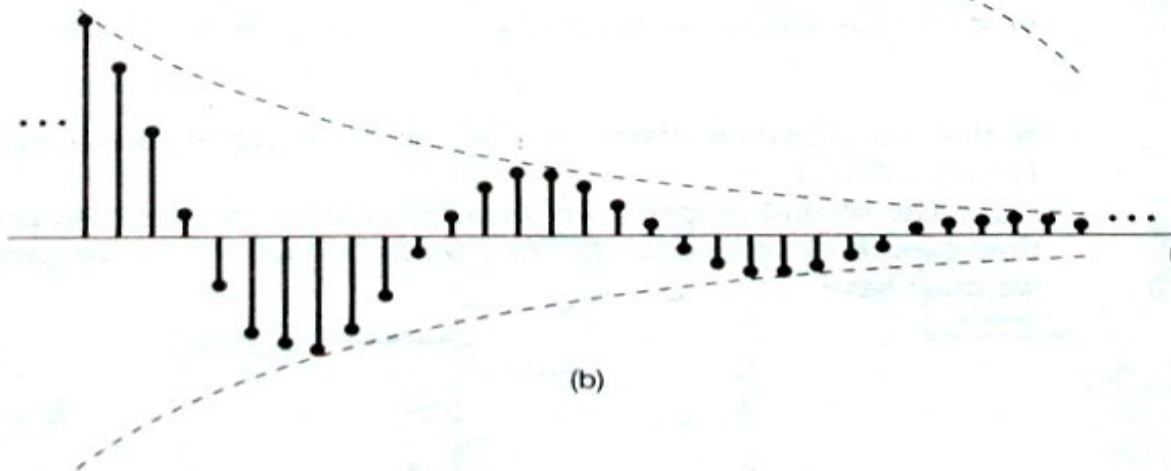
❖ 若 $|\alpha| > 1$, 增长的离散时间正弦

❖ 若 $|\alpha| < 1$, 衰减的离散时间正弦

$$|\alpha| > 1$$



$$|\alpha| < 1$$



1.3.3 离散时间复指数序列的周期性质

连续时间: $e^{j\omega_0 t}$, $T=2\pi/\omega_0$, 一定存在

离散时间: $e^{j\omega_0 n}$, $N=?$

由定义: $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$

有 $e^{j\omega_0 N} = 1$ or $\omega_0 N = 2\pi m$

因此: $N = 2\pi m / \omega_0$

判断条件: $\omega_0 / 2\pi$ 是有理数

✿ 现在，我们看看 $e^{j\omega_0 n}$ 的性质：

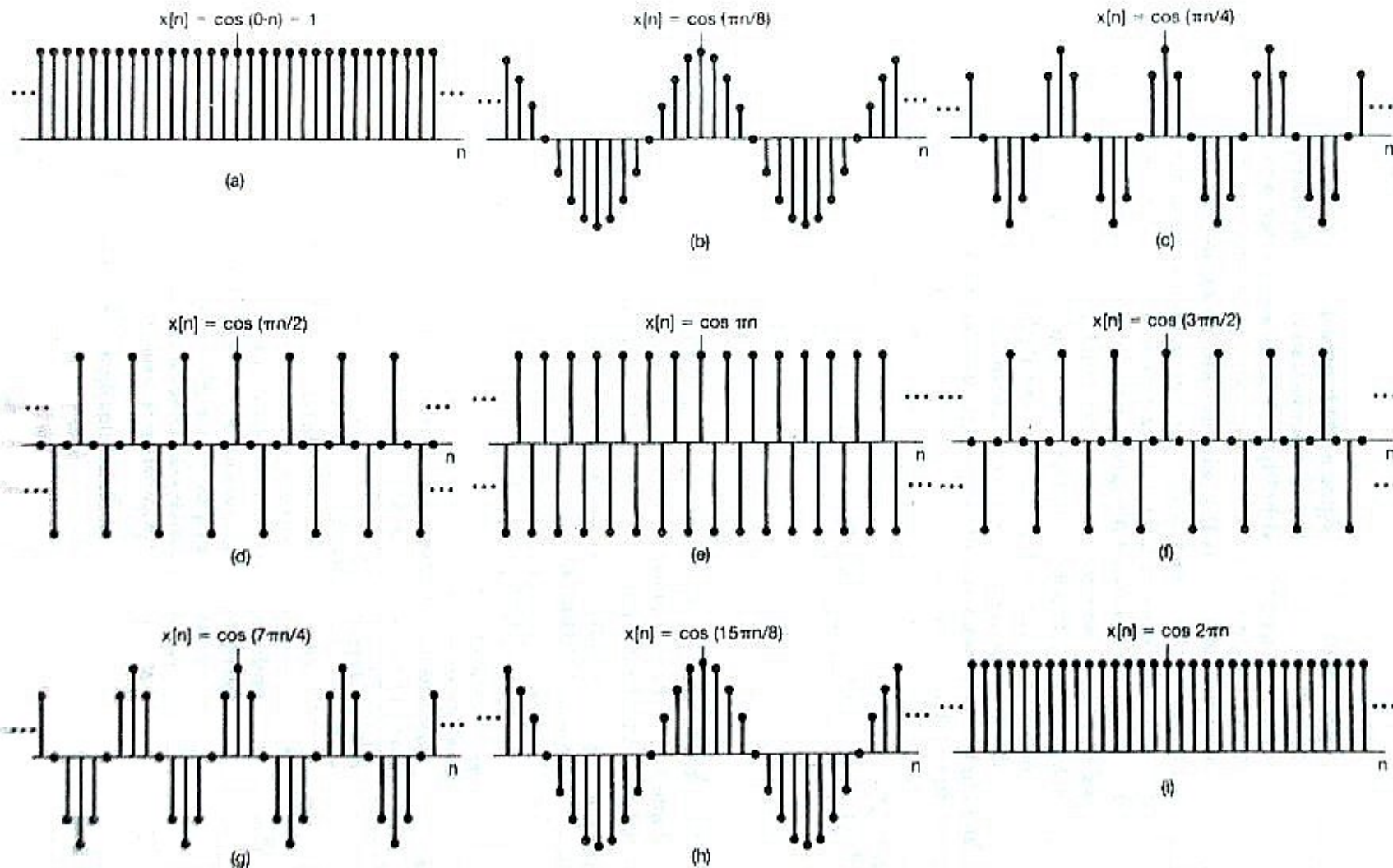
(1) 研究频率为 $\omega_0 + 2\pi$ 的离散时间复指数信号：
$$e^{j(\omega_0 + 2\pi)n} = e^{j2\pi n} e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 n}$$

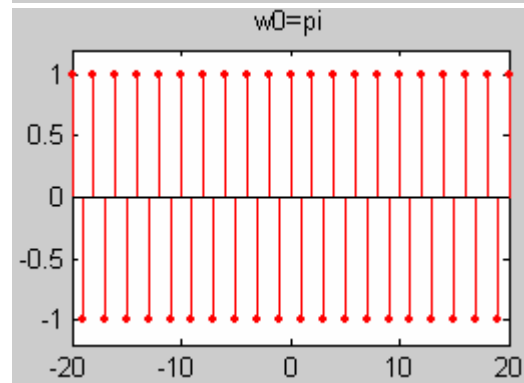
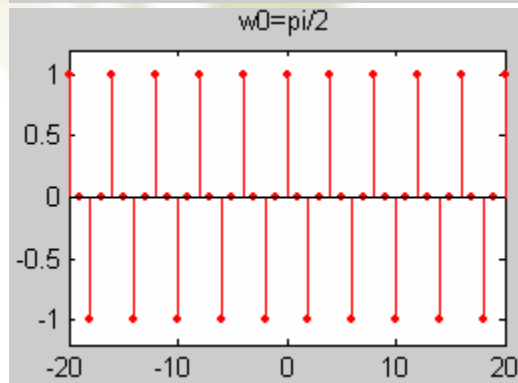
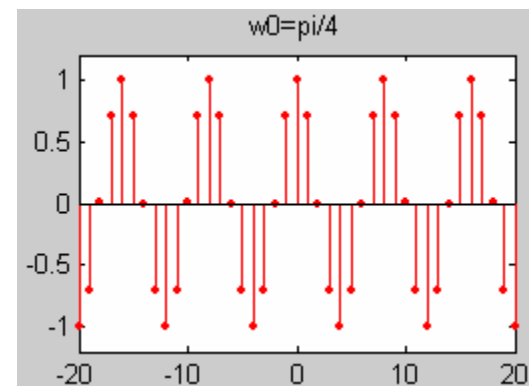
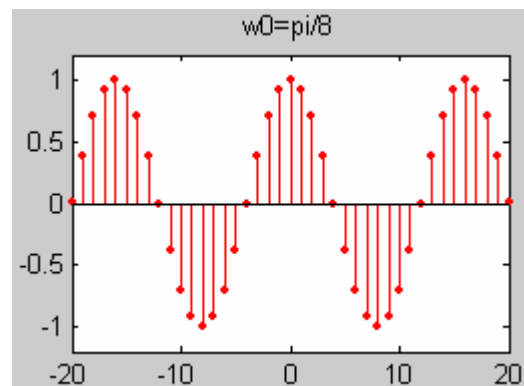
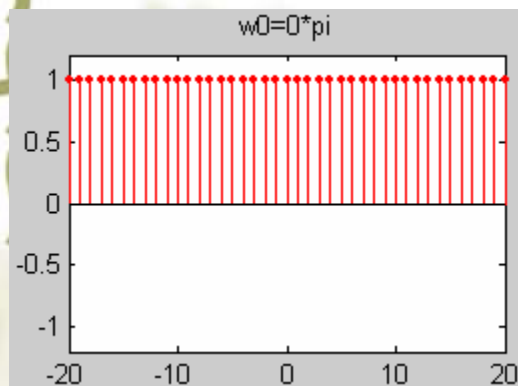
说明离散时间复指数信号在频率 $\omega_0 + 2\pi$ 与频率 ω_0 时是完全一样的；而在连续时间复指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 中不同的 ω_0 就对应着不同的信号。

❖ 在离散时间情况下，频率在 ω_0 , $\omega_0 \pm 2\pi$, $\omega_0 \pm 4\pi$ 等等这些频率的复指数信号都是一样的。因此，在考虑这种离散时间复指数信号时，只需要在一个 2π 间隔内选择 ω_0 就行了，通常选择 $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ 。

💣 $e^{j\omega_0 n}$ 不具有随 ω_0 增加而不断增加其信号振荡速率的特性。

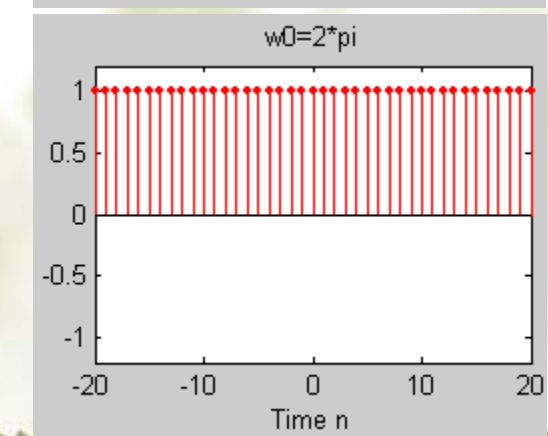
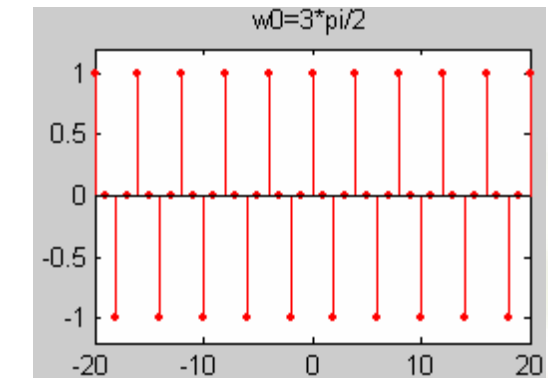
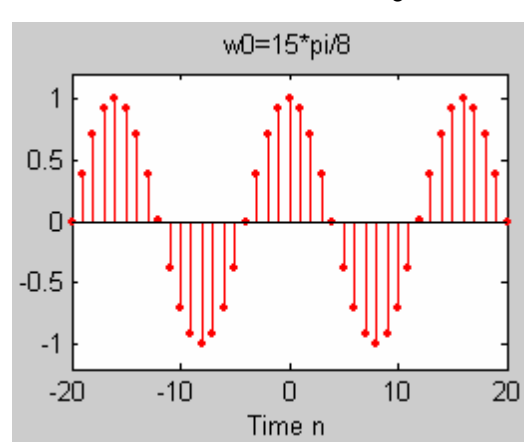
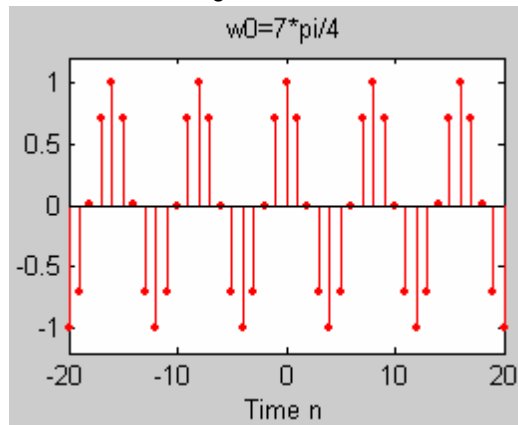
离散时间正弦信号





ω_0 从0开始增加，其振荡速率越来越快，直到 $\omega_0 = \pi$

ω_0 再增加，振荡速率下降，直到 $\omega_0 = 2\pi$



❖ 由图可见：

- 当 $\omega_0=0$ 时， $\cos \omega_0 n$ 的包络频率为常数，即此时的包络频率最低。
- 当 ω_0 值由0逐渐增大时， $\cos \omega_0 n$ 的包络频率也逐渐增高，直到 $\omega_0=\pi$ 时达到最高频率。
- 而当 ω_0 值继续增大时， $\cos \omega_0 n$ 的包络频率反而下降，直到 $\omega_0=2\pi$ 时又变成和 $\omega_0=0$ 时相同的结果。

❖ 离散信号的重要的特点：对离散正弦信号或者离散时间正弦指数信号而言，其最高包络频率等于 p 。

(2) 第二个性质，关于离散时间复指数信号的周期性问题。

为了使信号 $e^{j\omega_0 n}$ 是周期的，周期为 $N > 0$ ，就必须有

$$e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$$

等效于要求

$$e^{j\omega_0 N} = 1$$

上式要成立， $\omega_0 N$ 必须是 2π 的整数倍，也就是说必须有一个整数 m ，满足 $\omega_0 N = 2\pi m$ ，或者：

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N}$$

根据上式，若 $\omega_0/2\pi$ 为一有理数， $e^{j\omega_0 n}$ 就是周期的，否则就不是周期的。该结论对离散时间正弦信号也同样成立。

❖ 离散时间复指数信号的基波周期

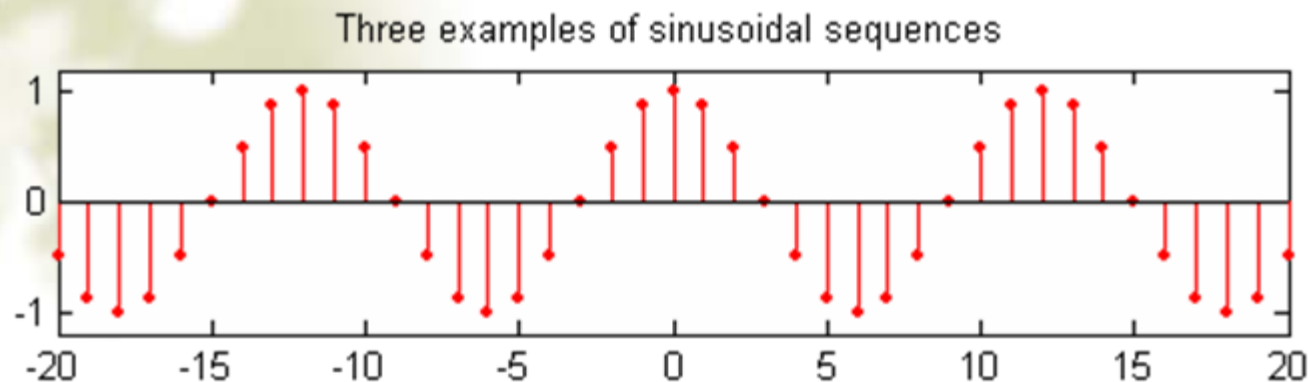
周期复指数信号 $x[n] = e^{j\omega_0 n}$ ，其中 $\omega_0 \neq 0$ 。那么一定存在若干对 m 和 $N(N > 0)$ ，满足 $\omega_0 / 2\pi = m/N$ 。基波周期：

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0} m$$

信号 $e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{j\omega_0 n}$ 的比较

$e^{j\omega_0 t}$	$e^{j\omega_0 n}$
ω_0 不同, 信号不同	频率相差 2π 的整数倍, 信号相同
对任何 ω_0 值都是周期的	仅当 $\omega_0 = \frac{2\pi m}{N}$ 时才是周期的
基波频率为 ω_0	基波频率 ω_0 / m
基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0, 2\pi / \omega_0$	基波周期: $\omega_0 = 0$, 无定义 $\omega_0 \neq 0, m(\frac{2\pi}{\omega_0})$

❖ 讨论 $x[n]=\cos(2 \pi n/12)$ 是否是周期信号？

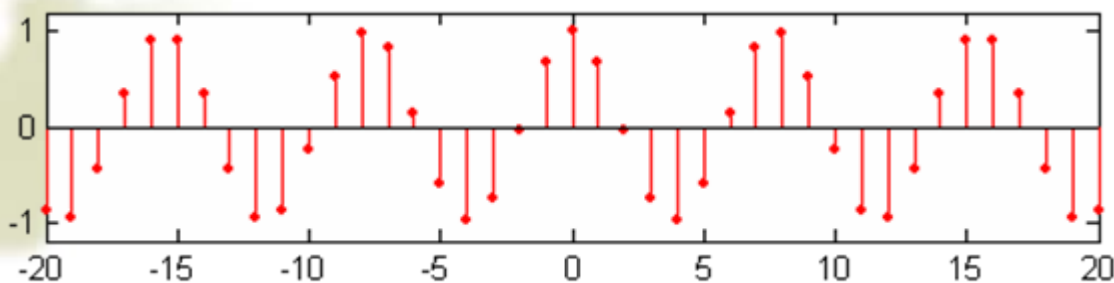


将序列 $x[n]=\cos(2 \pi n/12)$ 可以看成是连续时间正弦信号 $x(t)=\cos(2 \pi t/12)$ 在整数时刻点上的样本值。这时， $x(t)$ 是基波周期为12的周期信号，所以 $x[n]$ 也是基波周期为12的周期序列。

$$T=2 \pi/(2 \pi/12)=12;$$

$$N=m2 \pi/(2 \pi/12)=12 \quad (\text{取 } m=1);$$

❖ 讨论 $x[n] = \cos(8 \pi n/31)$ 是否是周期信号？

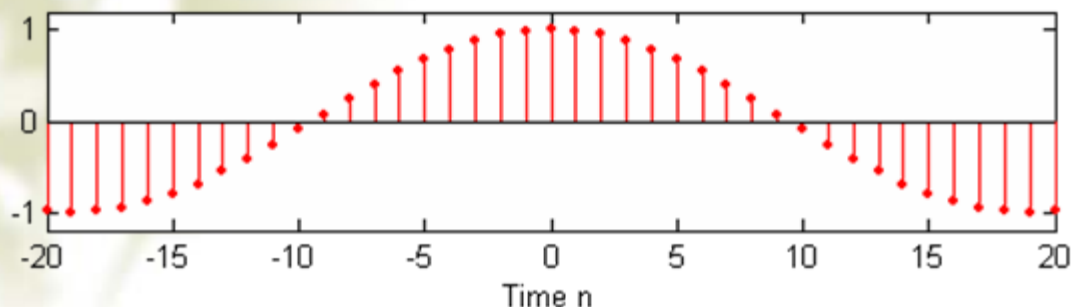


将 $x[n] = \cos(8 \pi n/31)$ 看成 $x(t) = \cos(8 \pi t/31)$ 在整数时刻点上的样本值。这时， $x(t)$ 基波周期是 $31/4$ ，而 $x[n]$ 基波周期却是 31。这是因为离散时间信号只能在整数值上有定义。当 $x(t)$ 从 $t=0$ 开始，在时刻 $t=31/4$ 上不能取得样本值，类似地在 $t=2(31/4)$ ， $t=3(31/4)$ 上也不存在样本点，直到 $t=4(31/4)=31$ ，才有整数的样本点，可取得样本值。

$$T = 2 \pi / (8 \pi / 31) = 31/4;$$

$$N = m \cdot 2 \pi / (8 \pi / 31) = 31m/4 = 31 \quad (\text{取 } m=4);$$

❖ 讨论 $x[n]=\cos(n/6)$ 是否是周期信号？



将 $x[n]=\cos(n/6)$ 看成 $x(t)=\cos(t/6)$ 在整数时刻点上的样本值。这时， $x(t)$ 的值在整数时刻点上永不重复，因为这些点从来也不会落在 $x(t)$ 周期 12π 及其倍数的点上，因此 $x[n]$ 不是周期的。

$$T=2\pi/(1/6)=12\pi;$$

$$N/m ?= 2\pi/(1/6) ?= 12\pi$$

(不存在这样整数 m 、 N 比值);

例：确定如下离散时间信号的基波周期

$$x[n] = e^{j(2\pi/3)n} + e^{j(3\pi/4)n}$$

解：

$$N1 = \frac{2\pi}{\omega_0} m = \frac{2\pi}{2\pi/3} m = 3m = 3 \quad \text{取 } m=1$$

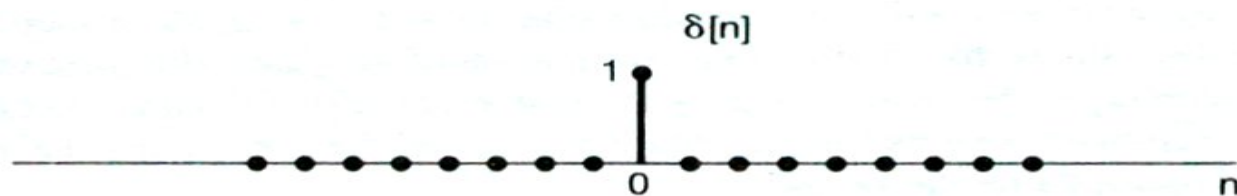
$$N2 = \frac{2\pi}{\omega_0} m = \frac{2\pi}{3\pi/4} m = 8m/3 = 8 \quad \text{取 } m=3$$

基波周期 N 就是 $N1, N2$ 的最小公倍数, $N=24$

1.4 单位冲激与单位阶跃函数

❖ 离散时间

(1) 单位脉冲 (或单位样本) $\delta[n] = \begin{cases} 0, & n \neq 0 \\ 1, & n = 0 \end{cases}$

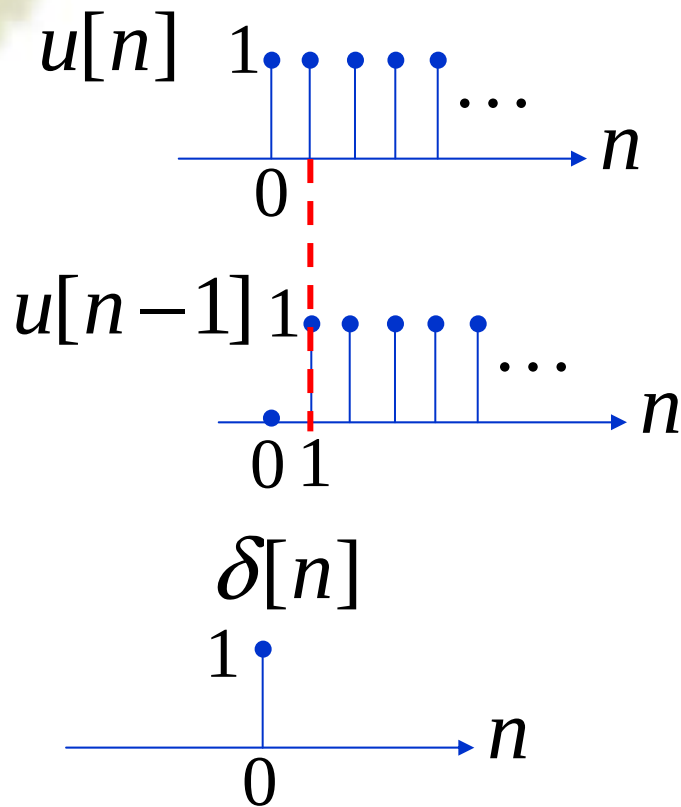


(2) 单位阶跃 $u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$



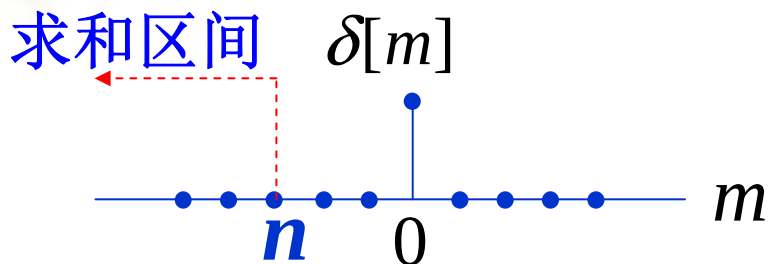
❖ 离散时间单位脉冲是离散时间单位阶跃的一次差分

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$$

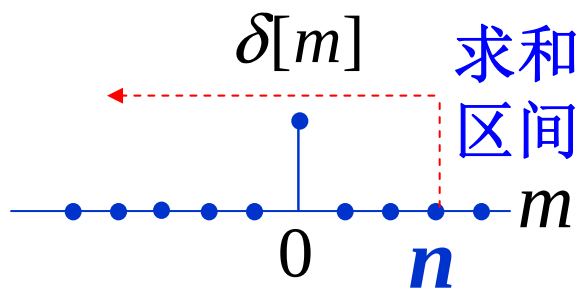


❖ 离散时间阶跃是单位脉冲的求和函数

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m]$$



$$n < 0, \\ u[n] = 0$$



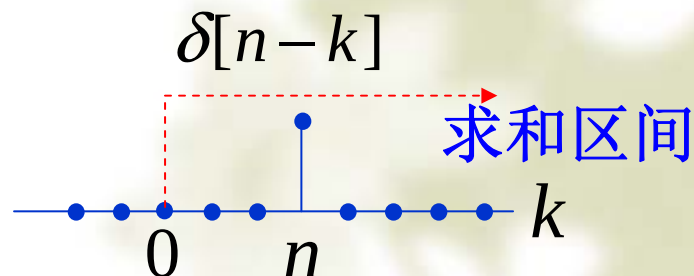
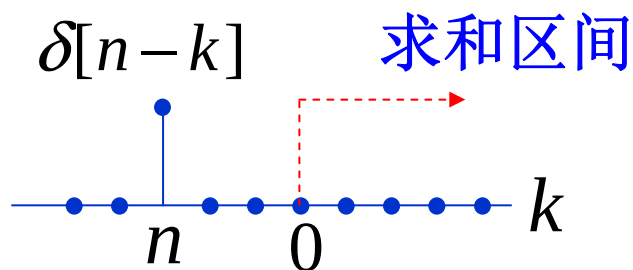
$$n \geq 0, \\ u[n] = 1$$

- ❖ 将求和变量从 m 改变为 $k=n-m$ 后，离散时间单位阶跃也可用单位样本表示成

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$$

这时， $\delta[n-k]$ 在 $k=n$ 时为非零，所以对 $n < 0$ 为0，而对 $n \geq 0$ 为1。

可以看作一些延时脉冲的叠加，也就是在 $n=0$ 发生的 $\delta[n]$ ，在 $n=1$ 发生的 $\delta[n-1]$ ，在 $n=2$ 发生的 $\delta[n-2]$等的和。



- ❖ 单位脉冲序列可以用于一个信号在 $n=0$ 处的值的采样，因为 $\delta[n]$ 仅在 $n=0$ 处有非零值（等于1），所以有： $x[n] \delta[n] = x[0] \delta[n]$
- ❖ 更一般的情况，考虑发生在 $n=n_0$ 处的单位脉冲 $\delta[n-n_0]$ ，那么就有

$$x[n] \delta[n-n_0] = x[n_0] \delta[n-n_0]$$

(3)单位脉冲和单位阶跃关系总结

❖ 一次差分 $\delta[n] = u[n] - u[n - 1]$

❖ 求和
$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^n \delta[m] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k]$$

❖ 单位脉冲的采样性质

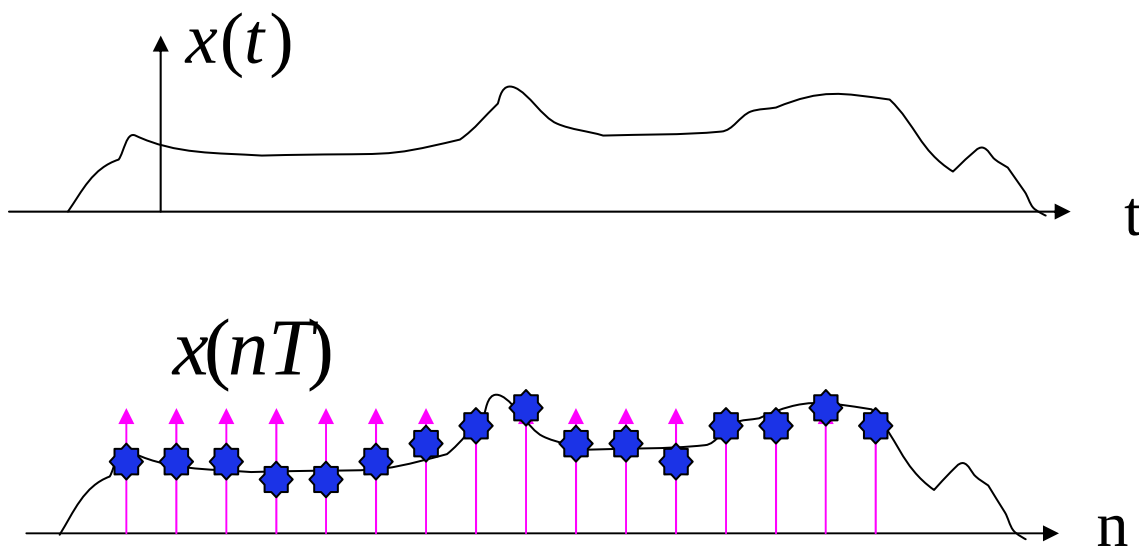
$$x[n]\delta[n] = x[0]\delta[n] \neq x[0]$$

$$x[n]\delta[n - n_0] = x[n_0]\delta[n - n_0] \neq x[n_0]$$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n - k]$$

单位脉冲的采样性质—冲激序列对连续信号抽样

$$x(nT) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$



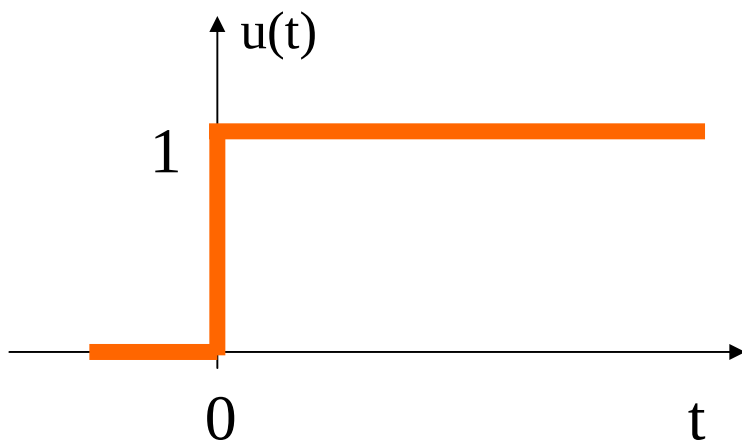
1.4.2 连续时间单位阶跃和单位冲激函数

(1) 单位阶跃函数

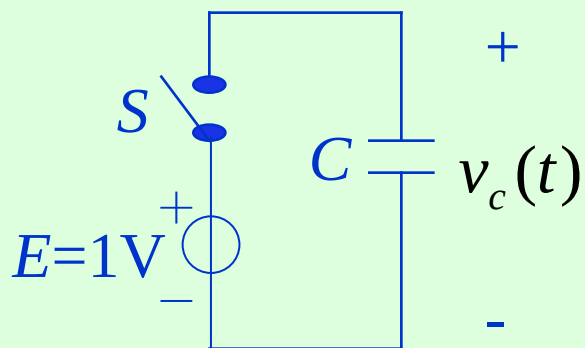
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$t=0?$

在 $t=0$ 这一点不连续, $u(t)$ 不做定义



• 工程中会不会出现 $u(t)$ 呢?

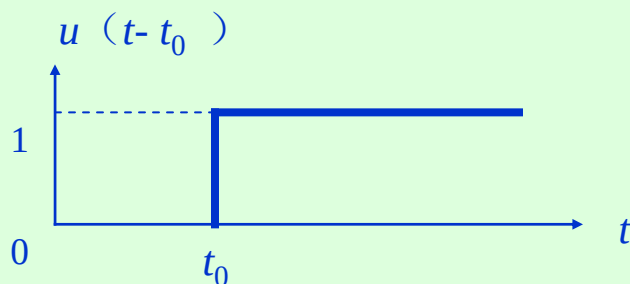


例：图中假设 S 、 E 、 C 都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$ 时 S 闭合，求电容 C 上的电压。

解：由于 S 、 E 、 C 都是理想元件，所以，回路无内阻，当 S 闭合后， C 上的电压会产生跳变，从而形成阶跃电压。即：

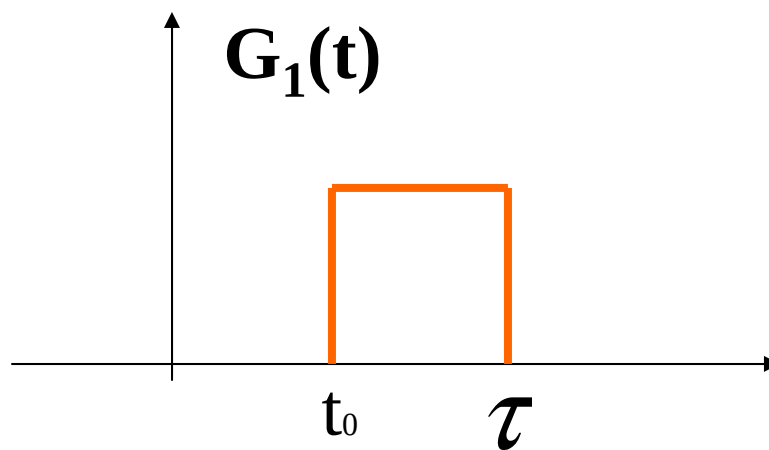
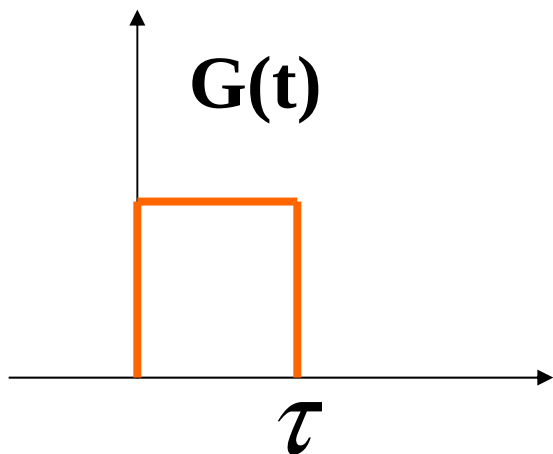
$$v_c(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases} = u(t)$$

如果开关 S 在 $t=t_0$ 时闭合，则电容上的电压为 $u(t-t_0)$ 。
 $u(t-t_0)$ 波形如下图所示：



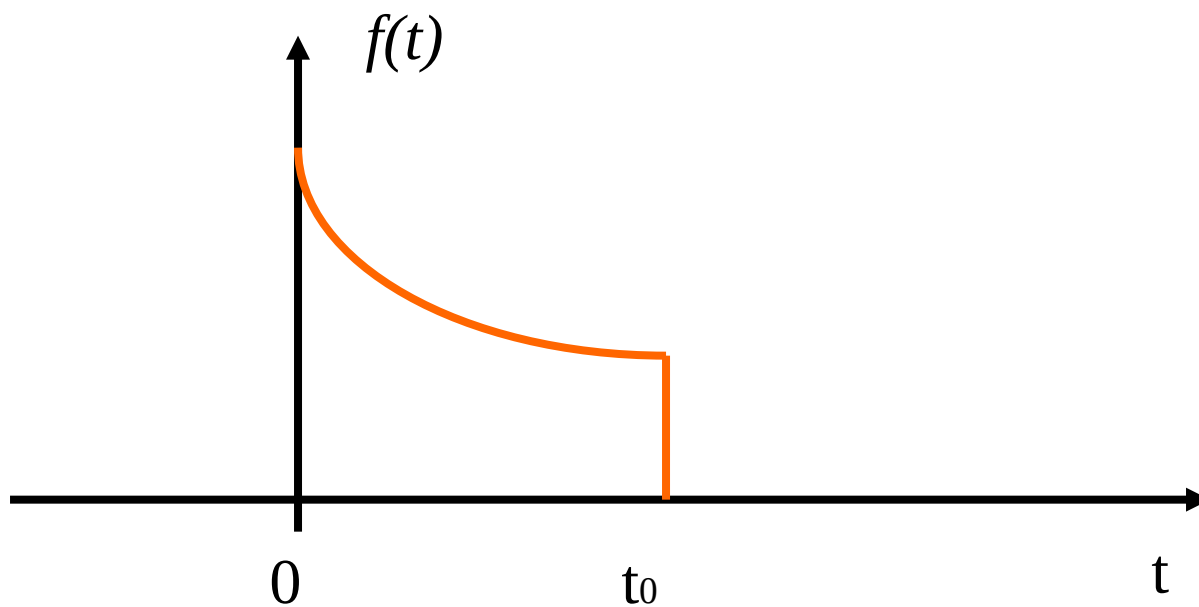
单位阶跃应用—用阶跃表示矩形脉冲

$$G(t) = u(t) - u(t - \tau) \quad G_1(t) = u(t - t_0) - u(t - t_0 - \tau)$$



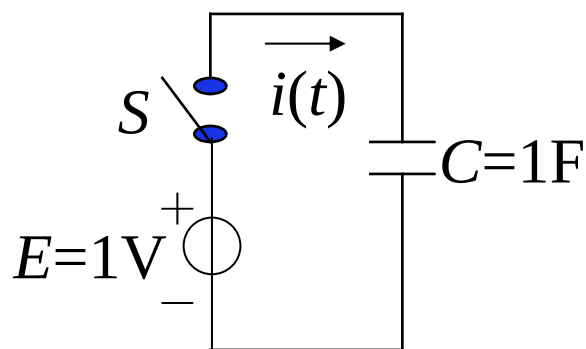
单位阶跃应用—信号加窗或取单边

$$f(t) = e^{-t} [u(t) - u(t - t_0)]$$



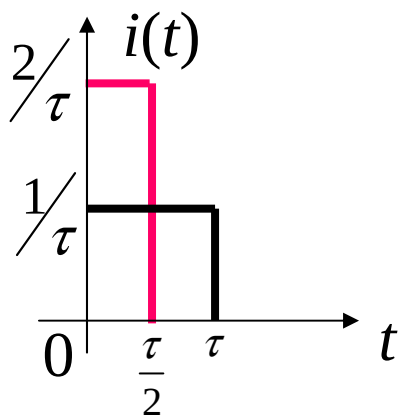
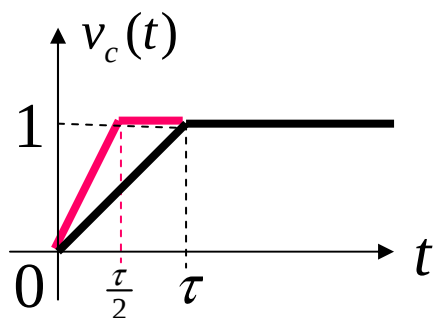
(2) 单位冲激函数

我们先从物理概念上理解如何产生冲激函数 $\delta(t)$

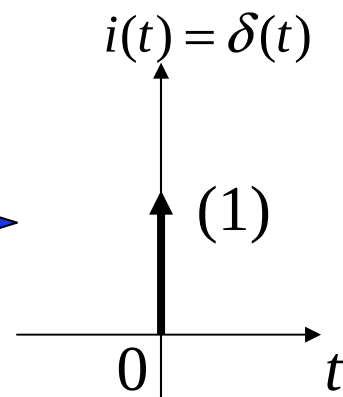


例： 图中假设 S 、 E 、 C 都是理想元件（内阻为0），当 $t=0$ 时 S 闭合，求回路电流 $i(t)$ 。

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt}$$

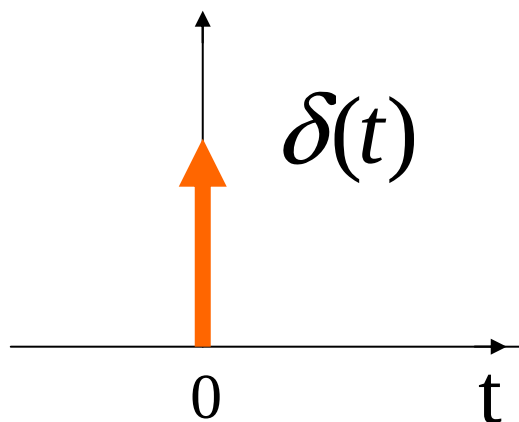


$\tau \rightarrow 0$



(2)单位冲激函数

- ❖ 持续时间无穷小，瞬间幅度无穷大，涵盖面积恒为1的一种理想信号，记 $\delta(t)$



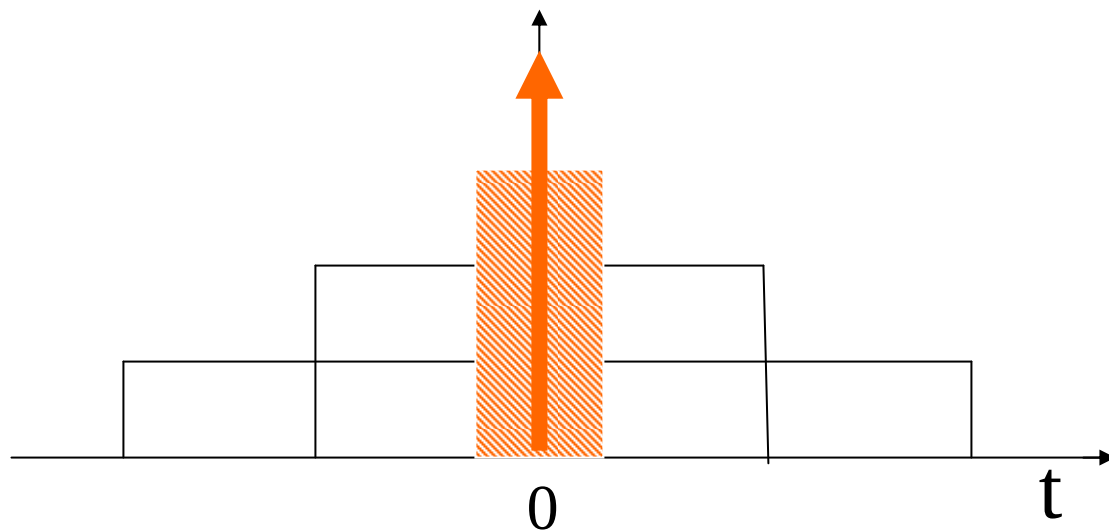
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & (t \neq 0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

这种定义方式是狄拉克提出来的，因此，又称为狄拉克（Dirac）函数。

矩形脉冲演变成冲激函数

❖ 定义：矩形面积不变，宽趋于0时的极限

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right]$$



三角脉冲演变成冲激函数动画

(3)单位阶跃与单位冲激函数的关系

❖ 一次微分

$$\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$



❖ 积分

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \delta(t - \tau) d\tau \end{aligned}$$

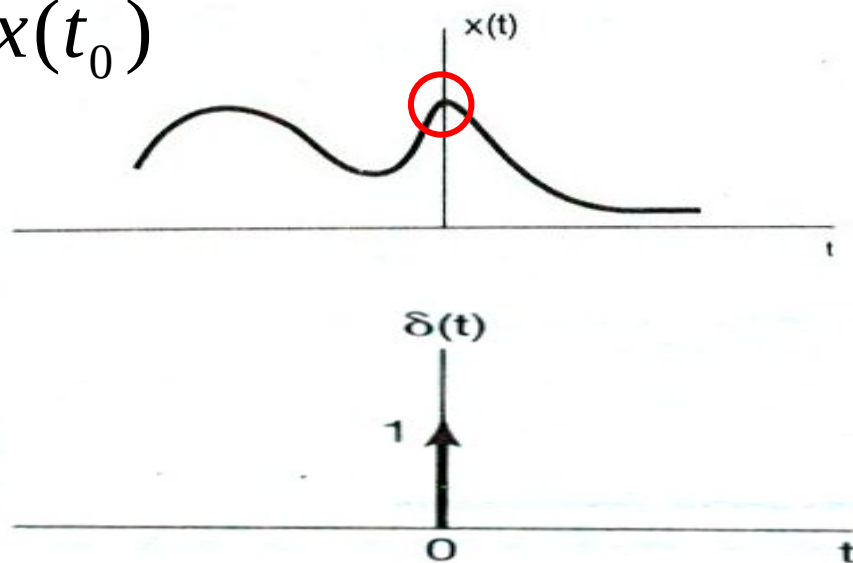


(4)单位冲激的筛选性质

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



冲激函数可以把冲激所在位置处的函数值抽取（筛选）出来

冲激函数的性质

❖ 偶函数 $\delta(t) = \delta(-t)$



❖ 积分 $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \iff \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$



❖ “筛选”性质



❖ 压扩 $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$

补充内容：信号的运算

❖ 单信号运算：

平移、反折、时间尺度变换、幅度变化、积分（求和）、微分（差分），.....

❖ 双或多信号运算：

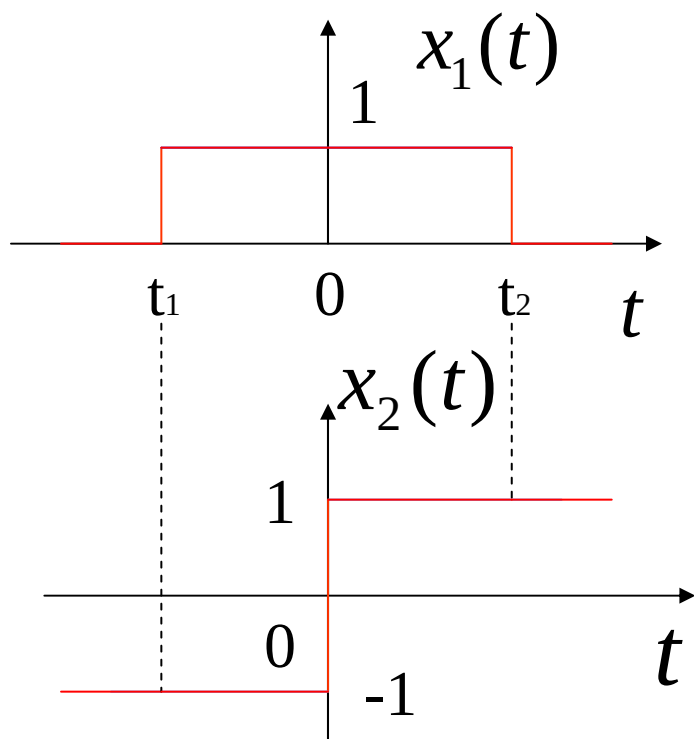
加、乘、卷积（卷和）、分解.....

信号的代数运算

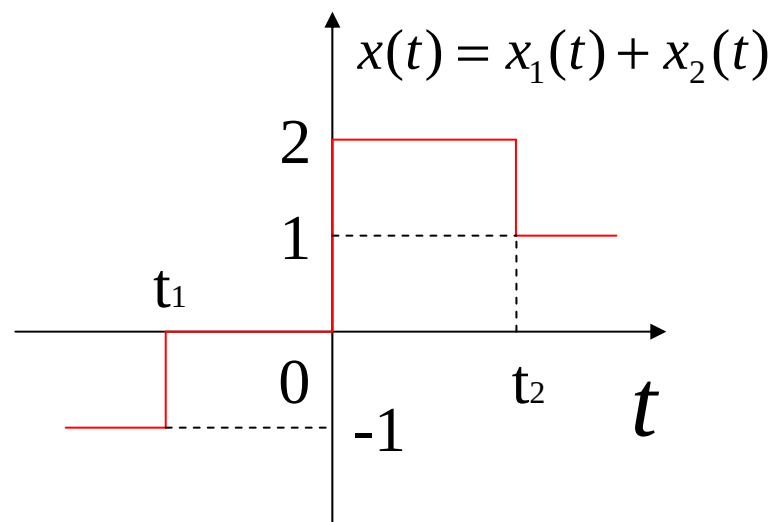
➤ 信号的加减运算: $x(t) = x_1(t) \pm x_2(t)$



➤ 注意要在对应的时间上进行加减运算。

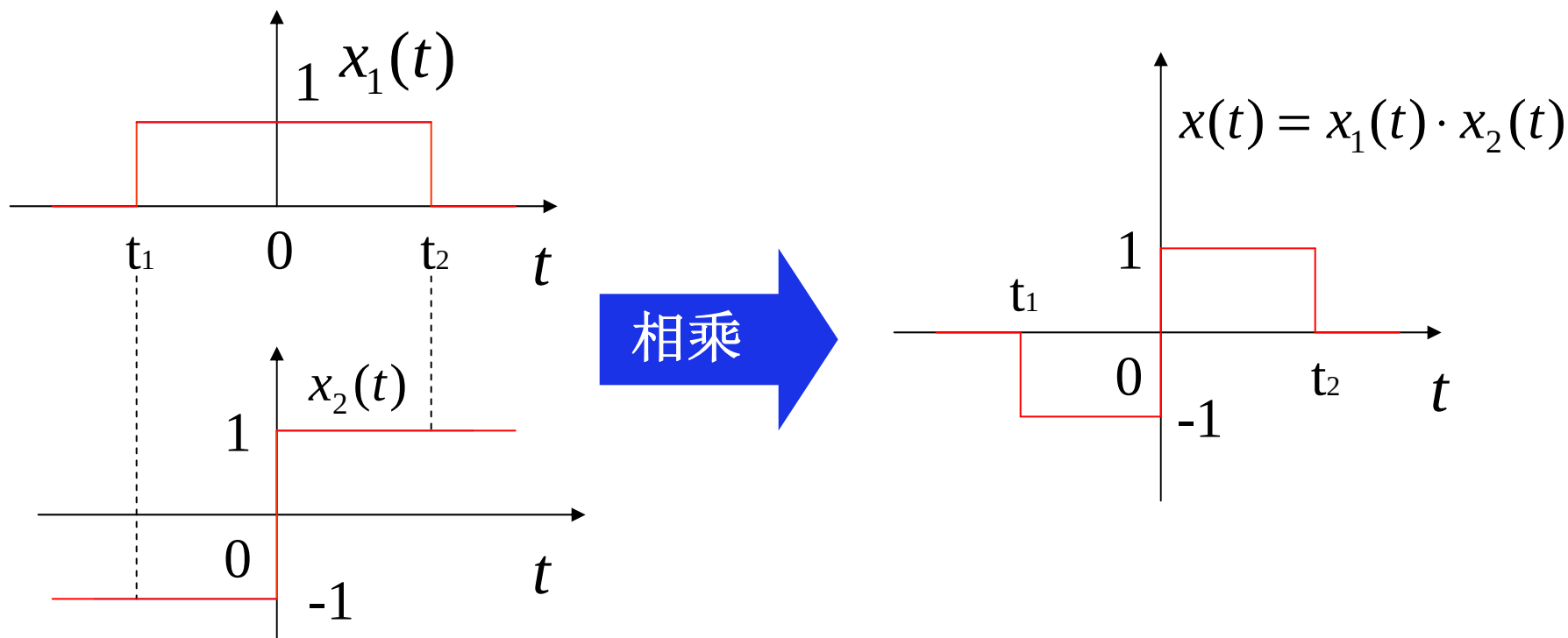


相加



相乘运算

- 信号的相乘运算: $x(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$
- 注意要在对应的时间上进行相乘运算。



信号的微分与积分运算

- **微分运算**: $y(t) = \frac{dx(t)}{dt} = x^{(1)}(t)$

注意：在间断点处微分^{dt}时得到冲激信号，其冲激强度等于跳变值。

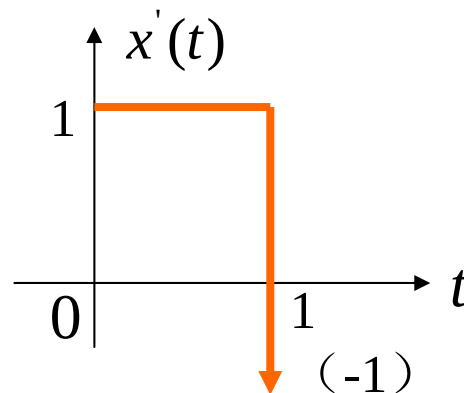
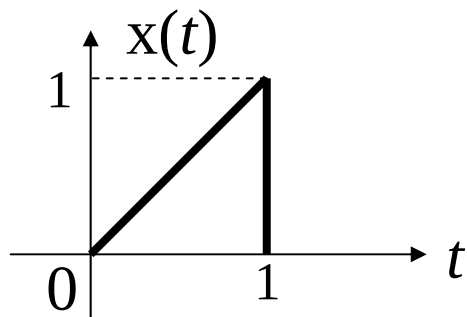
-

- **积分运算**: $y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = x^{(-1)}(t)$

注意：在分段积分时，要考虑到前一段的积分值对以后积分的影响。

举例(1)—微分运算

求下图所示信号 $x(t)$ 的微分 $x'(t)$ 并画出 $x'(t)$ 的波形

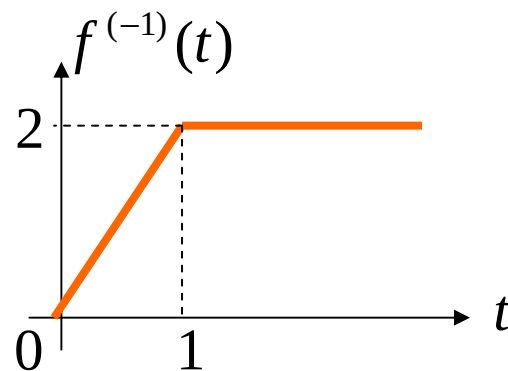
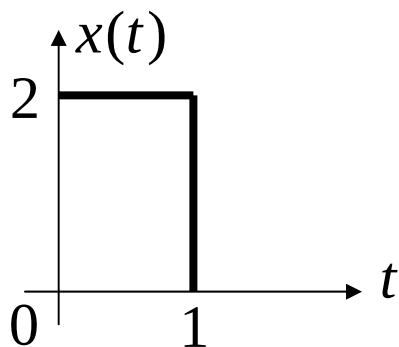


解: $x(t) = t [u(t) - u(t-1)]$

$$\begin{aligned} x'(t) &= [u(t) - u(t-1)] + t[\delta(t) - \delta(t-1)] \\ &= [u(t) - u(t-1)] - \delta(t-1) \end{aligned}$$

举例(2)—积分运算

求下图所示信号 $x(t)$ 的积分 $x^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$, 并画出其波形



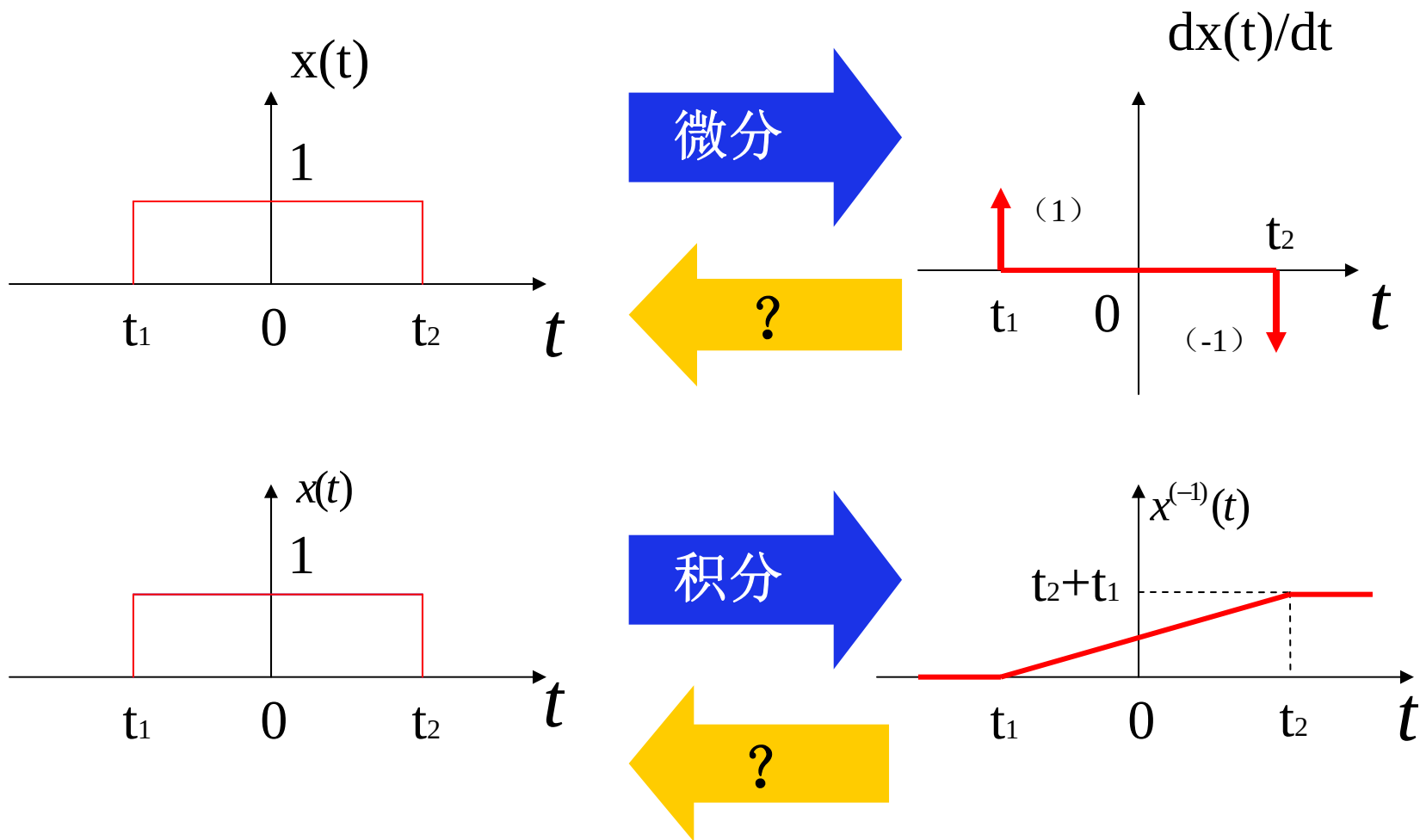
解：1) 当 $t < 0$ 时, $x^{(-1)}(t) = 0$

2) 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $x^{(-1)}(t) = \int_0^t 2 d\tau = 2t$

3) 当 $t > 1$ 时, $x^{(-1)}(t) = \int_0^1 2 d\tau = 2$

$$\begin{aligned} f^{(-1)}(t) &= 2t[u(t) - u(t-1)] + 2u(t-1) \\ &= 2tu(t) - 2(t-1)u(t-1) \end{aligned}$$

举例:



- 在离散信号中，相应于微分、积分的运算是离散信号的差分与求和。

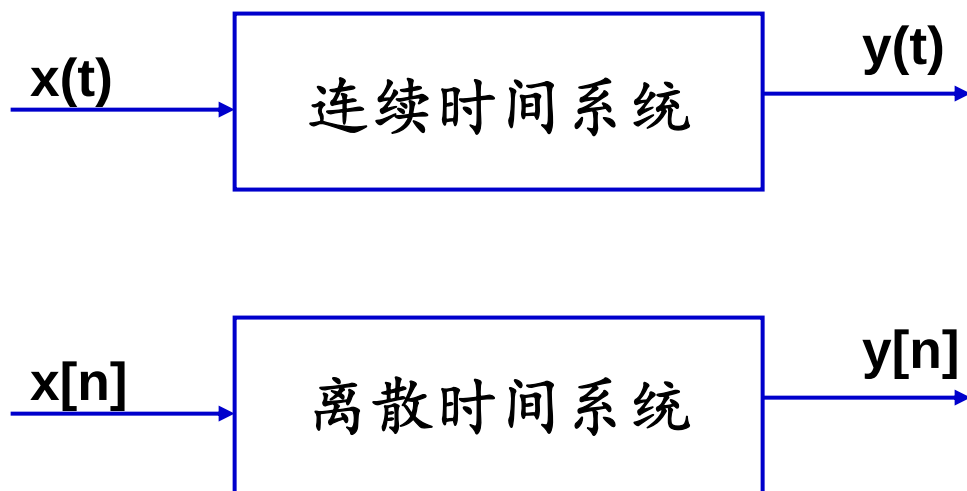
一阶差分（后向、前向）：

$$\nabla x[n] = x[n] - x[n-1] \quad \nabla x[n] = x[n+1] - x[n]$$

求和： $y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$

Example 1.7

1.5 连续时间和离散时间系统



$$x(t) \xrightarrow{L} y(t)$$

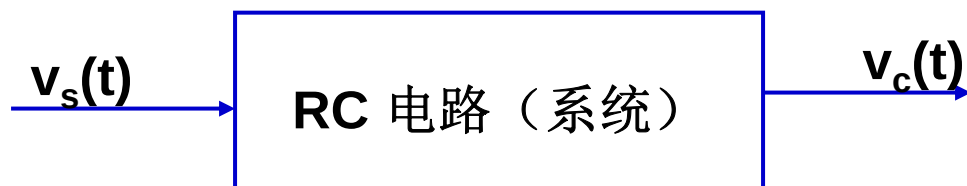
$$x[n] \xrightarrow{L} y[n]$$

1.5.1 简单系统举例

例 1.8:

图1.1的RC电路： $V_c(t) \sim V_s(t)$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC}v_c(t) = \frac{1}{RC}v_s(t)$$



$$\sum_{k=0}^n a_k y^{(k)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k x^{(k)}(t)$$

例 1.10:

某银行按月结余的一个简单模型:

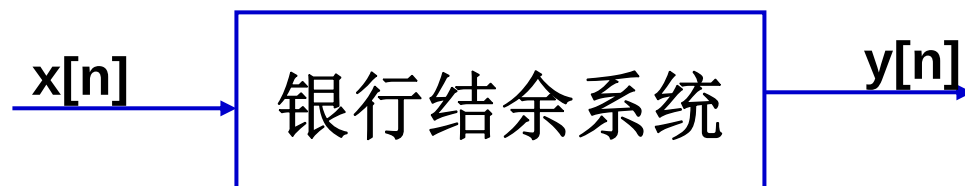
第 n 个月的结余 --- $y[n]$

净存款 --- $x[n]$

利息 --- 1%

有: $y[n] = y[n-1] + 1\% \cdot y[n-1] + x[n]$

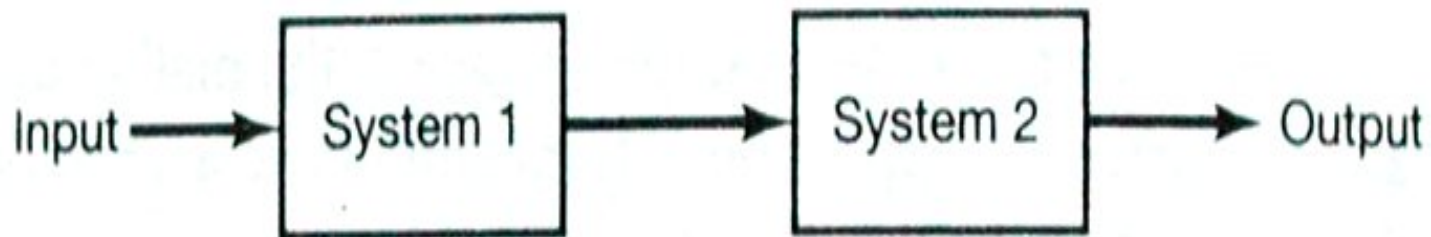
或者 $y[n] - 1.01y[n-1] = x[n]$



$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

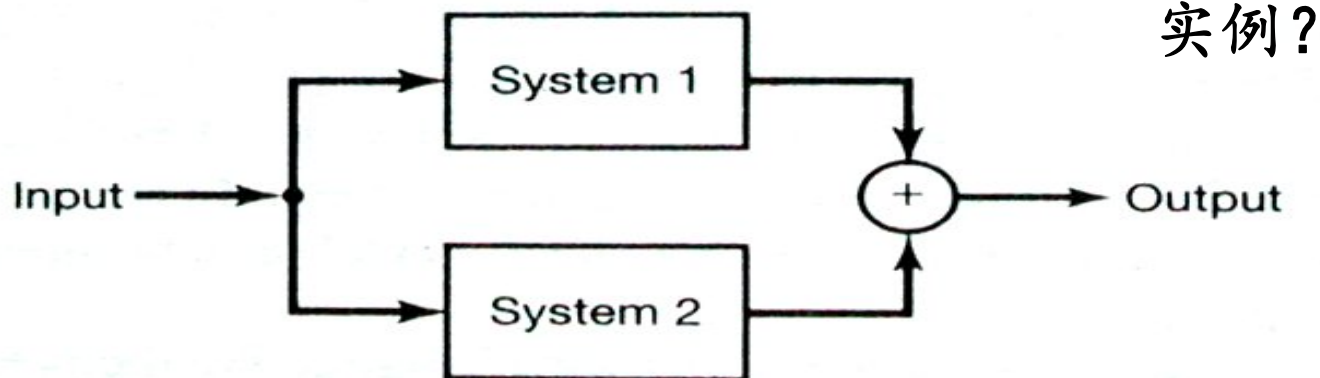
1.5.2 系统的互联

(1) 级联

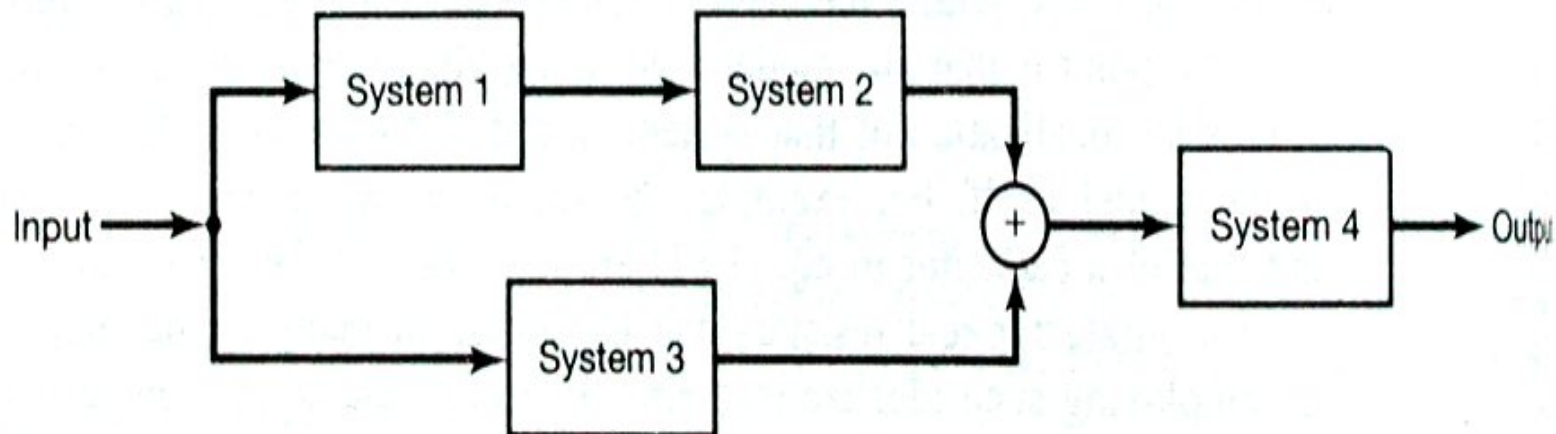


实例？

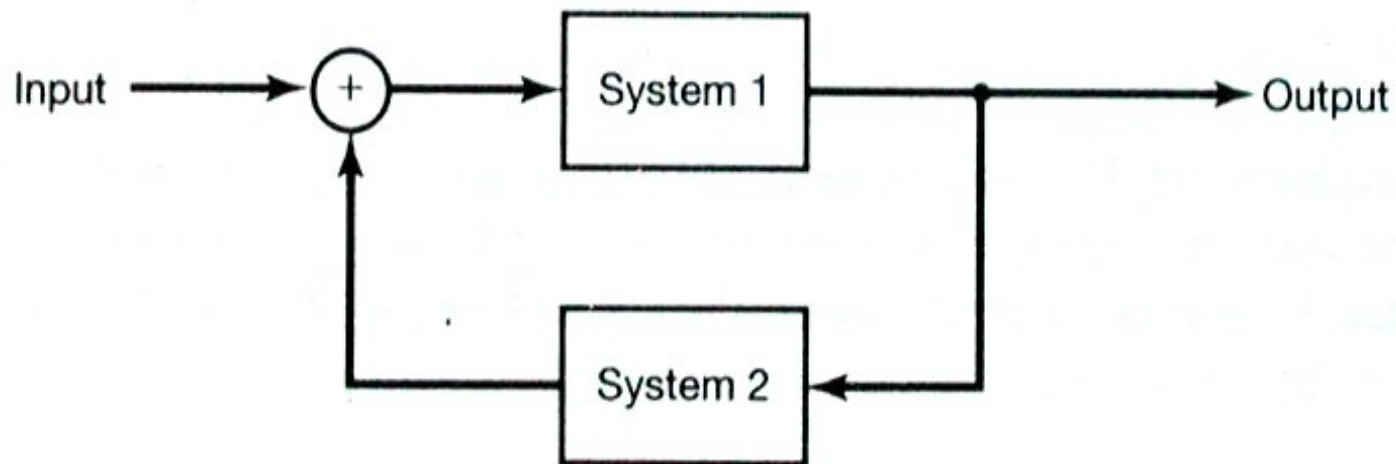
(2) 并联



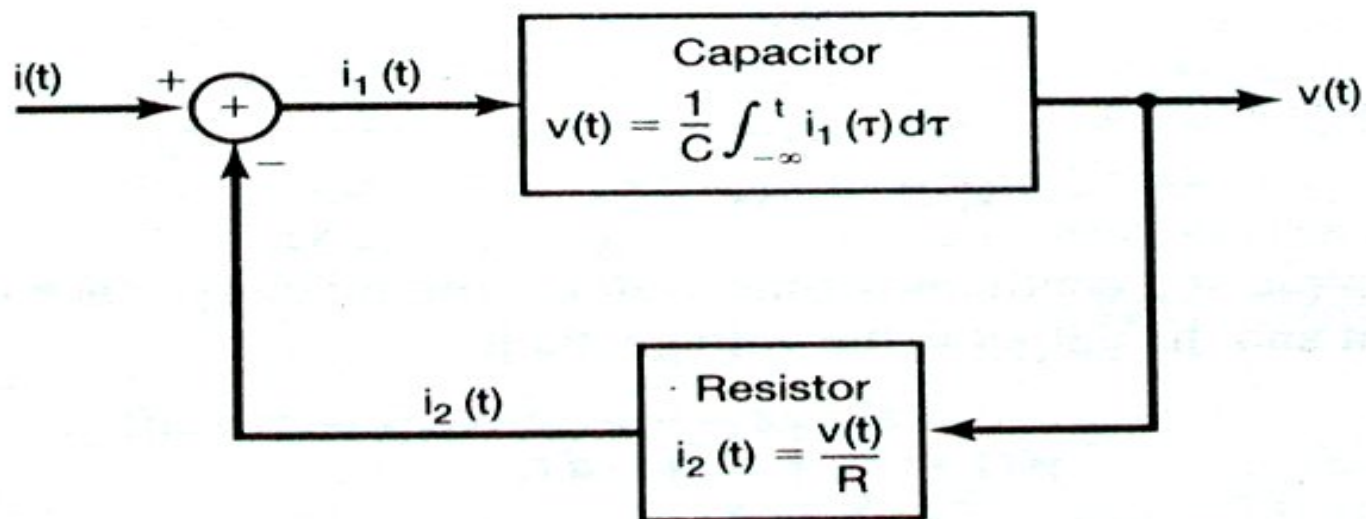
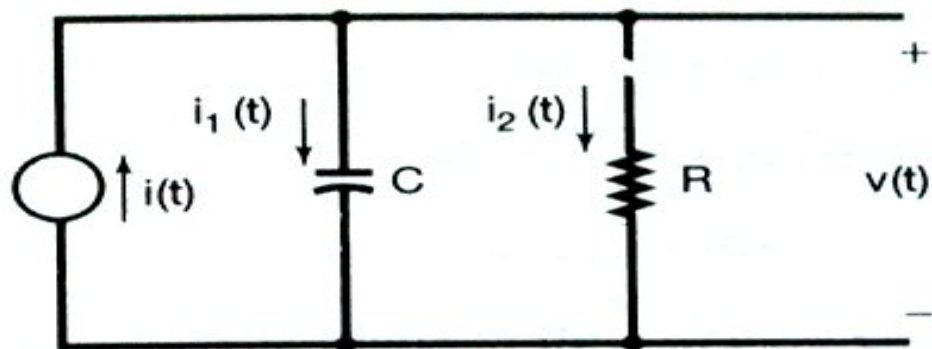
(3) 级联/并联连接



(3)反馈系统



反馈系统的一些例子



1.6 基本系统性质

- ❖ 记忆系统与无记忆系统
- ❖ 可逆性与可逆系统
- ❖ 因果性
- ❖ 稳定性
- ❖ 时不变性
- ❖ 线性

1.6.1 记忆系统与无记忆系统

无记忆系统:如果对自变量的每一个值, 一个系统的输出仅决定于该时刻的输入

特点: 没有电容, 没有延时单元

无记忆系统例子:

$$y(t) = C x(t) \text{ 或 } y[n] = C x[n]$$

❖ 一种特别简单的无记忆系统就是恒等系统:

记忆系统例子:

$$y(t) = x(t)$$

$$y[t] = x[n]$$

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

$$\text{或 } y[n] - 0.5y[n-1] = 2x[n]$$

❖ 离散时间记忆系统的一个例子就是累加器：

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n x[k]$$

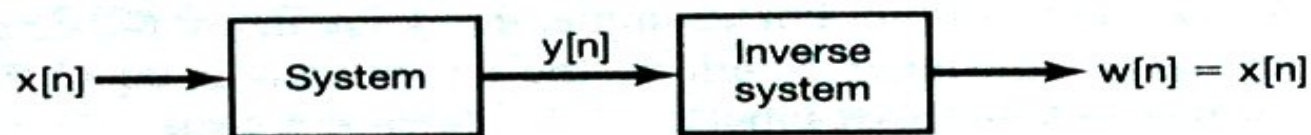
例2：延迟单元 $y[n]=x[n-1]$ 记忆系统

- 💣 系统中记忆的概念，相应于该系统具有保留或存贮不是当前时刻输入信息的功能。
- 💣 系统具有记忆的概念，一般总是使人联想到存储过去的输入或输出值，但是根据所给出的定义，当前的输出与输入和输出的将来值有关的系统也称之为记忆系统。

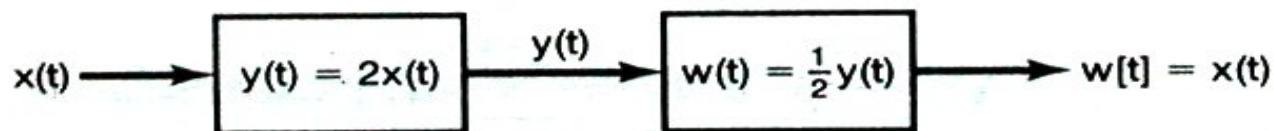
1.6.2 可逆性和可逆系统

❖ 定义:

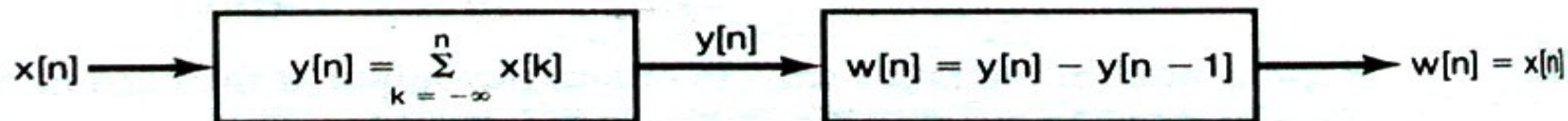
- 不同输入下, 导致不同输出——可逆性
- 如果一个系统可逆, 那么就有一个逆系统。



(a)



(b)



(c)

- ❖ 可逆性在很多领域都是一个重要的概念。如在通信应用中所用到的编码系统，对于无损失编码来说，编码器的输入必须要从输出中完全准确无误地恢复出来，也就是说，该编码器是可逆的。
- ❖ 如图像，特别是医学图像的无损压缩，PACS系统中传送的图像都有一个**压缩——解压缩**的过程。

1.6.3 因果性

❖ 定义：

- 如果一个系统在任何时刻的输出只决定于现在的输入和过去的输入，就称为因果系统。

❖ 所有的无记忆系统都是因果的。



– $y[n]=x[n]-x[n+1]$



非因果

– $y(t)=x(t+1)$



非因果

– $y(t)=\cos(t+1)x(t)$



因果

例1：系统 $y[n]=x[-n]$ 是否是因果系统？

解：在全部时间上考虑输入—输出关系

$n < 0$ ，非因果系统

$n > 0$ ，因果系统

例2：判断系统 $y(t) = x(t)\cos(t+1)$ 是否是因果系统

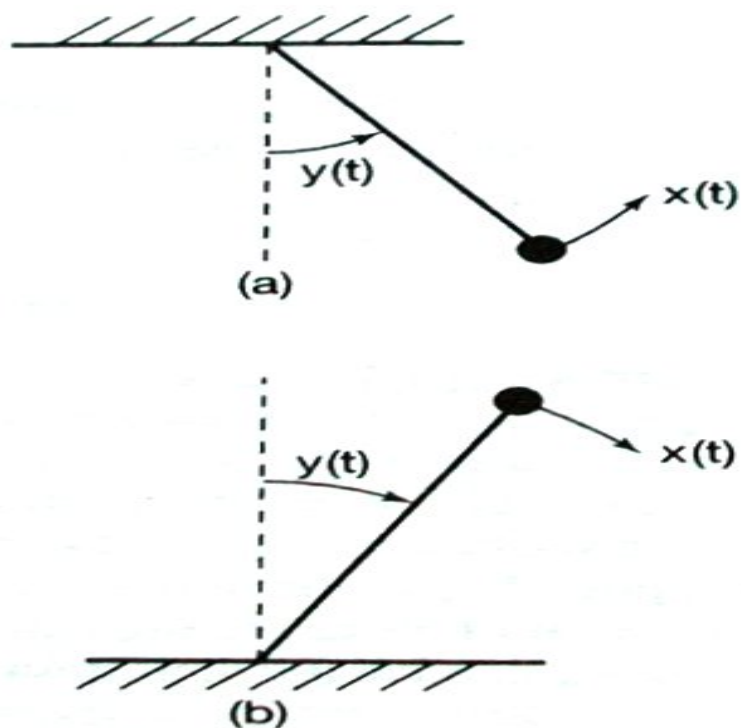
解：检验系统因果性时，要把输入信号的影响地从系统定义中所用到的其它函数的影响区分开来。

本题中仅仅是输入 $x(t)$ 的当前值影响了输出 $y(t)$ 的当前值，所以该系统是因果的，事实上还是无记忆的。

1.6.4 稳定性

❖ 定义：

- 输入在任何时刻有界，输出也在任何时刻有界



Example 1.13

1.6.4 稳定性

例1：输入是单位阶跃的累加器系统

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k]$$

解：输出就是

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^n u[k] = (n+1)u[n]$$

输入 $u[k]$ 是有界的，其界为1（对全部 k 来说），但输出却是无界的，随着 n 的增长而无限增长。所以，该系统是不稳定的。

例2：系统 $y[n] = \frac{1}{n} \sum_{k=-\infty}^n u[k]$ 是否是稳定系统？

❖ 如果怀疑一个系统是不稳定的话，找一个特别的有界输入，看是否会导致一个无界的输出。

例3：系统 $y(t) = tx(t)$ 是否稳定？

解：要找一个特殊的反例来证明系统是不稳定的，可以用一个常数或阶跃输入这样的简单有界输入试试。

当恒定输入 $x(t) = 1$ 时， $y(t) = t$ ，这是无界的。

所以该系统是不稳定系统。

例4：系统 $y(t) = e^{x(t)}$ 是否是稳定系统？

解：我们不可能找到一个有界的输入而产生一个无界的输出，所以就得按在**所有有界输入下都产生有界输出的办法来确认它**。

令 A 为任意正数，并令 $x(t)$ 是被 A 所界定的某任意信号，只要对全部 t 都有 $|x(t)| < A$ ，那么 $y(t)$ 一定有

$$|y(t)| < e^A$$

所以，只要系统的任何输入是被某一正数所界定的话，那么相应的输出就保证界定。因此，系统是稳定系统。

1.6.5 时不变性

从概念上讲，若系统的特性行为不随时间而变，该系统就是时不变的。

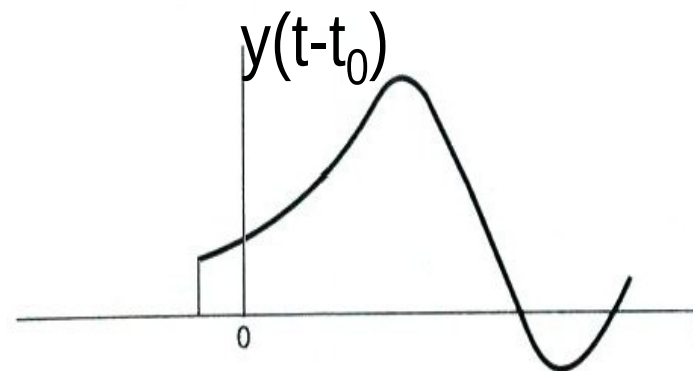
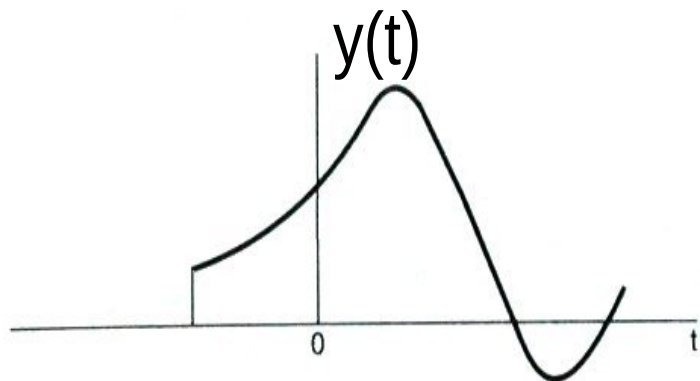
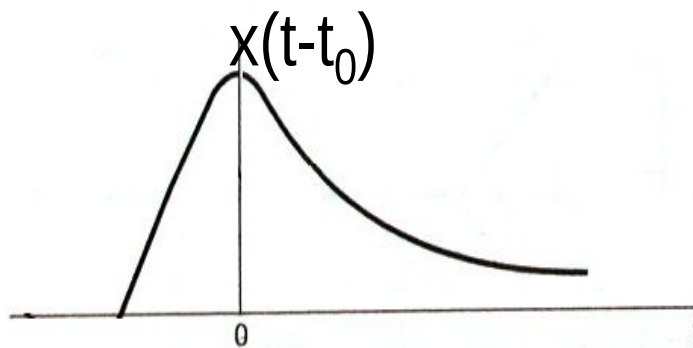
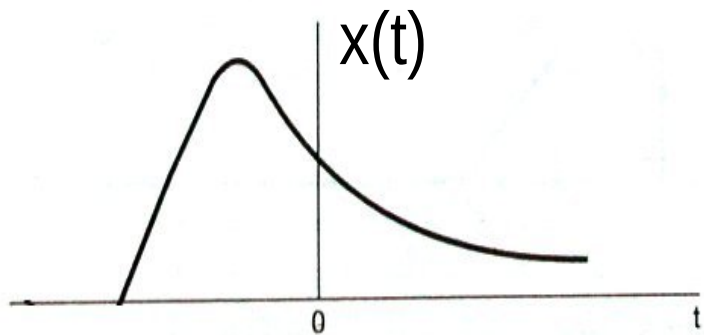
用信号与系统的语言来描述，就是，如果在输入信号上有一个时移，而在输出信号上产生同样的时移，那么这个系统就是时不变的。也就是说，若 $y(t)$ 是一个时不变系统在输入为 $x(t)$ 的输出，那么当输入为 $x(t-t_0)$ 时输出就是 $y(t-t_0)$ 。

1.6.5 时间不变系统

❖ 系统的行为特性不随时间而变

如果 $x(t) \longrightarrow y(t)$, 那么 $x(t-t_0) \longrightarrow y(t-t_0)$

或 如果 $x[n] \longrightarrow y[n]$, 那么 $x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$



例：1.14

1.15

1.16

例1：系统 $y(t) = \sin[x(t)]$ 是否是时不变系统？

解：令 $x_1(t)$ 是系统的任一输入，并令

$$y_1(t) = \sin[x_1(t)] \quad \text{式1.0}$$

是其相应的输出。将 $x_1(t)$ 时移， $x_2(t) = x_1(t-t_0)$ ，作为第二个输入，相对应的输出是

$$y_2(t) = \sin[x_2(t)] = \sin[x_1(t-t_0)]$$

根据式1.0，有

$$y_2(t) = y_1(t-t_0)$$

因此，这个系统是时不变的。

例2：系统 $y[n] = nx[n]$ 是否是时不变系统？

解：这个例子的系统代表的是一个具有时变增益的系统，譬如，若已知当前的输入值是1，不知道当前的时刻，就不能确定当前的输出值。

令输入信号 $x_1[n] = \delta[n]$ ，输出

$$y_1[n] = n \delta[n] = 0$$

当输入 $x_2[n] = \delta[n-3]$ ，输出

$$y_2[n] = n \delta[n-3] = 3 \delta[n-3]$$


$$y_2[n] \neq 3$$

显然， $y_2[n]$ 不等于 $y_1[n-3]$ 。所以，当 $x_2[n]$ 是 $x_1[n]$ 的时移时， $y_2[n]$ 并不是 $y_1[n]$ 的时移。**时变系统。**

💣 系统有一个时变的增益，其结果就是一个时变的系统，而上例系统有一个常数的增益，就是一个时不变系统。

系统增益是常数，
就一定是时不变
系统吗？

例3: $y(t) = x(2t)$

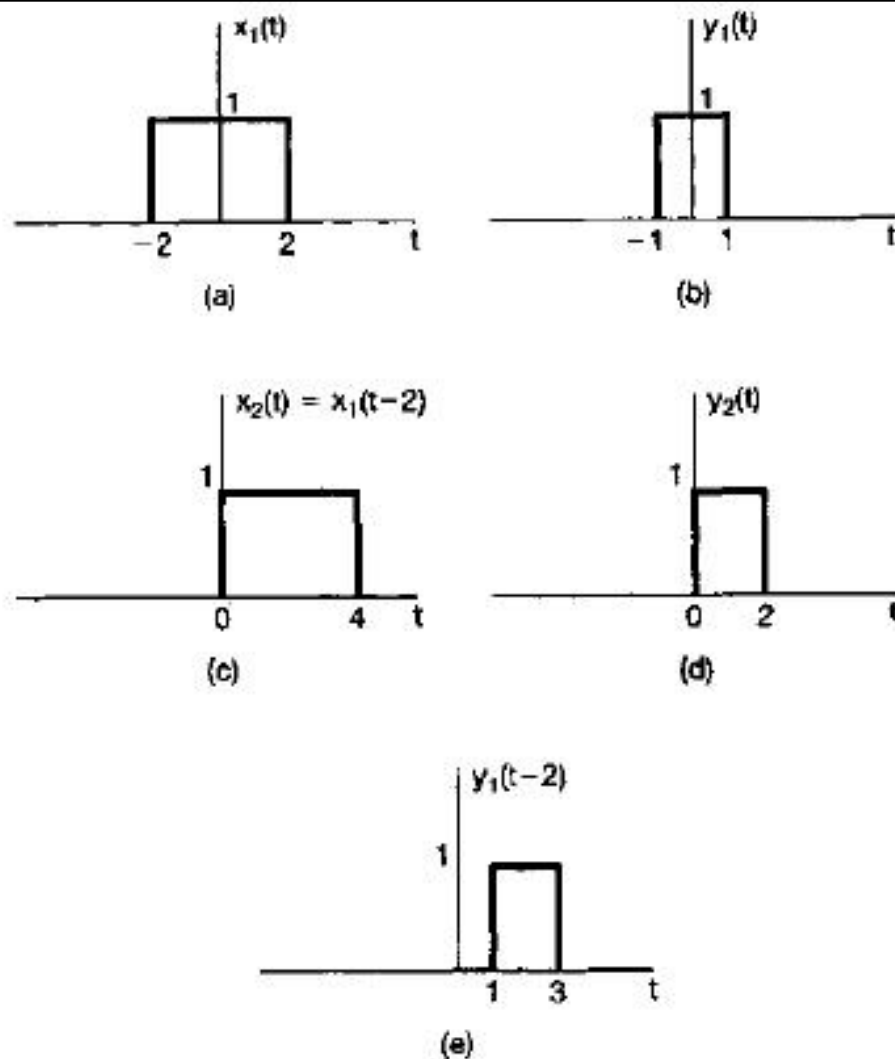


图 1.47 (a)例 1.16 中的系统输入 $x_1(t)$; (b)对应于 $x_1(t)$ 的输出 $y_1(t)$;
(c)经移位的输入 $x_2(t) = x_1(t-2)$; (d)对应于 $x_2(t)$ 的输出 $y_2(t)$;
(e)移位信号 $y_1(t-2)$ 注意: $y_2(t) \neq y_1(t-2)$, 说明该系统不是时不变的

1.6.6 线性

❖ 同时具备可加性和齐次性



- 可加性: $y_1(t)+y_2(t)$ 是对 $x_1(t)+x_2(t)$ 的响应。
- 齐次性: $ay_1(t)$ 是对 $ax_1(t)$ 的响应。(a 是任意复常数 $a \neq 0$)

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

❖ 把定义一个线性系统的两个性质结合在一起：

$$ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow ay_1[n] + by_2[n]$$

❖ 叠加性质

若 $x_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$, 是某一个离散时间线性系统的一组输入, 其相应的输出为 $y_k[n]$, $k=1,2,3,\dots$, 那么对由这一组输入的线性组合

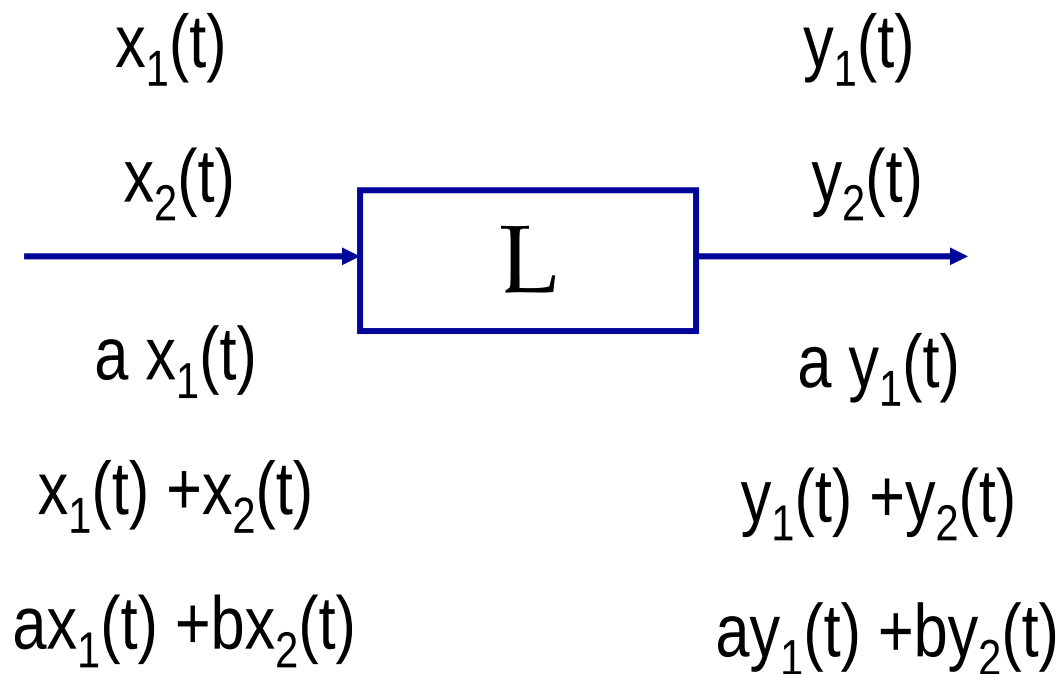
$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots$$

的响应就是

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots$$

线性系统

可加性
齐次性



Example 1.17 1.18

例1：系统S，其输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 的关系为 $y(t) = tx(t)$ ，判断S是否是线性的。

解：设 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 是系统S的任意两个输入，则有

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = tx_1(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = tx_2(t)$$

令 $x_3(t)$ 是 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 的线性组合为 $x_3(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$

若 $x_3(t)$ 是S的输入，那么相应的输出可以表示为

$$y_3(t) = tx_3(t) = t(ax_1(t) + bx_2(t)) = atx_1(t) + btx_2(t) = ay_1(t) + by_2(t)$$

结论：系统S是线性的。

例2：系统S，其输入 $x(t)$ 与输出 $y(t)$ 的关系为

$$y(t) = x^2(t)$$

判断S是否是线性的？

解：定义 $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 上例一样，就有

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$

$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

$$\text{和 } x_3(t) \rightarrow y_3(t) = x_3^2(t)$$

$$= (ax_1(t) + bx_2(t))^2$$

$$= a^2 x_1^2(t) + 2abx_1(t)x_2(t) + b^2 x_2^2(t)$$

$$= a^2 y_1(t) + b^2 y_2(t) + 2abx_1(t)x_2(t)$$

显然， $y_3(t)$ 不等于 $ay_1(t) + by_2(t)$ ，所以系统S不是线性的。

❖ 在检验一个系统的线性时，重要的是要牢记：**系统必须同时满足可加性和齐次性**，而信号和比例常数都可以是复数。

例3：系统 $y[n]=R_e\{x[n]\}$ 是否是线性系统？（注：若 c 是一个复数， $R_e\{c\}$ 记做 c 的实部， $P_m\{c\}$ 记做 c 的虚部）

解：显然，这个系统是可加的，但齐次性呢？

令 $x_1[n]$ 是一个实部为 $r[n]$ ，虚部 $s[n]$ 的任意复输入

$$x_1[n] = r[n] + js[n]$$

相应的输出

$$\begin{aligned} y_1[n] &= R_e\{x_1[n]\} \\ &= r[n] \end{aligned}$$

现在把 $x_1[n]$ 乘以一个复数 $c = j$ ，即输入

$$\begin{aligned}x_2[n] &= jx_1[n] \\&= j(r[n] + js[n]) \\&= -s[n] + jr[n]\end{aligned}$$

对应于 $x_2[n]$ 的输出

$$y_2[n] = R_e\{x_2[n]\} = -s[n]$$

显然， $y_2[n]$ 不等于 $cy_1[n] = jr[n]$ 。

因此，这个系统违反了齐次性，不是线性系统。

例4：系统 $y[n] = 2x[n] + 3$ 是否是线性的？

解：设 $x_1[n]$ 和 $x_2[n]$ 是系统的任意输入，则相应的输出

$$y_1[n] = 2x_1[n] + 3$$

$$y_2[n] = 2x_2[n] + 3$$

令 $x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$ ，相应的输出

$$\begin{aligned} y_3[n] &= 2x_3[n] + 3 \\ &= 2(x_1[n] + x_2[n]) + 3 \\ &= 2x_1[n] + 2x_2[n] + 3 \\ &= y_1[n] + y_2[n] - 3 \end{aligned}$$

显然， $y_3[n]$ 不等于 $y_1[n] + y_2[n]$ 。

所以，该系统不是线性系统。

💣令人吃惊的是， $y[n] = 2x[n] + 3$ 明明是线性方程。这个系统的输出可以表示为一个线性系统的输出与另一个零输入响应的信号之和。这类系统称为增量线性系统，对任意两个输入的响应的差是两个输入差的线性函数。

$$y_1[n] - y_2[n] = 2x_1[n] + 3 - 2x_2[n] + 3 = 2\{x_1[n] - x_2[n]\}$$

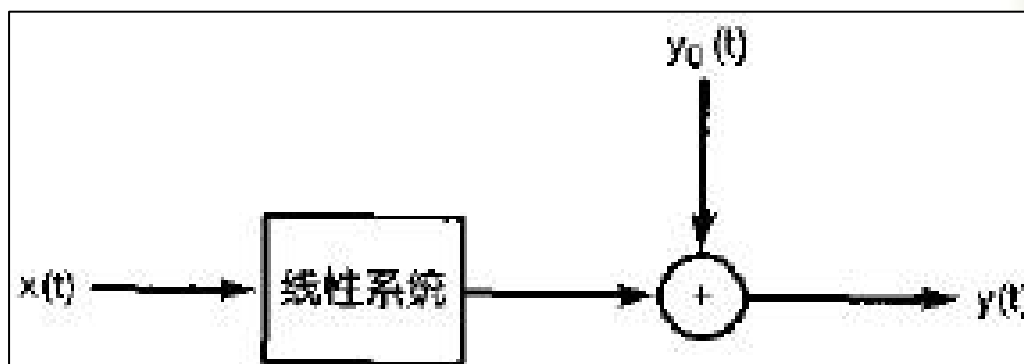
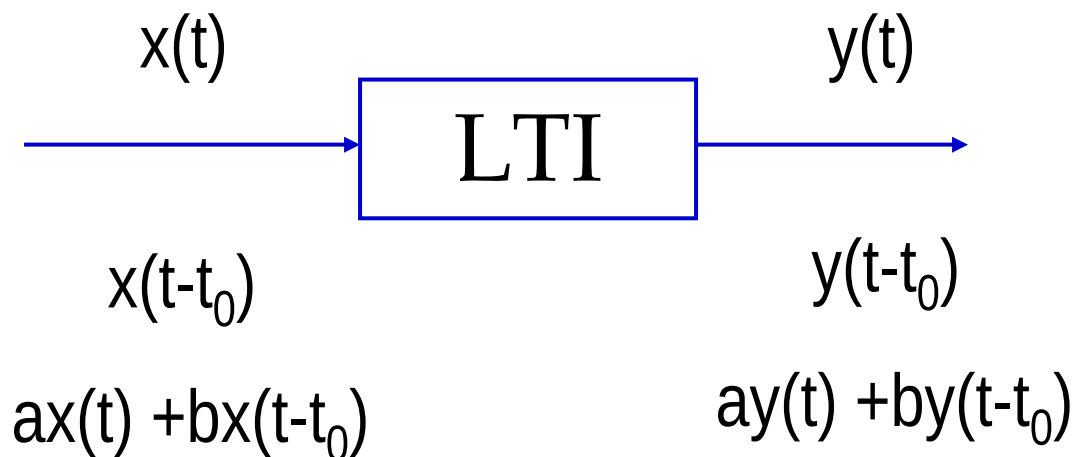


图 1.48 一种增量线性系统的结构。

图中 $y_0[n]$ 是系统的零输入响应

LTI 系统

Linear and Time-invariant system(线性时不变系统)

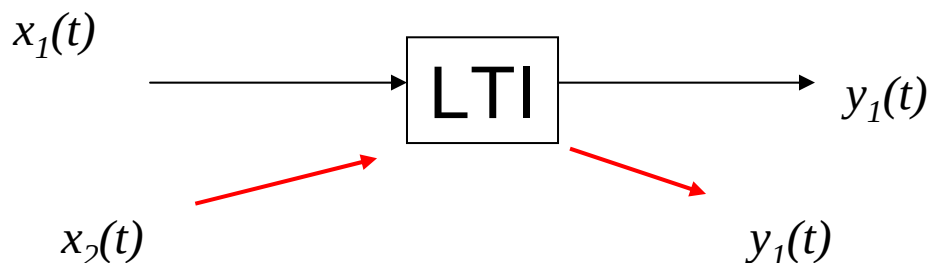


作业:

1.21 1.22 1.27 1.31 1.32—1.54(选做)

经典题型

❖ 对于同一LTI系统，已知其三，求另一。



例：

已知LTI系统，当输入为 $x_1(t)$ 时，输出为 $y_1(t)$ ；当输入为 $x_2(t)$ 时，求此时系统输出 $y_2(t)$

